ROZDZIAŁ XIII

PRZESTRZEŃ HILBERTA. SZEREGI ORTOGONALNE

§ 1. Przestrzenie typu H. *Przestrzenią rzeczywistą (zespoloną) typu* H* nazywamy przestrzeń liniową rzeczywistą (zespoloną) $\boldsymbol{H}$, w której każdej parze elementów $u, v \in \boldsymbol{H}$ przyporządkowana została jednoznacznie skończona liczba rzeczywista (zespolona), oznaczana symbolem (u, v), nazywana *iloczynem skalarnym* elementów u, v, spełniająca następujące warunki

(i_1) $(u, v) = \overline{(v, u)}$,

(i_2) $(au, v) = a(u, v)$,

(i_3) $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$,

(i_4) $(u, u) \geqslant 0$ dla każdego elementu $u \in \boldsymbol{H}$, przy tym $(u, u) = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$.

W (i_2) a oznacza dowolną skończoną liczbę rzeczywistą (zespoloną). Przypominamy, że $\bar{z}$ oznacza liczbę zespoloną sprzężoną do danej liczby z.

Z (i_1) i (i_2) wynika, że

$$(u, av) = \bar{a}(u, v), \tag{1}$$

gdyż $(u, av) = \overline{(av, u)} = \overline{a(v, u)} = \bar{a}\overline{(v, u)} = \bar{a}(u, v)$.

Z (i_1) i (i_3) wynika, że

$$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2), \tag{2}$$

gdyż $(u, v_1 + v_2) = \overline{(v_1 + v_2, u)} = \overline{(v_1, u) + (v_2, u)} = \overline{(v_1, u)} + \overline{(v_2, u)} = (u, v_1) + (u, v_2)$.

Oczywiście w przypadku przestrzeni rzeczywistych równania (i_1) i (1) mają postać

(i_1') $(u, v) = (v, u)$,

$$(u, av) = a(u, v), \tag{1'}$$

gdyż wszystkie liczby, występujące w tych równościach, są rzeczywiste.

Dla dowolnego $u \in \boldsymbol{H}$ przyjmijmy

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}. \tag{3}$$

1.1. *Dla dowolnych* $u, v \in \boldsymbol{H}$

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|. \tag{4}$$

W przypadku przestrzeni rzeczywistej nierówność (4) zapisuje się często w postaci równoważnej

$$(u, v) \leqslant \|u\| \cdot \|v\|. \tag{4'}$$

Nierówność (4) nosi nazwę *nierówności Schwarza* lub *Schwarza-Buniakowskiego*, gdyż jest ona uogólnieniem nierówności (7), rozdział XII, § 2.

Dla dowolnych liczb $t, \alpha \in \mathcal{R}$

$$(te^{i\alpha}u + v, te^{i\alpha}u + v) \geqslant 0$$

na mocy (i_4) [1]. Stosując (i_1)-(i_3), (1) i (2) otrzymujemy

$$t^2(u, u) + t\left(e^{i\alpha}(u, v) + \overline{e^{i\alpha}(u, v)}\right) + (v, v) \geqslant 0.$$

Obierzmy liczbę α tak, aby $e^{i\alpha}(u, v) = |(u, v)|$. Otrzymujemy

$$t^2\|u\|^2 + 2t|(u, v)| + \|v\|^2 \geqslant 0 \tag{5}$$

dla dowolnego $t \in \mathcal{R}$. Wyróżnik trójmianu (5) zmiennej rzeczywistej t musi więc być niedodatni, tzn.

$$|(u, v)|^2 \leqslant \|u\|^2 \cdot \|v\|^2,$$

skąd bezpośrednio wynika (4).

W przypadku przestrzeni rzeczywistej powyższy dowód się upraszcza, gdyż zbyteczne jest wprowadzanie czynnika $e^{i\alpha}$.

Przestrzeń $\boldsymbol{H}$ typu H* jest przestrzenią unormowaną z normą $\|u\|$, zdefiniowaną wzorem (3). Jedynie warunek (n_2) (por. rozdział XII, § 1) wymaga sprawdzenia. Z (4) wynika, że

$$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) \leqslant$$
$$\leqslant \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,$$

co implikuje własność (n_2):

$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|.$$

Mówimy, że przestrzeń $\boldsymbol{H}$ typu H* jest *przestrzenią typu* H, jeżeli jest ona przestrzenią Banacha przy normie (3), tzn. jeżeli jest przestrzenią rzeczywistą (zespoloną), unormowaną, zupełną. Przestrzeń

[1] i oznacza stale $\sqrt{-1}$. Jak wiadomo, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

typu H, ośrodkowa i nieskończenie wymiarowa, nosi nazwę *przestrzeni Hilberta* [1]).

Przykłady. A) Przestrzeń euklidesowa $\mathcal{R}^k$ jest rzeczywistą przestrzenią typu H przy zwykłej definicji iloczynu skalarnego elementów $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k\}$:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j \eta_j .$$

Podobnie przestrzeń $\tilde{\mathcal{R}}^k$ wszystkich k-wyrazowych ciągów $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ liczb zespolonych (tzn. produkt kartezjański k egzemplarzy zbioru $\tilde{\mathcal{R}}$ liczb zespolonych) jest przestrzenią zespoloną typu H przy następującej definicji iloczynu skalarnego elementów $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$, $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k\}$:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{k} \xi_j \overline{\eta}_j . \tag{6}$$

Przestrzeń $\tilde{\mathcal{R}}^k$ z iloczynem skalarnym (6) nosi nazwę *k-wymiarowej przestrzeni unitarnej*.

Zarówno w przypadku przestrzeni $\mathcal{R}^k$, jak i przestrzeni $\tilde{\mathcal{R}}^k$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |\xi_j|^2} \quad \text{dla} \quad x = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\} .$$

B) Przestrzeń $\boldsymbol{C}$ (przestrzeń $\tilde{\boldsymbol{C}}$) jest przestrzenią rzeczywistą (zespoloną) typu H*, lecz nie typu H, przy następującej definicji iloczynu skalarnego

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx \ \text{dla}\ f, g \in \boldsymbol{C} \qquad \left((f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx \ \text{dla}\ f, g \in \tilde{\boldsymbol{C}}\right).$$

Norma $\|f\|$, zdefiniowana wzorem (3), jest różna od normy $\|f\|_C$ (por. rozdział XII, § 3):

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f|^2\, dx} \leqslant \|f\|_C .$$

C) Przestrzeń $\boldsymbol{L}^2(X, \mu)$ (przestrzeń $\tilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$) jest przestrzenią rzeczywistą (zespoloną) typu H przy następującej definicji iloczynu skalarnego

$$(f, g) = \int_X f g\, d\mu \quad \text{dla} \quad f, g \in \boldsymbol{L}^2(X, \mu), \tag{7}$$

$$\left((f, g) = \int_X f \bar{g}\, d\mu \quad \text{dla} \quad f, g \in \tilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)\right).$$

[1]) Materiał z teorii przestrzeni Hilberta, zawarty w tej książce, został dobrany pod kątem widzenia teorii szeregów ortogonalnych. Czytelnika, pragnącego zapoznać się bliżej z teorią przestrzeni Hilberta, odsyłamy do dzieł specjalnych, np. do książek: Stone [1], Achijezer i Głazman [1], Halmos [2], von Neumann [2].

Norma $\|f\|$, zdefiniowana wzorem (3), jest identyczna z normą $\|f\|_2$, zdefiniowaną w rozdziale XII, § 2 (por. także § 12).

Jeżeli miara μ jest ośrodkowa, to (por. rozdział XII, 2.8) przestrzenie $\boldsymbol{L}^2(X, \mu)$, $\tilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$ są przestrzeniami Hilberta, o ile tylko są nieskończenie wymiarowe. W szczególności przestrzenie $\boldsymbol{L}^2$, $\tilde{\boldsymbol{L}}^2$, $\boldsymbol{L}^2(\mathcal{R})$, $\tilde{\boldsymbol{L}}^2(\mathcal{R})$ są przestrzeniami Hilberta.

D) Przestrzeń $\boldsymbol{l}^2$ ($\tilde{\boldsymbol{l}}^2$) jest rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią Hilberta. Iloczynem skalarnym dwu elementów $u = \{a_n\}$, $v = \{\beta_n\}$ w myśl definicji (7) jest liczba

$$(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n \ \text{dla}\ u, v \in \boldsymbol{l}^2 \qquad \left((u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{\beta}_n \ \text{dla}\ u, v \in \tilde{\boldsymbol{l}}^2\right), \tag{8}$$

przy tym

$$\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} .$$

W dalszym ciągu (aż do końca § 3) litera $\boldsymbol{H}$ oznaczać będzie stale pewną nieskończenie wymiarową przestrzeń typu H, która może być bądź rzeczywista, bądź zespolona. W pierwszym przypadku wszystkie rozważane współczynniki liczbowe są liczbami rzeczywistymi skończonymi, w drugim — liczbami zespolonymi. Oczywiście w przypadku rzeczywistym zamiast $\bar{z}$, $|z|^2$, ... możemy pisać zawsze z, z^2 itp. W przypadku rzeczywistym możemy zawsze przestawić czynniki u, v iloczynu skalarnego (u, v). W przypadku zespolonym kolejność czynników jest istotna i nie może być zmieniana. Przez „liczbę" będziemy zawsze rozumieć w przypadku rzeczywistym — dowolną skończoną liczbę rzeczywistą, a w przypadku zespolonym — dowolną liczbę zespoloną. Przez zbieżność będziemy rozumieli zawsze zbieżność według normy $\|\ \|$, zdefiniowanej wzorem (3).

1.2. *Przy ustalonym elemencie $v \in \boldsymbol{H}$ wyrażenie*

$$F(u) = (u, v) \tag{9}$$

jest funkcjonałem liniowym w $\boldsymbol{H}$ oraz

$$\|F\| = \|v\| .$$

Liniowość i nierówność $\|F\| \leqslant \|v\|$ wynikają natychmiast z nierówności Schwarza (4). Ponieważ $|F(v)| = \|v\|^2$, więc zachodzi równość $\|F\| = \|v\|$ (por. rozdział XII, str. 30).

Można udowodnić, że — na odwrót — każdy funkcjonał liniowy na przestrzeni $\boldsymbol{H}$ jest postaci (9) (por. ćwiczenie 6).

Z twierdzenia 1.2 (por. także (i_1)) oraz z twierdzenia 10.6, rozdział XII, wynika natychmiast, że

1.3. *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest szeregiem zbieżnym w przestrzeni* $\boldsymbol{H}$, *to dla dowolnego* $u \in \boldsymbol{H}$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n, u)\,, \tag{10}$$

$$\Big(u, \sum_{n=1}^{\infty} u_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (u, u_n)\,. \tag{11}$$

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym, to szeregi liczbowe po prawej stronie* (10) *i* (11) *są bezwzględnie zbieżne.*

ĆWICZENIA. **1.** Uzupełnienie (por. rozdział IV, § 5, ćwiczenie 4 i rozdział XII, § 1, ćwiczenie 1) przestrzeni typu H* jest przestrzenią typu H.

2. W dowolnej przestrzeni typu H*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)\,.$$

Uwaga. Powyższa równość charakteryzuje[1]) przestrzenie typu H*. Jeśli bowiem norma $\|\ \|$ w pewnej przestrzeni unormowanej (rzeczywistej lub zespolonej) spełnia tę równość, to można w tej przestrzeni zdefiniować iloczyn skalarny (u, v) tak, żeby norma spełniała równość (3).

3. Niech $\boldsymbol{H}_0$ będzie podzbiorem liniowym domkniętym przestrzeni $\boldsymbol{H}$ typu H i niech $u_0 \in \boldsymbol{H}$. Istnieje wówczas dokładnie jeden element $v_0 \in \boldsymbol{H}_0$ taki, że

$$\|u_0 - v_0\| = \varrho(u_0, \boldsymbol{H}_0) = \inf_{v \in \boldsymbol{H}_0} \|u_0 - v\|\,.$$

(Wsk.: Niech $v_n \in \boldsymbol{H}_0$, $\lim_{n\to\infty} \|u_0 - v_n\| = \varrho(u_0, \boldsymbol{H}_0)$. Ponieważ $\|u_0 - (v_m + v_n)/2\| \leqslant \leqslant (\|u_0 - v_m\| + \|u_0 - v_n\|)/2$, więc $\lim_{m,n\to\infty} \|u_0 - (v_m + v_n)/2\| = \varrho(u_0, \boldsymbol{H}_0)$. Podstawiając $u = u_0 - v_m$, $v = u_0 - v_n$ w równości z ćwiczenia 2 stwierdzamy, że $\lim_{m,n\to\infty} \|v_n - v_m\| = 0$, więc $v_n \to v_0 \in \boldsymbol{H}_0$ oraz $\|u_0 - v_0\| = \varrho(u_0, \boldsymbol{H}_0)$. Jednoznaczność elementu v_0 wynika z faktu, że — jak udowodniliśmy przed chwilą — każdy ciąg $v_n \in \boldsymbol{H}_0$ o własności $\lim_{n\to\infty} \|u_0 - v_n\| = \varrho(u_0, \boldsymbol{H}_0)$ jest zbieżny.)

Uwaga. Element v_0 nazywamy *rzutem ortogonalnym* elementu u_0 na podprzestrzeń $\boldsymbol{H}_0$.

[1]) Por. np. von Neumann [2], str. 9-12.

4. Jeżeli v_0 jest rzutem ortogonalnym elementu $u_0 \in \boldsymbol{H}$ na podprzestrzeń liniową $\boldsymbol{H}_0 \subset \boldsymbol{H}$, to

$$(u_0 - v_0, v) = 0 \quad \text{dla każdego } v \in \boldsymbol{H}_0\,.$$

(Wsk.: Jeżeli $a = (u_0 - v_0, v_1) \neq 0$ dla pewnego $v_1 \in \boldsymbol{H}_0$, to dla elementu $v = v_0 + \frac{a}{\|v_1\|^2} v_1 \in \boldsymbol{H}_0$ mamy

$$\|u_0 - v\|^2 = \|u_0 - v_0\|^2 - \frac{|a|^2}{\|v_1\|^2}\,,$$

co przeczy definicji rzutu v_0.)

5. Dla dowolnej podprzestrzeni liniowej domkniętej $\boldsymbol{H}_0 \subset \boldsymbol{H}$ zbiór

$$\boldsymbol{H}_1 = \Big[u\colon \prod_{v \in \boldsymbol{H}_0} (u, v) = 0\Big]$$

jest podprzestrzenią liniową domkniętą, a każdy element $u \in \boldsymbol{H}$ można przedstawić w dokładnie jeden sposób w postaci sumy $u = v_0 + v_1$, gdzie $v_0 \in \boldsymbol{H}_0$ i $v_1 \in \boldsymbol{H}_1$.

(Wsk.: Przyjąć v_0 = rzut ortogonalny elementu u oraz $v_1 = u - v_0$.)

Uwaga. Podprzestrzeń $\boldsymbol{H}_1$ nazywa się *dopełnieniem ortogonalnym* podprzestrzeni $\boldsymbol{H}_0$.

6. Niech F będzie liniowym funkcjonałem na $\boldsymbol{H}$, nierównym tożsamościowo zeru. Jeśli element $v_0 \neq 0$ należy do dopełnienia ortogonalnego podprzestrzeni $[u\colon F(u) = 0]$ i $v = \frac{\overline{F(v_0)}}{\|v_0\|^2} v_0$, to

$$F(u) = (u, v) \quad \text{dla} \quad u \in \boldsymbol{H}\,. \tag{*}$$

(Wsk.: Zauważyć, że funkcjonał ten przyjmuje wartość zero na elemencie $w = F(u)v_0 - F(v_0)u$, a więc $(w, v_0) = 0$.)

7. Jeżeli $u_n \to u$ słabo w $\boldsymbol{H}$ i $\|u_n\| \to \|u\|$, to $u_n \to u$ według normy.

(Wsk.: Skorzystać z uwagi, że każdy funkcjonał liniowy jest postaci (*).)

Uwaga. Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla przestrzeni $L^p(X, \mu)$, gdzie $1 < p < \infty$[1]).

8. Wyznacznik

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \ldots & (u_1, u_n) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & \ldots & (u_2, u_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (u_n, u_1) & (u_n, u_2) & \ldots & (u_n, u_n) \end{vmatrix}$$

nazywa się *wyznacznikiem Grama* elementów $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \boldsymbol{H}$.

Udowodnić, że elementy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ są liniowo niezależne, wtedy i tylko wtedy, gdy $G(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$.

9. Niech $\boldsymbol{H}_0 = \operatorname{lin}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ (por. rozdział XII, § 1, str. 9). Jeżeli elementy $u_1, u_2, \ldots, u_n$ są liniowo niezależne, to

$$\varrho(u_0, \boldsymbol{H}_0)^2 = \frac{G(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)}{G(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\,.$$

[1]) Radon [1]. Por. także Banach [5], str. 159.

10. Dla dowolnego zbioru $J \neq 0$ niech $l^2(J)$ ($\tilde{l}^2(J)$) oznacza zbiór wszystkich funkcji f rzeczywistych (zespolonych), określonych na J, takich że

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{j \in J} |f(j)|^2} < \infty .$$

Oczywiście warunek ten implikuje, że zbiór $[j\colon f(j) \neq 0]$ jest co najwyżej przeliczalny.

Wykazać, że $l^2(J)$ ($\tilde{l}^2(J)$) jest rzeczywistą (zespoloną) przestrzenią typu H, przy następującej definicji iloczynu skalarnego:

$$(f, g) = \sum_{j \in J} f(j)\overline{g(j)} .$$

Uwaga. W przypadku gdy J jest zbiorem liczb naturalnych, przestrzeń $l^2(J)$ ($\tilde{l}^2(J)$) jest identyczna z przestrzenią l^2 ($\tilde{l}^2$).

11. Przestrzeń $L^2(X, \mu)$ jest skończenie wymiarowa, wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń X jest sumą skończonej liczby atomów miary μ.

§ 2. Układy ortogonalne. Niech $\boldsymbol{H}$ będzie przestrzenią typu H (rzeczywistą lub zespoloną).

Naśladując terminologię geometrii analitycznej, mówimy, że elementy $u, v \in \boldsymbol{H}$ są *ortogonalne*, jeżeli $(u, v) = 0$. W szczególności element zerowy jest ortogonalny do każdego elementu przestrzeni $\boldsymbol{H}$. Zauważmy, że na mocy (i_1) równość $(u, v) = 0$ jest równoważna równości $(v, u) = 0$.

Mówimy, że ciąg $\{v_n\}$ elementów przestrzeni $\boldsymbol{H}$ jest *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$(v_n, v_m) \begin{cases} = 0, & \text{gdy} \quad n \neq m , \\ \neq 0, & \text{gdy} \quad n = m . \end{cases} \tag{1}$$

Z ostatniego warunku wynika, że wszystkie wyrazy v_n układu ortogonalnego są różne od elementu zerowego.

Mówimy, że ciąg $\{v_n\}$ elementów przestrzeni $\boldsymbol{H}$ jest *układem ortogonalnym unormowanym* (lub: *układem ortonormalnym*), jeżeli

$$(v_n, v_m) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad n \neq m , \\ 1, & \text{gdy} \quad n = m . \end{cases} \tag{2}$$

Ostatni z warunków orzeka, że każdy element v_n układu ortogonalnego unormowanego ma normę równą jedności:

$$\|v_n\| = 1 .$$

Wszystkie wyrazy układu ortogonalnego są różne od siebie, gdyż dla $n \neq m$

$$\|v_n - v_m\|^2 = (v_n - v_m, v_n - v_m) = (v_n, v_n) - (v_n, v_m) - (v_m, v_n) + (v_m, v_m) =$$
$$= (v_n, v_n) + (v_m, v_m) > 0 .$$

W szczególności, jeżeli $\{v_n\}$ jest układem ortogonalnym unormowanym, to

$$\|v_n - v_m\| = \sqrt{2} \quad \text{dla} \quad n \neq m . \tag{3}$$

Przykładem układu ortogonalnego unormowanego w przestrzeni Hilberta l^2 jest ciąg elementów

$$\begin{aligned} e_1 &= \{1, 0, 0, 0, \ldots\} , \\ e_2 &= \{0, 1, 0, 0, \ldots\} , \\ e_3 &= \{0, 0, 1, 0, \ldots\} , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

Inne interesujące przykłady układów ortogonalnych i ortogonalnych unormowanych zostaną podane w § 5.

Jeżeli $\{v_n\}$ jest układem ortogonalnym unormowanym, to dla dowolnego ciągu liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 . \tag{5}$$

Istotnie,

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Big\|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j , \sum_{m=1}^{n} a_m v_m \Big) = \sum_{j=1}^{n} (a_j v_j , a_j v_j) + \sum_{j \neq m} (a_j v_j , a_m v_m) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{a}_j (v_j , v_j) + \sum_{j \neq m} a_j \bar{a}_m (v_j , v_m) = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$$

na mocy (2).

Niech $\{v_n\}$ będzie układem ortogonalnym. Podstawowym zagadnieniem niniejszego paragrafu jest pytanie, kiedy dany (lub: każdy) element $u \in \boldsymbol{H}$ można przedstawić w postaci sumy

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n , \tag{6}$$

gdzie a_n są odpowiednio dobranymi współczynnikami liczbowymi.

Załóżmy najpierw, że równość (6) ma miejsce. Z twierdzenia 1.3 oraz z (1) wynika, że

$$(u, v_m) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n , v_m \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v_n , v_m) = a_m \|v_m\|^2 .$$

Jeżeli więc pewien element $u \in \boldsymbol{H}$ da się przedstawić w postaci sumy (6), to rozwinięcie to jest jedyne, bo współczynniki a_n są wyzna-

czone przez równości

$$a_n = \frac{(u, v_n)}{\|v_n\|^2} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

W szczególnym przypadku, gdy układ $\{v_n\}$ jest unormowany, mamy

$$a_n = (u, v_n)\,. \tag{8}$$

Współczynniki a_n są na ogół zespolone, gdy $\boldsymbol{H}$ jest przestrzenią zespoloną, są zaś zawsze rzeczywiste, gdy $\boldsymbol{H}$ jest przestrzenią rzeczywistą.

Dla dowolnego elementu $u \in \boldsymbol{H}$ i dowolnego układu ortogonalnego $\{v_n\}$ liczby a_n, zdefiniowane wzorem (6), nazywamy *współczynnikami rozwinięcia* elementu u względem układu $\{v_n\}$, a szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \tag{9}$$

nazywamy *rozwinięciem elementu* u względem (lub: według) układu $\{v_n\}$, nie przesądzając na razie sprawy czy szereg (9) jest zbieżny i czy jego sumą jest element u. Jeśli układ ortogonalny $\{v_n\}$ jest unormowany, to współczynniki rozwinięcia elementu u względem układu $\{v_n\}$ dane są prostszym wzorem (8).

Zdanie, orzekające, że szereg (9) jest rozwinięciem elementu u względem układu ortogonalnego $\{v_n\}$, tzn. że liczby a_n są współczynnikami rozwinięcia elementu u względem $\{v_n\}$, zapisujemy krótko w postaci wzoru

$$u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \sim u\,. \tag{10}$$

Wzory (10) należy traktować — przynajmniej na razie — jako inny, czysto formalny sposób zapisania równości (7) (lub (8) — w przypadku układu unormowanego) dla $n = 1, 2, \ldots$

Nasze podstawowe zagadnienie możemy obecnie sformułować w następujący sposób:

A) Czy rozwinięcie elementu $u \in \boldsymbol{H}$ względem układu ortogonalnego $\{v_n\}$ jest szeregiem zbieżnym?

B) Czy element u jest sumą swego rozwinięcia?

Jeżeli $\{v_n\}$ jest układem ortogonalnym, to ciąg $\{v_n/\|v_n\|\}$ jest układem ortogonalnym unormowanym. Powyższe przejście od układu ortogonalnego $\{v_n\}$ do ortogonalnego unormowanego $\{v_n/\|v_n\|\}$ nazywa się *normowaniem* układu $\{v_n\}$. Ponieważ każdy układ ortogonalny można za pomocą normowania zamienić na układ ortogonalny unormowany, w dalszym ciągu będziemy rozważać wyłącznie układy ortogonalne unormowane celem uproszczenia sformułowań wzorów i twierdzeń. Tego rodzaju zwężenie rozważań jest nieistotne, jeśli bowiem dla pewnego układu ortogonalnego $u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$, to także $u \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \|v_n\|) \frac{v_n}{\|v_n\|}$.

W dalszym ciągu § 2 oraz § 3 $\{v_n\}$ oznacza zawsze pewien układ ortogonalny unormowany.

Podanie odpowiedzi na pytania A i B poprzedzimy wyprowadzeniem następujących czterech równości, gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_m$ są dowolnymi liczbami, $\{a_n\}$ zaś jest ciągiem współczynników rozwinięcia elementu u względem $\{v_n\}$:

$$\Big(u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j,\, v_m\Big) = 0 \quad \text{dla} \quad m = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{11}$$

$$\Big(u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j,\, \sum_{m=1}^{n} a_m v_m\Big) = 0\,; \tag{12}$$

$$\Big\| u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Big\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\,; \tag{13}$$

$$\Big\| u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Big\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |a_j - a_j|^2\,. \tag{14}$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$u_0 = u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, \qquad u_1 = \sum_{j=1}^{n} (a_j - a_j) v_j\,.$$

Ponieważ

$$(u_0, v_m) = (u, v_m) - \sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, v_m) = a_m - a_m = 0$$

na podstawie (2) i (8), równość (11) jest prawdziwa. Równość (12) wynika bezpośrednio z (11) (por. wzór (2), § 1).

Z (12) wynika, że $(u_0, u_1) = 0$. Stąd $(u_1, u_0) = \overline{(u_0, u_1)} = 0$. W rezultacie

$$\Big\| u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \Big\|^2 = \|u_0 + u_1\|^2 = (u_0 + u_1, u_0 + u_1) =$$

$$= \|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + (u_1, u_0) + (u_0, u_1) = \|u_0\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |a_j - a_j|^2$$

na podstawie (5). Z drugiej strony,

$$\|u_0\|^2 = \Big(u_0, u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j\Big) = (u_0, u) - \Big(u_0, \sum_{j=1}^{n} a_j v_j\Big) = (u_0, u)$$

na podstawie (12), więc

$$\|u_0\|^2 = \Big(u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j, u\Big) = (u, u) - \sum_{j=1}^{n} a_j (v_j, u) = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$$

(por. (8) i (i_1)), co kończy dowód tożsamości (13) i (14).

Sens geometryczny równości (14) jest następujący: jeżeli ustalimy liczbę n i będziemy rozważać wszelkie kombinacje liniowe

$$u' = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j , \tag{15}$$

to odległość $\|u - u'\|$ jest najmniejsza wtedy i tylko wtedy, gdy $a_j = \alpha_j$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Tak więc spośród wszelkich kombinacji liniowych typu (15) najlepiej przybliża element u n-ta suma częściowa rozwinięcia elementu u względem układu $\{v_n\}$.

2.1 (Twierdzenie Riesza-Fischera). (i) *Na to, by szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n , \tag{16}$$

gdzie $\{a_n\}$ *jest dowolnym ciągiem liczbowym, był zbieżny w* $\boldsymbol{H}$, *potrzeba i wystarcza, aby*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty . \tag{17}$$

(ii) *Jeżeli spełniony jest warunek* (17), *to szereg* (16) *jest bezwarunkowo zbieżny i jest rozwinięciem swojej sumy.*

2.2. *Jeżeli dla dowolnego elementu* $u \in \boldsymbol{H}$

$$u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n ,$$

to

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \|u\|^2 . \tag{18}$$

Inaczej mówiąc, *dla dowolnego* $u \in \boldsymbol{H}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u, v_n)|^2 \leqslant \|u\|^2 . \tag{19}$$

Nierówności (18) i (19) noszą nazwę *nierówności Bessla.*

Dowód twierdzenia 2.1 (i) oprzemy na równości (5). Szereg (16) jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego (por. rozdział XII, 10.1), tzn. dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna m_0 taka, że dla $n > m \geqslant m_0$

$$\|a_{m+1} v_{m+1} + a_{m+2} v_{m+2} + \ldots + a_n v_n\| < \sqrt{\varepsilon} .$$

Na mocy (5) nierówność ta jest równoważna nierówności

$$|a_{m+1}|^2 + |a_{m+2}|^2 + \ldots + |a_n|^2 < \varepsilon .$$

Zatem szereg (16) spełnia warunek Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + \ldots$ spełnia warunek Cauchy'ego, tzn. spełniony jest warunek (17).

Ponieważ zbieżność szeregu (17) nie zależy od uporządkowania jego wyrazów, więc z 2.1 (i) wynika natychmiast, że jeśli szereg (16), jest zbieżny, to jest zbieżny bezwarunkowo.

Uwaga, że szereg (16) jest rozwinięciem swej sumy, została przez nas udowodniona wcześniej przy wyprowadzaniu wzorów (7) i (8).

Nierówność Bessla wynika natychmiast z (13). Istotnie, dla dowolnej liczby n

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \geqslant 0 ,$$

skąd dla $n \to \infty$ otrzymujemy nierówność (18).

Z twierdzeń 2.1 i 2.2 wynika natychmiast pozytywna odpowiedź na pytanie A:

2.3. *Rozwinięcie dowolnego elementu* u *jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym w* $\boldsymbol{H}$.

Odpowiedź na pytanie B nie zawsze jest pozytywna. Na przykład, jeżeli $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{l}^2$ i jeżeli jako układ $\{v_n\}$ przyjmiemy ciąg (por. (4))

$$\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \ldots ,$$

to wszystkie współczynniki rozwinięcia elementu $\boldsymbol{e}_1 \neq 0$ względem tego układu są równe zeru. Sumą rozwinięcia jest więc element zerowy. Zatem $\boldsymbol{e}_1$ nie jest sumą swego rozwinięcia.

Zauważmy, że

2.4. *Jeżeli* $u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n = u_0$, *to* $(u - u_0, v_n) = 0$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$

Istotnie, $(u - u_0, v_m) = (u, v_m) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v_n, v_m) = a_m - a_m = 0$ na podstawie (8) i twierdzenia 1.3.

Następujące dwa twierdzenia dają pełną odpowiedź na pytanie B.

2.5. *Niech* $u \in \boldsymbol{H}$, $u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$. *Następujące cztery warunki są równoważne*:

(i) $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ *w* $\boldsymbol{H}$;

(ii) $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$;

(iii) *u należy do domknięcia zbioru* $\operatorname{lin}[v_1, v_2, \ldots]$ *wszystkich skończonych kombinacji liniowych elementów* $v_1, v_2, \ldots$;

(iv) *dla dowolnego elementu* $u' \in \boldsymbol{H}$ *o rozwinięciu* $u' \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n v_n$ *zachodzi równość*

$$(u, u') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{a'_n}.$$

Równość (ii) nosi nazwę *równości Parsevala*.

Jeżeli warunek (i) jest spełniony, tzn. jeżeli $\lim_{n\to\infty} \|u - \sum_{j=1}^{n} a_j v_j\| = 0$, to z (13) wynika, że $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 = \|u\|^2$, a więc warunek (ii) jest spełniony.

Na odwrót, jeżeli warunek (ii) jest spełniony, to z (13) wynika, że $u = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, tzn. zachodzi warunek (i).

Jeżeli warunek (i) jest spełniony, to spełniony jest także warunek (iii), gdyż u jest granicą ciągu sum cząstkowych swego rozwinięcia, należących do $\operatorname{lin}[v_1, v_2, \ldots]$.

Na odwrót, jeżeli (iii) jest spełniony, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n i liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takie, że lewa strona równości (14) jest mniejsza od ε. Tym samym

$$\|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 < \varepsilon,$$

co wraz z nierównością Bessla dowodzi warunku (ii).

Jeżeli warunek (iv) jest spełniony, to spełniony jest także warunek (ii). Wystarczy w tym celu przyjąć $u' = u$.

Jeżeli warunek (ii) zachodzi, to spełniony jest także warunek (iv). Istotnie, przyjmując $u'' = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n v_n$ (por. 2.3) otrzymujemy na podstawie 2.4 i 1.3

$$(u, u') = (u, u' - u'') + (u, u'') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v_n, u' - u'') + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (v_n, u'') =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{(u'', v_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{a}'_n,$$

gdyż $u'' \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n v_n$ na mocy 2.1 (ii).

Z udowodnionych powyżej implikacji wynika natychmiast równoważność wszystkich warunków (i), (ii), (iii), (iv).

2.6. *Następujące warunki (gdzie* $u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ *i* $u' \sim \sum_{n=1}^{\infty} a'_n v_n$*) są równoważne*:

(i) $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ *w* $\boldsymbol{H}$ *dla każdego elementu* $u \in \boldsymbol{H}$;

(ii) $\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ *dla każdego elementu* $u \in \boldsymbol{H}$;

(iii) *zbiór* $[v_1, v_2, v_3, \ldots]$ *jest liniowo gęsty w* $\boldsymbol{H}$;

(iv) *dla dowolnych elementów* $u, u' \in \boldsymbol{H}$

$$(u, u') = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{a'_n};$$

(v) *jeżeli* $(u_0, v_n) = 0$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$, *to* $u_0 = 0$.

Warunek (v) można by inaczej sformułować w następującej postaci:

(v′) *jeżeli dla dowolnych elementów* $u, u' \in \boldsymbol{H}$ $a_n = a'_n$ *dla* $n = 1, 2, \ldots$, *to* $u = u'$.

Równoważność czterech pierwszych warunków wynika z twierdzenia 2.4.

Jeżeli warunek (i) jest spełniony, to także warunek (v) jest spełniony. Aby przekonać się o tym, wystarczy zastąpić w (i) u przez u_0.

Jeżeli warunek (v) jest spełniony, to warunek (i) także jest spełniony. Istotnie, niech (por. 2.3)

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n.$$

Element $u_0 = u - u_1$ spełnia założenia warunku (v) (por. 2.4), zatem $u_0 = 0$.

ĆWICZENIA. **1.** Sprawdzić, że wszystkie twierdzenia § 2 są prawdziwe również dla dowolnych układów ortogonalnych unormowanych $\{u_j\}_{j\in J}$ (gdzie $J \neq 0$ jest pewnym zbiorem skończonym, przeliczalnym lub nieprzeliczalnym), tzn. rodzin elementów przestrzeni $\boldsymbol{H}$ typu H spełniających warunki

$$(u_j, u_{j'}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } j \neq j', \\ 1, & \text{gdy } j = j'. \end{cases}$$

Rozwinięciem elementu $u \in \boldsymbol{H}$ względem układu ortogonalnego unormowanego $\{u_j\}_{j\in J}$ nazywamy wyrażenie

$$(*) \qquad \sum_{j\in J} f(j)u_j,$$

gdzie $f(j) = (u, u_j)$. Ponieważ nierówność Bessla jest również prawdziwa:

$$\sum_{j\in J} |f(j)|^2 \leqslant \|u\|^2 < \infty$$

(tzn. $f \in l^2(J)$ lub $f \in \tilde{l}^2(J)$ — por. § 1, ćwiczenie 10), więc w sumie (*) jest co najwyżej przeliczalnie wiele składników różnych od zera. Szereg utworzony w dowolny sposób ze składników sumy (*) różnych od zera jest przy tym zbieżny bezwarunkowo. Zatem suma (*) jest dobrze określonym elementem przestrzeni $\boldsymbol{H}$, który równa się elementowi u, gdy $u \in \overline{\operatorname{lin}[u_j]_{j\in J}}$. Na odwrót, dowolny szereg (*) jest zbieżny (i zarazem bezwarunkowo zbieżny), wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{j\in J} |f(j)|^2 < \infty$ (tzn. $f \in l^2(J)$ lub $f \in \tilde{l}^2(J)$), i jest wtedy rozwinięciem ortogonalnym swojej sumy.

Uwaga. Można wykazać, że w każdej przestrzeni typu H istnieje liniowo gęsty układ ortogonalny unormowany.

2. Niech $\{v_j\}_{j\in J}$ będzie dowolnym układem ortogonalnym w przestrzeni $\boldsymbol{H}$ typu H. Każdy element $u \in \boldsymbol{H}$ można przedstawić w postaci $u = u_1 + u_2$, gdzie u_1 jest sumą rozwinięcia elementu u, a u_2 jest elementem ortogonalnym do wszystkich elementów v_j.

3. Rodzina $\{f_j\}_{j\in J}$ funkcji

$$f_j(j') = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad j \neq j', \\ 1, & \text{gdy} \quad j = j', \end{cases}$$

określonych na zbiorze $J \neq 0$ (na ogół nieprzeliczalnym) jest układem ortogonalnym unormowanym w przestrzeni $l^2(J)$ (lub $\tilde{l}^2(J)$), liniowo gęstym w tej przestrzeni.

4. Każdy ciąg, tworzący układ ortogonalny unormowany, jest słabo zbieżny do elementu zerowego.

5. Dla dowolnego układu ortogonalnego unormowanego $\{v_n\}$ oznaczmy

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_j$$

oraz

$$w_n = \sqrt{n(n+1)}(\sigma_{n+1} - \sigma_n) = \frac{nv_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} v_j}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Udowodnić, że [1])

(α) $\{w_n\}$ jest układem ortogonalnym unormowanym;

(β) $\overline{\operatorname{lin}[v_1, v_2, \ldots]} = \overline{\operatorname{lin}[w_1, w_2, \ldots]}$,

(γ) $-v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} w_n$.

[1]) Banach [1].

(Wsk.: (α) otrzymuje się przez przeliczenie. Jeśli u jest elementem ortogonalnym do wszystkich w_n, $u \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$, to $a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, a więc $a_1 = a_2 = \ldots$, co daje $a_n = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Element u jest więc ortogonalny do wszystkich v_n, co dowodzi, że $\overline{\operatorname{lin}[v_1, v_2, \ldots]} \subset \overline{\operatorname{lin}[w_1, w_2, \ldots]}$. Inkluzja odwrotna wynika z tego, że $w_n \in \operatorname{lin}[v_1, v_2, \ldots]$. Własność ($\gamma$) wynika z ($\beta$) oraz z 2.5.)

§ 3. Ortogonalizacja Schmidta. Równoważność przestrzeni Hilberta.

Twierdzenie 2.6 (por. warunek (iii)) nasuwa pytanie, kiedy w nieskończenie wymiarowej przestrzeni $\boldsymbol{H}$ typu H istnieje przeliczalny układ ortogonalny, unormowany, liniowo gęsty w $\boldsymbol{H}$. Jeżeli układ taki istnieje, to przestrzeń $\boldsymbol{H}$ jest ośrodkowa (por. rozdział XII, 1.2), tzn. jest przestrzenią Hilberta. Ośrodkowość przestrzeni $\boldsymbol{H}$ jest więc warunkiem koniecznym. Wykażemy obecnie, że warunek ten jest także dostateczny.

Podamy w tym celu pewien sposób konstrukcji układów ortogonalnych unormowanych, noszący nazwę metody *ortogonalizacji Schmidta.*

3.1. *Niech $\{u_n\}$ będzie ciągiem liniowo niezależnych elementów przestrzeni $\boldsymbol{H}$ typu* H. *Istnieje układ ortogonalny unormowany $\{v_n\}$ taki, że*

$$(1) \qquad \operatorname{lin}[u_1, u_2, \ldots, u_n] = \operatorname{lin}[v_1, v_2, \ldots, v_n] \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Definicja ciągu $\{v_n\}$ jest indukcyjna. Przyjmijmy $v_1 = u_1/\|u_1\|$ i załóżmy, że określiliśmy już elementy $v_1, \ldots, v_{n-1}$, tak że

$$(2) \qquad \operatorname{lin}[u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}] = \operatorname{lin}[v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}],$$

$$(3) \qquad (v_j, v_m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad j = m < n, \\ 0, & \text{gdy} \quad j < m < n. \end{cases}$$

Niech

$$v = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j v_j, \quad \text{gdzie} \quad a_j = (u_n, v_j) \quad \textit{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Z łatwością sprawdzamy, że

$$(4) \qquad (v, v_j) = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ponieważ na mocy (2) każdy element v_j $(1 \leqslant j < n)$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej elementów $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, więc v jest kombinacją liniową elementów $u_1, u_2, \ldots, u_n$, przy tym współczynnik przy u_n jest równy 1. Z liniowej niezależności elementów $u_1, u_2, \ldots, u_n$ wynika, że $v \neq 0$. Niech

$$v_n = \frac{v}{\|v\|}.$$

Z definicji v_n oraz z (4) i (3) wynika, że

$$(5) \qquad (v_j, v_m) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad j = m \leqslant n, \\ 0, & \text{gdy} \quad j < m \leqslant n. \end{cases}$$

Ponieważ $v_n \in \lin[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ oraz ponieważ $u_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j v_j + \|v\| v_n \in \lin[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, więc zachodzi równość (1), co wraz z (5) dowodzi, że zdefiniowany indukcyjnie ciąg $\{v_n\}$ spełnia warunki twierdzenia 3.1.

3.2. *W każdej przestrzeni Hilberta $\boldsymbol{H}$ istnieje liniowo gęsty przeliczalny układ ortogonalny unormowany.*

Niech $D = [w_1, w_2, \ldots]$ będzie przeliczalnym gęstym podzbiorem. Niech m_1 będzie najmniejszą liczbą taką, że $w_{m_1} \neq 0$. Przez indukcję — niech m_{n+1} będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że element $w_{m_{n+1}}$ nie jest kombinacją liniową elementów $w_{m_1}, w_{m_2}, \ldots, w_{m_n}$. Ciąg $u_n = w_{m_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jest ciągiem elementów liniowo niezależnych oraz

$$\lin[u_1, u_2, \ldots, u_n] = \lin[w_{m_1}, w_{m_2}, \ldots, w_{m_n}] = \lin[w_1, w_2, \ldots, w_{m_n}]$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ W rezultacie

$$D \subset \lin[w_1, w_2, \ldots] = \lin[u_1, u_2, \ldots].$$

Ciąg $\{u_n\}$ jest nieskończony, gdyż przestrzeń $\boldsymbol{H}$ nie jest skończenie wymiarowa.

Z twierdzenia 3.1 wnioskujemy, że istnieje układ ortogonalny unormowany $\{v_n\}$ taki, że

$$\lin[u_1, u_2, \ldots, u_n] = \lin[v_1, v_2, \ldots, v_n] \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

W konsekwencji

$$D \subset \lin[u_1, u_2, \ldots] = \lin[v_1, v_2, \ldots],$$

co dowodzi, że układ $\{v_n\}$ jest liniowo gęsty w $\boldsymbol{H}$.

Zgodnie z ogólną definicją z rozdziału XII, § 1, mówimy, że dwie przestrzenie rzeczywiste (zespolone) $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{H}'$ typu H* są *równoważne*, jeżeli istnieje operacja liniowa rzeczywista (zespolona) T, odwzorowująca $\boldsymbol{H}$ na $\boldsymbol{H}'$, zachowująca normę, tzn.

$$\|T(u)\| = \|u\| \quad \text{dla} \quad u \in \boldsymbol{H}. \tag{6}$$

Operacja T zachowuje wówczas również iloczyn skalarny, tzn.

$$(T(u), T(v)) = (u, v) \quad \text{dla dowolnych } u, v \in \boldsymbol{H}. \tag{7}$$

Istotnie, z (6) wynika, że dla dowolnych $u, v \in \boldsymbol{H}$

$$\|T(u+v)\|^2 = \|u+v\|^2,$$

tzn.

$$\|T(u)\|^2 + (T(u), T(v)) + (T(v), T(u)) + \|T(v)\|^2 = \|u\|^2 + (u, v) + (v, u) + \|v\|^2.$$

W rezultacie,

$$(T(u), T(v)) + \overline{(T(u), T(v))} = (u, v) + \overline{(u, v)}. \tag{8}$$

Jeśli $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{H}'$ są przestrzeniami rzeczywistymi, równość (8) implikuje bezpośrednio równość (7).

Jeśli $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{H}'$ są przestrzeniami zespolonymi, to równość (8) orzeka, że części rzeczywiste liczb $(T(u), T(v))$ i (u, v) są równe. Podstawiając w (8) za u element iu otrzymujemy

$$i(T(u), T(v)) + \overline{i(T(u), T(v))} = i(u, v) + \overline{i(u, v)},$$

skąd wynika, że części urojone liczb $(T(u), T(v))$ i (u, v) są sobie równe. Uwaga ta kończy dowód równości (7).

Z drugiej strony, warunek (7) pociąga za sobą warunek (6) (wystarczy przyjąć w tym celu $v = u$). Widzimy więc, że w definicji równoważności przestrzeni typu H* można warunek (6) zastąpić przez (7).

3.3. *Dowolna rzeczywista (zespolona) przestrzeń Hilberta $\boldsymbol{H}$ jest równoważna przestrzeni $\boldsymbol{l^2}$ (przestrzeni $\boldsymbol{\tilde{l}^2}$).*

Dokładniej:

Niech $\{v_n\}$ będzie układem ortogonalnym, unormowanym, liniowo gęstym w $\boldsymbol{H}$. Odwzorowanie T przyporządkowujące każdemu elementowi $u \in \boldsymbol{H}$ ciąg $\{a_n\}$ jego współczynników rozwinięcia względem $\{v_n\}$ odwzorowuje $\boldsymbol{H}$ na $\boldsymbol{l^2}$ (na $\boldsymbol{\tilde{l}^2}$) i ma własność (6).

Własność (6) wynika z twierdzenia 2.6 (ii). Z twierdzenia Riesza-Fischera 2.1 wynika, że T odwzorowuje $\boldsymbol{H}$ na $\boldsymbol{l^2}$ (na $\boldsymbol{\tilde{l}^2}$).

Z twierdzenia 3.3 wynika, że badanie własności dowolnych przestrzeni Hilberta można sprowadzić do badania własności przestrzeni $\boldsymbol{l^2}$ i $\boldsymbol{\tilde{l}^2}$. Mowa tu jednak jedynie o własnościach, które nie dotyczą struktury elementów przestrzeni i mogą być sformułowane jedynie przy pomocy dodawania, mnożenia przez liczbę i mnożenia skalarnego elementów.

Z twierdzenia 3.3 wynika bezpośrednio, że

3.4. *Wszystkie przestrzenie Hilberta są równoważne.*

ĆWICZENIA. 1. Wyrazy ciągu $\{v_n\}$ są określone przez warunki twierdzenia 3.1 z dokładnością do czynnika liczbowego o module 1 (a więc — w przypadku przestrzeni rzeczywistej — z dokładnością do znaku).

2. Jeżeli miary μ i ν są ośrodkowe i żadna z przestrzeni X, Y nie jest sumą skończonej liczby atomów, to przestrzenie $L^p(X, \mu)$ oraz $L^q(Y, \nu)$ są homeomorficzne, $1 \leqslant p, q < \infty$.

(Wsk.: Skorzystać z twierdzenia 3.3 oraz z rozdziału XII, § 2, ćwiczenie 17.)

3. Jeżeli $\{u_j\}_{j \in J}$ jest (skończonym, przeliczalnym lub nieprzeliczalnym) układem ortogonalnym unormowanym, liniowo gęstym w przestrzeni rzeczywistej (zespolonej) $\boldsymbol{H}$

typu H, to odwzorowanie T przyporządkowujące każdemu elementowi $u \in \boldsymbol{H}$ funkcję f:

$$f(j) = (u, u_j) \quad \text{dla} \quad j \in J$$

ustala równoważność przestrzeni $\boldsymbol{H}$ z przestrzenią $l^2(J)$ ($\widetilde{l}^2(J)$).

Uwaga. Zatem każda przestrzeń rzeczywista (zespolona) $\boldsymbol{H}$ typu H jest równoważna pewnej przestrzeni $l^2(J)$ ($\widetilde{l}^2(J)$) (por. uwagę przy ćwiczeniu 10, § 2). Moc zbioru J jest przy tym wyznaczona jednoznacznie przez $\boldsymbol{H}$. Można bowiem udowodnić, że jeśli $\{u_j\}_{j\in J}$ i $\{v_j\}_{j\in J'}$ są układami ortogonalnymi unormowanymi, liniowo gęstymi w $\boldsymbol{H}$, to zbiory J i J' są równej mocy.

§ 4. Szeregi ortogonalne w przestrzeniach funkcyjnych. Zastosujemy obecnie do przestrzeni funkcyjnych wyniki uzyskane w poprzednich paragrafach. Podobnie jak poprzednio, będziemy rozważać równocześnie przypadek zespolony i rzeczywisty. Wszystkie twierdzenia i definicje będziemy formułować dla funkcji i przestrzeni zespolonych. Analogiczne twierdzenia i definicje dla funkcji i przestrzeni rzeczywistych otrzymuje się, opuszczając wszędzie znaczek „$\sim$“ nad symbolem przestrzeni funkcyjnej i znak „$-$“ nad liczbami i funkcjami. Zamiast $|z|^2$ możemy wtedy oczywiście pisać z^2. Słowo „liczba“ oznaczać będzie tak jak w poprzednich paragrafach liczbę zespoloną w przypadku zespolonym, a rzeczywistą skończoną — w przypadku rzeczywistym.

Niech X będzie przestrzenią z miarą μ, określoną na przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{M}$. W przypadku gdy całkowanie będzie się odbywało względem miary μ, będziemy opuszczać symbol $d\mu$ pod znakiem całki.

Iloczynem skalarnym dwu funkcji mierzalnych f, g, określonych na X, nazywamy liczbę $\int_X f\bar{g}$. Iloczyn skalarny funkcji f, g jest określony, wtedy i tylko wtedy, gdy $f\bar{g}$ jest funkcją całkowalną. Mówimy, że funkcje mierzalne f, g są *ortogonalne*, jeżeli $\int_X f\bar{g} = 0$. Definicje powyższe są uogólnieniem definicji z § 1 C, gdzie stwierdziliśmy, że przy powyższej definicji iloczynu skalarnego przestrzeń $\widetilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$ jest przestrzenią typu H, a w przypadku gdy μ jest miarą ośrodkową i $\widetilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$ nie jest skończenie wymiarowa, jest przestrzenią Hilberta.

Zgodnie z definicją z § 2 ciąg funkcji $g_n \in \widetilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$ jest *układem ortogonalnym*, jeżeli

$$\int_X |g_n|^2 > 0 \quad \text{i} \quad \int_X g_n\bar{g}_m = 0 \quad \text{dla} \quad n \neq m. \tag{1}$$

Ciąg funkcji $g_n \in \widetilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$ jest układem *ortogonalnym unormowanym* (lub: *ortonormalnym*), jeżeli

$$\int_X g_n\bar{g}_m = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad n = m, \\ 0, & \text{gdy} \quad n \neq m. \end{cases} \tag{2}$$

Przez normowanie każdy układ ortogonalny $\{g_n\}$ można zamienić na układ ortogonalny unormowany $\{g_n/\|g_n\|_2\}$. Z tej przyczyny w dalszym ciągu będziemy prawie wyłącznie mówić o układach ortogonalnych unormowanych.

Szeregiem ortogonalnym nazywamy każdy szereg postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n, \tag{3}$$

gdzie $\{a_n\}$ jest dowolnym ciągiem liczbowym, a $\{g_n\}$ — układem ortogonalnym funkcji o kwadracie całkowalnym na X. Szereg (3) nazywa się *rozwinięciem ortogonalnym* (lub krótko: *rozwinięciem*) pewnej funkcji mierzalnej f, określonej na X, względem układu $\{g_n\}$, jeżeli

$$a_n = \frac{\int_X f\bar{g}_n}{\int_X |g_n|^2} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

W przypadku gdy $\{g_n\}$ jest układem ortogonalnym unormowanym, wzór (4) przybiera prostszą postać

$$a_n = \int_X f\bar{g}_n \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

W przypadku gdy $f \in \widetilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$, definicja rozwinięcia ortogonalnego pokrywa się z definicją wprowadzoną w § 2 (wzory (7) i (8)). Definicja powyższa jest jednak ogólniejsza od definicji z § 2, gdyż stosujemy ją nie tylko w przypadku funkcji o kwadracie całkowalnym, lecz również dla dowolnych funkcji mierzalnych f, dla których wszystkie liczby (4) są skończone.

Jeżeli szereg (1) jest rozwinięciem funkcji mierzalnej f względem układu g_n, piszemy wówczas

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \tag{6}$$

lub

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x), \tag{7}$$

a ciąg liczbowy $\{a_n\}$ nazywamy ciągiem *współczynników rozwinięcia* funkcji f względem $\{g_n\}$. Podobnie jak w § 2, wzory (6) i (7) uważamy jedynie za inny sposób zapisania równości (4) (lub (5) — w przypadku układu ortogonalnego unormowanego).

Pojęcie szeregu ortogonalnego jest ogólniejsze niż pojęcie rozwinięcia ortogonalnego funkcji, gdyż nie każdy szereg ortogonalny jest rozwinięciem pewnej funkcji. W dalszym ciągu ograniczymy się jednak do rozpatrywania rozwinięć ortogonalnych funkcji mierzalnych. Ze względu na możliwość normalizacji układu ograniczymy się również do układów ortogonalnych unormowanych.

W dalszym ciągu $\{g_n\}$ oznacza stale pewien układ ortogonalny unormowany, $g_n \in \tilde{L}^2(X, \mu)$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Podobnie jak w § 2, formułujemy główne zagadnienie teorii rozwinięć ortogonalnych funkcji w postaci dwu pytań:

A) Czy szereg po prawej stronie wzoru (6) jest zbieżny.

B) Czy funkcja f jest sumą tego szeregu.

Postawienie powyższych pytań wymaga wyjaśnienia, co rozumiemy przez zbieżność szeregu funkcyjnego. Ogólna definicja zbieżności szeregu jest następująca: szereg funkcyjny $f_1+f_2+\ldots$ jest zbieżny, gdy ciąg $\{f_1+f_2+\ldots+f_n\}$ sum częściowych jest zbieżny. Zależnie od tego, jaki ustalimy rodzaj zbieżności ciągu funkcyjnego, otrzymujemy analogiczny rodzaj zbieżności szeregu funkcyjnego. Można więc mówić, że szereg $f_1+f_2+\ldots$ jest zbieżny wszędzie, prawie wszędzie, według miary, jednostajnie, w przestrzeni $\tilde{L}^p(X, \mu)$ itd.

Powracając do głównego zagadnienia, stwierdzamy, że postawione dwa pytania należy sformułować dla każdego rodzaju zbieżności oddzielnie. Na przykład, jeżeli $f, g_n \in \tilde{L}^p(X, \mu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, to można się pytać, czy szereg po prawej stronie (6) jest zbieżny w $\tilde{L}^p(X, \mu)$ i czy jest zbieżny do f w $\tilde{L}^p(X, \mu)$, następnie można się pytać, czy jest zbieżny wszędzie, prawie wszędzie, według miary itd. i czy f jest jego sumą.

W przypadku gdy $f \in \tilde{L}^2(X, \mu)$ i gdy rozpatrywaną zbieżnością jest zbieżność przeciętna w kwadracie, tzn. według normy $\| \ \|_2$, pełną odpowiedź podają twierdzenia udowodnione w § 2, które można obecnie wysłowić w następującej postaci.

4.1 (Twierdzenie Riesza-Fischera). (i) *Szereg ortogonalny* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ *jest zbieżny do pewnej funkcji* $f_0 \in \tilde{L}^2(X, \mu)$ *według normy* $\| \ \|_2$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty. \tag{8}$$

(ii) *Jeżeli spełniony jest warunek* (8), *to szereg* (3) *jest zbieżny bezwarunkowo według normy* $\| \ \|_2$ *i jest rozwinięciem swojej sumy* $f_0 \in \tilde{L}^2(X, \mu)$.

4.2. *Jeżeli* $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ *i* $f \in \tilde{L}^2(X, \mu)$, *to*

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad \textit{(nierówność Bessla)}. \tag{9}$$

Rozwinięcie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ *jest więc szeregiem zbieżnym według normy* $\| \ \|_2$ *do pewnej funkcji* $f_0 \in \tilde{L}^2(X, \mu)$. *Funkcja* $f - f_0$ *jest ortogonalna do wszystkich funkcji* g_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Natomiast równość $f = f_0$ nie zawsze zachodzi.

4.3. *Niech* $f \in \tilde{L}^2(X, \mu)$, $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$. *Następujące warunki są równoważne*:

(i) *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ *jest zbieżny do* f *według normy* $\| \ \|_2$.

(ii) $\int_X |f|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ *(równość Parsevala)*.

(iii) *Dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje ciąg liczb* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *taki, że* $\int_X \left| f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j \right|^2 d\mu < \varepsilon$.

(iv) *Dla dowolnej funkcji* $g \in \tilde{L}^2(X, \mu)$ *o rozwinięciu* $g \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n$ *zachodzi równość*

$$\int_X f\bar{g} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{\beta_n}.$$

4.4. *Następujące warunki, gdzie*

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n, \qquad g \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n,$$

są równoważne:

(i) *Dla każdej funkcji* $f \in \tilde{L}^2(X, \mu)$ *rozwinięcie funkcji* f *względem układu* $\{g_n\}$ *jest zbieżne do* f *według normy* $\| \ \|_2$.

(ii) *Dla każdej funkcji* $f \in \tilde{L}^2(X, \mu)$, $\int_X |f|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$.

(iii) *Ciąg* $\{g_n\}$ *jest liniowo gęsty w* $\tilde{L}^2(X, \mu)$.

(iv) *Dla dowolnych funkcji* $f, g \in \tilde{L}^2(X, \mu)$

$$\int_X f\bar{g} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{\beta_n}.$$

(v) *Jeżeli funkcja* $f \in \tilde{L}^2(X, \mu)$ *jest ortogonalna do wszystkich funkcji* g_n $(n = 1, 2, \ldots)$, *to* $f = 0$ *prawie wszędzie.*

Warunek (v) można także sformułować w następującej postaci:

(v′) *Jeżeli funkcje* f *i* g *mają identyczne rozwinięcia względem* g_n, *to* $f = g$ *prawie wszędzie.*

Warunek (v′) stwierdza, że każda funkcja f jest jednoznacznie (tzn. z dokładnością do funkcji równoważnych) wyznaczona przez swoje rozwinięcie.

Posługując się terminologią wprowadzoną w rozdziale XII, § 6, można warunek (v) sformułować jeszcze w następujący sposób:

(v″) *Ciąg* $\{g_n\}$ *jest pełny w przestrzeni* $\tilde{L}^2(X, \mu)$.

Z twierdzeń 3.2, 3.3 oraz z rozdziału XII, 2.8, wynika, że

4.5. *Jeżeli miara* μ *jest ośrodkowa, a przestrzeń* $\tilde{L}^2(X, \mu)$ *jest nieskończenie wymiarowa, to przestrzeń* $\tilde{L}^2(X, \mu)$ *zawiera układ ortogonalny, unormowany, liniowo gęsty, jest więc równoważna przestrzeni* $\tilde{l}^2$.

Wreszcie z § 2 (13) i (14) bezpośrednio wynika następujące twierdzenie o najlepszej aproksymacji.

4.6. *Niech* $f \in \tilde{L}^2(X, \mu)$, $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$. *Dla dowolnych liczb* $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\Big\| f - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j \Big\|_2 \leqslant \Big\| f - \sum_{j=1}^{n} a_j g_j \Big\|_2 ,$$

przy tym znak równości jest osiągany, wtedy i tylko wtedy, gdy $a_j = \alpha_j$ *dla* $j = 1, 2, \ldots, n$.

W przypadku gdy rozważamy inny rodzaj zbieżności niż zbieżność według normy $\| \ \|_2$, sytuacja staje się bardziej skomplikowana. Wyczerpujące wyjaśnienie obecnego stanu wiedzy o innych rodzajach zbieżności szeregów ortogonalnych wykracza poza ramy tej książki. W następnych paragrafach podamy jedynie kilka przykładów podstawowych układów ortogonalnych w L oraz kilka uwag o zbieżności prawie wszędzie [1]).

Czasem pojęcie ortogonalności funkcji i układu ortogonalnego bywa wprowadzane w postaci pozornie ogólniejszej od postaci rozważanej przez nas dotychczas. Ustala się mianowicie pewną funkcję φ nieujemną skończoną i mówi się, że dwie funkcje mierzalne f, g są *ortogonalne*, jeżeli

$$\int_X f \bar{g} \varphi \, d\mu = 0 . \tag{10}$$

[1]) Czytelnika, pragnącego poznać głębiej teorię szeregów ortogonalnych, odsyłamy do dzieł specjalnych, przede wszystkim do monografii Kaczmarza i Steinhausa [2]. Por. także Tricomi [1].

Następnie bada się szeregi postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n , \tag{11}$$

gdzie

$$\int_X g_n \bar{g}_m \varphi \, d\mu = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n \neq m , \\ 1, & \text{jeżeli } n = m \end{cases} \tag{12}$$

oraz

$$a_n = \int_X f \bar{g}_n \varphi \, d\mu . \tag{13}$$

Ciąg funkcji $\{g_n\}$ o własności (12) nazywa się wtedy również układem ortogonalnym unormowanym, a szereg (11) — szeregiem ortogonalnym, przy tym jeżeli spełnione są wzory (13) — rozwinięciem ortogonalnym funkcji f. Rolę przestrzeni $\tilde{L}^2(X, \mu)$ odgrywa obecnie przestrzeń $\tilde{L}^2_\varphi$ wszystkich funkcji mierzalnych f takich, że

$$\|f\|_\varphi = \int_X |f|^2 \varphi \, d\mu < \infty .$$

Wprowadzając zamiast miary μ miarę ν zdefiniowaną wzorem

$$\nu(A) = \int_A \varphi \, d\mu$$

sprawdzamy z łatwością (por. rozdział VII, 5.1), że równość (10) może być obecnie zapisana w postaci

$$\int_X f \bar{g} \, d\nu = 0 ,$$

a równość (13) w postaci

$$a_n = \int_X f \bar{g}_n \, d\nu .$$

Zatem układ $\{g_n\}$ ortogonalny w sensie definicji (12) jest ortogonalny w zwykłym sensie, jeżeli zamiast miary μ przyjąć miarę ν. Pojęcie ortogonalności dwu funkcji i rozwinięcia ortogonalnego funkcji, zdefiniowane wzorami (10), (11)-(13), pokrywa się wtedy ze zwykłym pojęciem ortogonalności funkcji i rozwinięcia ortogonalnego, a przestrzeń $\tilde{L}^2_\varphi$ jest równoważna przestrzeni $\tilde{L}^2(X, \nu)$.

Inny, jeszcze prostszy sposób sprowadzenia pojęcia ortogonalności (10) i układu ortogonalnego (12) do zwykłych definicji ortogonalności i układu ortogonalnego polega na systematycznym mnożeniu wszystkich

rozważanych funkcji przez $\sqrt{\varphi}$. Istotnie, jeżeli funkcje f i g spełniają równość (10), to funkcje

$$\hat{f} = f\sqrt{\varphi} \quad \text{i} \quad \hat{g} = g\sqrt{\varphi}$$

są ortogonalne (względem miary μ) w zwykłym sensie, tzn.

$$\int_X \hat{f}\bar{\hat{g}}\, d\mu = 0 .$$

Podobnie, jeżeli układ $\{g_n\}$ spełnia warunki (12), to układ

$$\hat{g}_n = g_n\sqrt{\varphi} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

spełnia warunki

$$\int_X \hat{g}_n\bar{\hat{g}}_m d\mu = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad n \neq m, \\ 1, & \text{gdy} \quad n = m, \end{cases}$$

tzn. jest ortogonalny i unormowany w zwykłym sensie.

ĆWICZENIA. **1.** Podzbiór A przestrzeni $\widetilde{L}^2(X, \mu)$ jest pełny w przestrzeni $\widetilde{L}^2(X, \mu)$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest liniowo gęsty.

2. Jeżeli miara μ jest ośrodkowa, to każdy zbiór pełny $A \subset \widetilde{L}^2(X, \mu)$ zawiera podzbiór pełny co najwyżej przeliczalny.

3. Niech $\{g_n\}$ będzie układem ortogonalnym unormowanym w przestrzeni $\widetilde{L}^2(X, \mu)$, a $\{h_n\}$ – układem ortogonalnym unormowanym w przestrzeni $\widetilde{L}^2(Y, \nu)$. Wówczas funkcje

$$g_n(x)h_m(y) \quad (x \in X,\ y \in Y,\ n, m = 1, 2, \ldots)$$

tworzą układ ortogonalny unormowany w przestrzeni $\widetilde{L}^2(X \times Y, \mu \times \nu)$. Układ ten jest liniowo gęsty, gdy układy $\{g_n\}$ i $\{h_n\}$ są liniowo gęste.

4. Jeżeli $g_n \in \widetilde{L}^q(X, \mu)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jest układem ortogonalnym unormowanym i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ jest zbieżny według normy $\| \ \|_p$ do pewnej funkcji $f \in \widetilde{L}^p(X, \mu)$ $(1/p + 1/q = 1)$, to $a_n = \int_X f\bar{g}_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$

5. Jeżeli $\{g_n\}$ jest układem ortogonalnym unormowanym w przestrzeni $\widetilde{L}^2(X, \mu)$ i funkcja $f \in \widetilde{L}^2(X, \mu)$ należy do domknięcia zbioru $\operatorname{lin}[g_1, g_2, \ldots]$ oraz $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$, to

$$\int_X f^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 .$$

6. Sformułować analogony twierdzeń, podanych w § 4, dla nieprzeliczalnych układów ortogonalnych funkcji.

7. *n-tym jądrem* układu ortogonalnego unormowanego $g_n \in \widetilde{L}^2(X, \mu)$ nazywamy funkcję

$$\tau_n(x, y) = g_1(x)g_1(y) + g_2(x)g_2(y) + \ldots + g_n(x)g_n(y) ,$$

określoną na produkcie $X \times X$. Sprawdzić, że n-ta suma częściowa s_n rozwinięcia funkcji f względem układu $\{g_n\}$ wyraża się wzorem

$$s_n(x) = \int_X \tau_n(x, y) f(y)\, d\mu(y) .$$

§ 5. Przykłady układów ortogonalnych. Wszystkie układy ortogonalne, rozważane w niniejszym paragrafie, składają się z funkcji rzeczywistych.

Jeśli $\{g_n\}$ jest układem ortogonalnym funkcji rzeczywistych, f_1 i f_2 są funkcjami rzeczywistymi, a $f = f_1 + if_2$ – funkcją zespoloną oraz

$$f_1 \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n , \qquad f_2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n g_n , \tag{1}$$

to

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i\beta_n) g_n . \tag{2}$$

Zbieżność szeregu (2) jest równoważna (dla rozpatrywanych zbieżności) równoczesnej zbieżności szeregów (1). Zatem w przypadku rzeczywistych układów ortogonalnych wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania rzeczywistych przestrzeni funkcyjnych.

W paragrafie niniejszym będziemy więc mówić wyłącznie o funkcjach rzeczywistych. Przy omawianiu przykładów A, B, C, D przez miarę i mierzalność rozumiemy zawsze miarę Lebesgue'a l_1 i mierzalność względem tej miary.

A) Układ trygonometryczny. Najstarszym ze znanych układów ortogonalnych unormowanych jest układ trygonometryczny w przedziale $0; 2\pi$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots \tag{3}$$

Bardziej szczegółowo omówimy własności tego układu w rozdziale XIV. Stosunkowo prosto można wykazać (por. rozdział XIV, 5.2), że istnieje funkcja ciągła okresowa, o okresie 2π, której rozwinięcie względem układu (3) jest rozbieżne w nieprzeliczalnym gęstym podzbiorze przedziału $0; 2\pi$. Zagadnienie, czy istnieje funkcja ciągła o okresie 2π, której rozwinięcie względem układu trygonometrycznego (3) jest rozbieżne w prawie każdym punkcie, jest dotychczas nierozwiązane. Wiadomo [1], że istnieje funkcja $f \in L(0; 2\pi)$, której rozwinięcie względem układu (3) jest rozbieżne w każdym punkcie przedziału $0; 2\pi$. Zagadnienie, czy rozwinięcie dowolnej funkcji $f \in L^2(0; 2\pi)$ względem układu (3) jest prawie wszędzie zbieżne do f, jest także nierozwiązane.

[1]) Kolmogoroff [1], [4].

Powyższe wzmianki dowodzą, że problem zbieżności prawie wszędzie szeregu ortogonalnego jest znacznie trudniejszy od zagadnienia zbieżności według normy $\| \|_2$.

B) **Układ Haara**[1]. Niech dla $j = 1, 2, \ldots, 2^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$h_{n,j}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad (j-1)/2^n < x \leqslant (2j-1)/2^{n+1}, \\ -1, & \text{gdy} \quad (2j-1)/2^{n+1} < x \leqslant j/2^n, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \text{ z przedziału } \overline{0;1} \end{cases}$$

oraz $h_{n,0}(0) = 1$, $h_{n,j}(0) = 0$ dla $j > 0$. Ciąg

$$\{1, h_{0,1}, h_{1,1}, h_{1,2}, h_{2,1}, h_{2,2}, h_{2,3}, h_{2,4}, h_{3,1}, \ldots\}$$

jest układem ortogonalnym nieunormowanym. Dzieląc funkcje tego ciągu przez ich normy $\| \|_2$, otrzymujemy układ ortogonalny unormowany $\{h_n\}$ funkcji określonych w przedziale $\overline{0;1}$, nazywany *układem Haara*. Mamy więc

$$h_1(x) = 1 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ -1 & \text{dla} \quad 1/2 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$h_3(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/4, \\ -\sqrt{2} & \text{dla} \quad 1/4 < x \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

$$h_4(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{dla} \quad 1/2 < x \leqslant 3/4, \\ -\sqrt{2} & \text{dla} \quad 3/4 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

$$h_5(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/8, \\ -2 & \text{dla} \quad 1/8 < x \leqslant 1/4, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

$$h_6(x) = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad 1/4 < x \leqslant 3/8, \\ -2 & \text{dla} \quad 3/8 < x \leqslant 1/2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

. . . . . .

Definicja indukcyjna układu Haara jest więc następująca.

Niech $h_1 = 1$ i niech $\mathfrak{p}_1$ oznacza podział odcinka $\overline{0;1}$, złożony jedynie z samego odcinka $\overline{0;1}$. Załóżmy, że zdefiniowana została już funkcja h_n

[1]) Haar [1].

i podział $\mathfrak{p}_n$ odcinka $\overline{0;1}$ na n przedziałów rozłącznych $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Niech $P_j \in \mathfrak{p}_n$ oznacza przedział podziału $\mathfrak{p}_n$, który leży najbardziej na lewo spośród wszystkich przedziałów $P_m \in \mathfrak{p}_n$ o największej długości. Dzielimy przedział P_j na dwie połowy: lewą P' i prawą P'', zaliczając punkt podziału do P' (co zresztą nie ma większego znaczenia), i oznaczamy

$$\mathfrak{p}_{n+1} = [P_1, P_2, \ldots, P_{j-1}, P', P'', P_{j+1}, \ldots, P_n]$$

oraz

$$h_{n+1}(x) = \begin{cases} a & \text{dla} \quad x \in P', \\ -a & \text{dla} \quad x \in P'', \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

gdzie a jest liczbą dodatnią taką, że

$$\int_0^1 h_{n+1}(x)^2 dx = a^2 |P_j| = 1, \tag{4}$$

tzn. przyjmujemy

$$a = \frac{1}{\sqrt{|P_j|}}. \tag{5}$$

Ortogonalność układu h_n wynika z uwagi, że $h_m h_n = 0$ lub ch_n dla $m < n$, gdzie c jest stałą, oraz

$$\int_0^1 h_n(x)\, dx = 0 \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

Z (4) wynika, że układ Haara jest ortogonalny unormowany.

Zauważmy, że każda funkcja schodkowa g, stała na każdym z przedziałów $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathfrak{p}_n$, jest kombinacją liniową funkcji $h_1, h_2, \ldots, h_n$, tzn.

$$g = \sum_{m=1}^{n} \xi_m h_m.$$

Inaczej mówiąc: jeżeli $a_{j,m}$ oznacza wartość funkcji h_m na przedziale P_j, a b_j — wartość funkcji g na przedziale P_j, to istnieją liczby $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ takie, że

$$\sum_{m=1}^{n} a_{j,m} \xi_m = b_j \quad \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Wystarczy w tym celu wykazać, że wyznacznik

$$d_n = \det(a_{j,m})$$

układu równań (6) jest różny od zera.

Dla $n=1$, $d_1=1$. Załóżmy, że $d_n \neq 0$. Z indukcyjnej definicji funkcji h_{n+1} wynika, że

$$d_{n+1}=\begin{vmatrix} a_{1,1}, & \dots, a_{1,n}, & 0 \\ a_{2,1}, & \dots, a_{2,n}, & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j-1,1}, & \dots, a_{j-1,n}, & 0 \\ a_{j,1}, & \dots, a_{j,n}, & a \\ a_{j,1}, & \dots, a_{j,n}, & -a \\ a_{j+1,1}, & \dots, a_{j+1,n}, & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & \dots, a_{n,n}, & 0 \end{vmatrix} = \pm 2ad_n \neq 0,$$

gdzie j i a mają to samo znaczenie, co w indukcyjnej definicji h_{n+1}.

5.1. *Rozwinięcie dowolnej funkcji całkowalnej $f \in \boldsymbol{L}$ według układu Haara jest zbieżne prawie wszędzie do funkcji f.*

Niech

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n \tag{7}$$

oraz

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j h_j . \tag{8}$$

Ustalmy na chwilę liczbę naturalną n. Z definicji

$$a_j = \int_0^1 f(x)h_j(x)\,dx = \sum_{m=1}^{n} a_{m,j} \int_{P_m} f(x)\,dx ,$$

gdzie $\mathfrak{p}_n = [P_1, P_2, \dots, P_n]$, a $a_{m,j}$ oznacza, jak poprzednio, wartość funkcji h_j na przedziale P_m. Liczby $a_{m,j}$ są niezależne od funkcji f. Jeżeli więc $g \in \boldsymbol{L}$ jest funkcją taką, że

$$\int_{P_m} g(x)\,dx = \int_{P_m} f(x)\,dx \quad \text{dla} \quad m=1,2,\dots,n , \tag{9}$$

to n-ta suma częściowa rozwinięcia funkcji g jest identyczna z n-tą sumą częściową s_n rozwinięcia funkcji f. Warunek (9) jest w szczególności spełniony przez funkcję g zdefiniowaną wzorem

$$g(x) = \frac{1}{|P_m|} \int_{P_m} f(t)\,dt \quad \text{dla} \quad x \in P_m \ (m=1,2,\dots,n) . \tag{10}$$

Zatem n-ta suma częściowa s_n rozwinięcia funkcji f (por. (8)) jest zarazem n-tą sumą częściową rozwinięcia funkcji schodkowej g. Na

mocy poprzednio dowiedzionej uwagi funkcja g jest kombinacją liniową funkcji h_j:

$$g = \sum_{j=1}^{n} a_j h_j .$$

Ponieważ $g \in \boldsymbol{L}^2$, więc z twierdzenia 4.6 o najlepszej aproksymacji (gdzie f trzeba zastąpić przez g)

$$\|g - s_n\|_2 \leqslant \Big\|g - \sum_{j=1}^{n} a_j h_j\Big\|_2 = 0 ,$$

skąd wynika, że $g(x) = s_n(x)$ prawie wszędzie. Ponieważ funkcje g i s_n są stałe w tych samych przedziałach $P_1, P_2, \dots, P_n$, więc $s_n(x) = g(x)$ dla każdego x, tzn. (por. (10))

$$s_n(x) = \frac{1}{|P_m|} \int_{P_m} f(t)\,dt = \frac{\Delta_\varphi(P_m)}{|P_m|} \quad \text{dla} \quad x \in P_m \ (m=1,2,\dots,n), \tag{11}$$

gdzie

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt .$$

Prawie w każdym punkcie $x \in \overline{0;1}$ jest $\varphi'(x) = f(x)$ (por. rozdział X, 5.4). Przechodząc w (11) do granicy, gdy $n \to \infty$, otrzymujemy, że

$$s_n(x) \to \varphi'(x) = f(x) \quad \text{prawie wszędzie, c. b. d. o.}$$

5.2. *Jeśli $f \in \boldsymbol{L}^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, to rozwinięcie funkcji f względem układu Haara jest zbieżne do f w przestrzeni $\boldsymbol{L}^p$.*

Niech T_n będzie operacją przyporządkowującą dowolnej funkcji $f \in L^p$ jej n-tą sumę częściową $s_n = T_n(f)$ rozwinięcia względem układu Haara. Ponieważ s_n jest funkcją ograniczoną, T_n odwzorowuje $\boldsymbol{L}^p$ w $\boldsymbol{L}^p$. Addytywność operacji T_n jest oczywista. Z wzoru (11) wynika, że

$$\|T_n(f)\|_p = \|s_n\|_p = \Big(\sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{1}{|P_m|}\Big|\int_{P_m} f(x)\,dx\Big|\Big)^p \cdot |P_m|\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{|P_m|^{p-1}} \Big(\int_{P_m} |f(x)|\,dx\Big)^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{m=1}^{n} \int_{P_m} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} = \|f\|_p ,$$

ponieważ

$$\int_{P_m} |f(x)|\,dx = \int_{P_m} |f(x)| \cdot 1 \cdot dx \leqslant \Big(\int_{P_m} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} \cdot |P_m|^{1-1/p}$$

z nierówności Höldera (rozdział XII, 2.1; por. także rozdział XII, 2.11, (16)). Operacja T_n jest więc liniowa o normie $\leqslant 1$ (podstawiając za f funkcję równą tożsamościowo 1 stwierdzamy, że $\|T_n\| = 1$).

Jeśli f jest funkcją mierzalną ograniczoną, to $T_n(f)\to f$ w L^p dla $n\to\infty$. Istotnie, jeżeli $|f|\leqslant M$, to z (11) wynika, że także $|s_n|=|T_n(f)|\leqslant M$, więc $|s_n-f|^p\leqslant(2M)^p$. Ponieważ $s_n\to f$ prawie wszędzie na mocy 5.1, więc (por. rozdział VII, 3.6)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|s_n(x)-f(x)|^p\,dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}|s_n(x)-f(x)|^p\,dx=0\,,$$

tzn. $s_n=T_n(f)\to f$ w L^p.

Ponieważ ciąg norm $\{\|T_n\|\}$ jest ograniczony i ponieważ ciąg $\{T_n\}$ operacji liniowych jest zbieżny na gęstym (por. rozdział XII, 2.10) podzbiorze przestrzeni L^p, złożonym z funkcji mierzalnych ograniczonych, więc na mocy rozdziału XII, 4.6, ciąg $\{T_n\}$ jest zbieżny na L^p do pewnej operacji liniowej T:

$$\|T_n(f)-T(f)\|_p\to 0\,.$$

Jeżeli f jest funkcją ograniczoną, to, jak zauważyliśmy powyżej, $T(f)=f$. Zatem, wobec gęstości podzbioru funkcji ograniczonych, $T(f)=f$ dla każdego $f\in L^p$, a więc

$$s_n\to f \quad \text{w } L^p \text{ dla każdego } f\in L^p, \text{ c. b. d. o.}$$

Układ Haara jest pełny w L (a więc tym bardziej w L^p i w C, gdyż $C\subset L$ i $L^p\subset L$, $1\leqslant p\leqslant\infty$). Istotnie, jeżeli funkcja całkowalna f jest ortogonalna do każdej funkcji h_n, $n=1,2,\ldots$, to rozwinięcie funkcji f względem h_n jest tożsamościowo równe zeru. Stąd oraz z 5.1 (lub 5.2) wynika, że $f=0$ prawie wszędzie.

Układ Haara jest liniowo gęsty w L^p $(1\leqslant p<\infty)$, co natychmiast wynika z uwagi, że każda funkcja stała na przedziałach podziału $\mathfrak{p}_n$ jest kombinacją liniową funkcji $h_1,h_2,\ldots,h_n$ oraz że zbiór funkcji stałych na przedziałach podziałów $\mathfrak{p}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ jest gęsty w L^p (dowód ostatniej uwagi jest podobny do dowodu twierdzenia 2.10 (i) z rozdziału XII i twierdzenia 4.6 z rozdziału XI).

5.3. *Rozwinięcie dowolnej funkcji ciągłej $f\in C$ według układu Haara jest zbieżne jednostajnie do funkcji f.*

Z wzoru (11) oraz z twierdzenia o wartości średniej wynika, że

$$s_n(x)=f(\xi_{n,x}) \quad \text{dla} \quad x\in P_m\,, \quad \text{gdzie} \quad \xi_{n,x}\in P_m\,. \tag{12}$$

Niech dla danej liczby $\varepsilon>0$ liczba $\delta>0$ będzie taka, że nierówność $|x-\xi|<\delta$ pociąga za sobą $|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$. Niech n_0 będzie taką liczbą, że $\mathrm{d}(P_m)=|P_m|<\delta$ dla $P_m\in\mathfrak{p}_n$ i $n>n_0$. W rezultacie na mocy (12)

$$|s_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \text{dla} \quad n>n_0 \text{ i dowolnego } x\in\overline{0;1},\ \text{c. b. d. o.}$$

C) Układ Franklina [1]. Funkcje układu Haara są nieciągłe. Można jednak podać przykład układu ortogonalnego unormowanego funkcji ciągłych, dla którego twierdzenie 5.3 pozostanie nadal prawdziwe.

Niech a_n oznacza n-ty wyraz ciągu

$$\{0,\ 1,\ 1/2,\ 1/4,\ 3/4,\ 1/8,\ 3/8,\ 5/8,\ 7/8,\ 1/16,\ 3/16,\ \ldots\}$$

i niech

$$f_1(x)=1, \quad f_2(x)=x \quad \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\,,$$

a dla $n>2$

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad 0\leqslant x<a_n\,,\\ x-a_n & \text{dla} \quad a_n\leqslant x\leqslant 1\,.\end{cases}$$

Można z łatwością sprawdzić, że $\{f_n\}$ jest ciągiem funkcji ciągłych, liniowo niezależnych. Ortogonalizując ciąg $\{f_n\}$ metodą Schmidta (3.1) otrzymujemy układ ortogonalny $\{g_n\}$, o którym można dowieść [1], że rozwinięcie dowolnej funkcji $f\in C$ względem tego układu jest zbieżne jednostajnie do f. Układ $\{g_n\}$ nosi nazwę *układu Franklina*.

D) Układ Rademachera [2]. Układ ten tworzą funkcje $\{r_n\}$, określone w przedziale $\overline{0;1}$ następującymi wzorami:

$$r_n(0)=1, \quad r_n(x)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad \dfrac{k-1}{2^n}<x\leqslant\dfrac{k}{2^n}\,,\\ & \text{gdy } k \text{ jest liczbą nieparzystą,}\\ -1 & \text{dla} \quad \dfrac{k-1}{2^n}<x\leqslant\dfrac{k}{2^n}\,,\\ & \text{gdy } k \text{ jest liczbą parzystą,}\end{cases} \tag{13}$$

gdzie $k=1,2,\ldots,2^n$ $(n=1,2,\ldots)$. Zatem w celu skonstruowania n-tej funkcji Rademachera r_n dzielimy przedział $\overline{0;1}$ na 2^n równych części i w otrzymanych przedziałach kładziemy $r_n(x)$ na przemian równe 1 i -1. Pomijając przeliczalną mnogość punktów postaci $x=k/2^n$ otrzymujemy

$$r_n(x)=\operatorname{sign}\sin 2^n\pi x \quad \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1\,. \tag{14}$$

Z definicji bezpośrednio wynika, że $\{r_n\}$ jest układem ortogonalnym unormowanym.

Układ Rademachera nie jest liniowo gęsty ani pełny w żadnej z przestrzeni C, L^p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, odgrywa jednak dosyć dużą rolę jako środek dowodowy w różnych zagadnieniach (por. np. twierdzenie 6.5). Układ Rademachera ściśle wiąże się z układem Haara, mianowicie

$$r_n=\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\,(h_{2^{n-1}+1}+h_{2^{n-1}+2}+\ldots+h_{2^n})\,, \tag{15}$$

[1] Franklin [1].
[2] Rademacher [1].

gdyż nawias po prawej stronie wzoru (15) zawiera wszystkie funkcje Haara h_j takie, że długość przedziału $[x\colon h_j(x) \neq 0]$ wynosi $1/2^{n-1}$, zaś w przedziale $[x\colon h_j(x) \neq 0]$ funkcja h_j przyjmuje wartości $\pm\sqrt{2^{n-1}}$, ponieważ $\int_0^1 h_j^2\,dx = 1$.

Następujące podstawowe twierdzenia (5.4-5.8) o układzie Rademachera udowodnimy przy upraszczającym założeniu, że współczynniki a_n są rzeczywiste. Twierdzenia te są jednak prawdziwe również w przypadku współczynników a_n zespolonych. W przypadku twierdzeń 5.4 i 5.5 można się o tym przekonać rozkładając szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ na część rzeczywistą i urojoną. Przeprowadzenie niewielkich koniecznych modyfikacji w dowodzie twierdzenia 5.6 w przypadku współczynników zespolonych pozostawiamy czytelnikowi. W przypadku zespolonym w twierdzeniach 5.7 i 5.8 trzeba zastąpić $\boldsymbol{L}^p$ i $\boldsymbol{L}^q$ przez $\tilde{\boldsymbol{L}}^p$ i $\tilde{\boldsymbol{L}}^q$.

5.4 (Twierdzenie Rademachera). *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, *to szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x) \tag{16}$$

jest zbieżny prawie wszędzie w przedziale $\overline{0;1}$.

Wyrażając funkcje r_n przez funkcje Haara h_n możemy szereg (16) napisać w postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2^{n-1}}}\,(h_{2^{n-1}+1} + \ldots + h_{2^n})\,. \tag{17}$$

Otwierając nawiasy po prawej stronie (17) i porządkując wyrazy według numerów funkcji h_n otrzymujemy szereg ortogonalny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n\,, \tag{18}$$

przy tym

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\,.$$

Z twierdzenia Riesza-Fischera 4.1 wynika, że szereg (18) jest rozwinięciem pewnej funkcji $f \in L^2 \subset \boldsymbol{L}$ według układu $\{h_n\}$. Z twierdzenia 5.1 wynika, że szereg (18) jest prawie wszędzie zbieżny do f. Ponieważ ciąg sum cząstkowych szeregu (16), tzn. szeregu (17), jest podciągiem ciągu

sum cząstkowych szeregu (18), wnioskujemy stąd, że szereg (16) jest prawie wszędzie zbieżny do $f(x)$.

Odwrócenie twierdzenia 5.4 jest również prawdziwe:

5.5 (Twierdzenie Kołmogorowa). *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$, *to szereg* (16) *jest rozbieżny prawie wszędzie w przedziale* $0;1$.

Przypuśćmy, że szereg (16) jest zbieżny do funkcji skończonej na pewnym zbiorze A miary dodatniej. Z twierdzenia Jegorowa (rozdział VI, 6.1) wynika, że na pewnym zbiorze $F \subset A$ o mierze dodatniej ciąg $\{s_n\}$ sum częściowych szeregu (16) jest zbieżny jednostajnie. Istnieje więc liczba naturalna n_0 taka, że

$$|s_m(x) - s_n(x)| < 1 \quad \text{dla} \quad m > n > n_0 \text{ i } x \in F\,.$$

Zatem

$$|F| \geqslant \int_F |s_m(x) - s_n(x)|^2\,dx = |F| \sum_{j=n+1}^{m} a_j + 2 \sum_{n<j<k\leqslant m} a_j a_k \int_F r_j(x) r_k(x)\,dx \tag{19}$$

dla $m > n > n_0$. Z definicji funkcji Rademachera wynika bezpośrednio, że iloczyny

$$r_j(x) r_k(x) \qquad (j < k) \tag{20}$$

tworzą układ ortogonalny unormowany. Liczby $\int_F r_j(x) r_k(x)\,dx$ są współczynnikami rozwinięcia funkcji charakterystycznej χ_F względem układu (20). Szereg kwadratów tych współczynników jest zbieżny (por. 4.2), a więc istnieje taka liczba $n > n_0$, że

$$\sum_{n<j<k\leqslant m} \left(\int_F r_j(x) r_k(x)\,dx \right)^2 < \frac{|F|^2}{9} \quad \text{dla} \quad m > n\,.$$

Stosując nierówność Cauchy'ego dla $m > n$ otrzymujemy

$$\left| \sum_{n<j<k\leqslant m} a_j a_k \int_F r_j(x) r_k(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{n<j<k\leqslant m} \left(\int_F r_j(x) r_k(x)\,dx \right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{n<j<k\leqslant m} (a_j a_k)^2} \leqslant \frac{|F|}{3} \sum_{j=n+1}^{m} |a_j|^2\,.$$

Stąd oraz z (19) wynika, że dla $m > n$

$$|F| \geqslant |F| \left(1 - \tfrac{2}{3}\right) \sum_{j=n+1}^{m} |a_j|^2\,,$$

a więc

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^2 \leqslant 3\,,$$

co dowodzi zbieżności szeregu $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2$.

Ortogonalność funkcji (20) jest szczególnym przypadkiem następującej własności układu Rademachera: jeżeli $n_1, n_2, \ldots, n_k$ są różnymi liczbami naturalnymi, a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi, to

$$(21)\qquad \int_0^1 r_{n_1}^{\alpha_1}(x) r_{n_2}^{\alpha_2}(x) \cdot \ldots \cdot r_{n_k}^{\alpha_n}(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{gdy wszystkie liczby } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \\ & \text{są parzyste,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Własność (21) wynika bezpośrednio z uwagi, że

$$r_n^{\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \alpha \text{ jest liczbą parzystą,} \\ r_n(x), & \text{gdy } \alpha \text{ jest liczbą nieparzystą,} \end{cases}$$

oraz z uwagi, że

$$\int_0^1 r_{n_1}(x) r_{n_2}(x) \cdot \ldots \cdot r_{n_k}(x)\,dx = 0\,,$$

gdy liczby naturalne $n_1, \ldots, n_k$ są różne od siebie.

5.6 (Nierówność Chinczyna) [1]. *Jeżeli* $1 \leqslant p < \infty$, *to*

$$(22)\qquad \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j \Big\|_p \leqslant \sqrt{\frac{p}{2}+1} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

dla dowolnego ciągu liczb $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Niech $g = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j$. Niech m będzie taką liczbą naturalną, że

$$(23)\qquad 2m-2 < p \leqslant 2m\,.$$

Rozwijając potęgę $g(x)^{2m}$ według wzoru Newtona i całkując w przedziale $0;1$ otrzymujemy na mocy (21)

$$(\|g\|_{2m})^{2m} = \int_0^1 g(x)^{2m}\,dx = \sum \frac{(2m)!}{(2\beta_1)!\,(2\beta_2)!\ldots(2\beta_n)!}\, a_1^{2\beta_1} \cdot a_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{2\beta_n},$$

[1]) Kchintchine [1].

gdzie sumowanie rozciąga się na wszelkie ciągi liczb całkowitych nieujemnych $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ takie, że $m = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$. Ponieważ

$$\frac{(2m)!}{(2\beta_1)!\,(2\beta_2)!\ldots(2\beta_n)!} \leqslant m^m \cdot \frac{m!}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!}$$

oraz

$$\sum \frac{m!}{\beta_1!\,\beta_2!\ldots\beta_n!}\, a_1^{2\beta_1} a_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{2\beta_n} = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^m\,,$$

więc

$$\|g\|_{2m} \leqslant \sqrt{m} \cdot \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\,.$$

Z (23) wynika, że $\|g\|_p \leqslant \|g\|_{2m}$ (por. rozdział XII, 2.11, (16)) i $m < p/2+1$, co wraz z poprzednio udowodnioną nierównością daje oszacowanie (22).

Następujące twierdzenie jest wzmocnieniem twierdzenia Rademachera 5.4.

5.7. *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ *jest zbieżny prawie wszędzie i według normy* $\|\ \|_p$ *(przy dowolnym* p, $1 \leqslant p < \infty$*) do pewnej funkcji, należącej do wszystkich przestrzeni* L^p *(*$1 \leqslant p < \infty$*). Ponadto*

$$(24)\qquad \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \Big\|_p \leqslant \sqrt{\frac{p}{2}+1} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$$

(nierówność Paleya-Zygmunda) [1]).

Istotnie, z twierdzenia Rademachera 5.4 wynika, że szereg (16) jest zbieżny prawie wszędzie do pewnej funkcji f. Szereg (16) spełnia także warunek Cauchy'ego w przestrzeni L^p, gdyż na mocy (22)

$$\Big\| \sum_{j=m}^{n} a_j r_j \Big\|_p \leqslant \sqrt{\frac{p}{2}+1} \cdot \sqrt{\sum_{j=m}^{n} |a_j|^2} \qquad (n \geqslant m).$$

Szereg (16) jest więc zbieżny w L^p do pewnej funkcji $f_p \in L^p$. Funkcje f i f_p są prawie wszędzie równe, gdyż pewien podciąg ciągu sum częściowych szeregu (16) jest prawie wszędzie zbieżny do f_p (por. rozdział XII, 2.5). Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n = f$ w L^p.

Nierówność (24) wynika bezpośrednio z (22) przez przejście do granicy dla $n \to \infty$, gdyż norma $\|\ \|_p$ jest funkcją ciągłą na L^p (por. rozdział XII, 1.1).

[1]) Paley i Zygmund [1]. Por. także Orlicz [8].

5.8. *Jeżeli* $f \in L^q$ $(1 < q \leqslant \infty)$, $f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$, *to*

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2} \leqslant \sqrt{\frac{3q-2}{2q-2}} \cdot \|f\|_q \quad \textit{(nierówność Kaczmarza)} \ [1]. \tag{25}$$

Niech $1/p + 1/q = 1$. Z nierówności Höldera i z nierówności Chinczyna wynika, że

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \int_0^1 f(x) \sum_{j=1}^{n} a_j r_j(x)\, dx \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j \right\|_p \cdot \|f\|_q \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{p}{2}+1} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \cdot \|f\|_q .$$

Wyrażając p przez q, dzieląc przez $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$ i przechodząc do granicy dla $n \to \infty$, otrzymujemy (25).

E) Wielomiany ortogonalne. Niech $Z \subset \mathcal{R}$ będzie przedziałem ograniczonym lub nieograniczonym i niech ν będzie miarą, określoną na pewnym przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru Z, taką, że

(26) miara ν nie jest skoncentrowana na zbiorze skończonym (tzn. nie istnieje zbiór skończony $A_0 \in \mathfrak{M}$ taki, że $\nu(Z - A_0) = 0$),

(27) funkcje $f_1(x) = 1$, $f_{n+1}(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, określone na Z, są całkowalne na Z względem miary ν.

Warunek (27) jest w szczególności spełniony, gdy Z jest przedziałem ograniczonym, ν jest miarą skończoną i $\mathfrak{B}(Z) \subset \mathfrak{M}$.

Z (26) wynika, że funkcje $f_1, f_2, f_3, \ldots$ są liniowo niezależne w $L^2(Z, \nu)$. Gdyby bowiem

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0 \quad \text{w} \quad L^2(Z, \nu),$$

to równość

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1} = 0$$

zachodziłaby prawie wszędzie w Z, a więc w pewnym zbiorze nieskończonym, co jest możliwe tylko w przypadku $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, gdyż każdy niezerowy wielomian posiada skończoną liczbę pierwiastków.

Ortogonalizując ciąg $\{f_n\}$ metodą Schmidta (twierdzenie 3.1) otrzymujemy układ $\{g_n\}$ ortogonalny unormowany (względem miary ν), tzn.

$$\int_Z g_n g_m \, d\nu = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad n = m, \\ 0, & \text{gdy} \quad n \neq m. \end{cases}$$

[1] Kaczmarz i Steinhaus [1].

Z 3.1, (1) wynika, że g_n jest wielomianem stopnia $n-1$.

Specjalizując miarę ν i przedział Z otrzymujemy w ten sposób różne układy wielomianów ortogonalnych [1]. W zastosowaniach największą rolę odgrywa przypadek, gdy miara ν jest bezwzględnie ciągła względem miary Lebesgue'a l_1, tzn. $\nu(A) = \int_A \varphi(x)\, dx$, gdzie φ jest funkcją nieujemną, całkowalną na Z względem l_1 (por. uwagi na końcu § 4). Tak na przykład przyjmując

$$Z = \overline{-1; 1}, \quad \varphi = 1$$

otrzymujemy układ

$$g_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, V_n(x) \qquad (n \geqslant 0),$$

gdzie

$$V_0(x) = 1 \quad \text{i} \quad V_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad \text{dla} \quad n > 0.$$

Wielomiany V_n noszą nazwę *wielomianów Legendre'a*.

Przyjmując

$$Z = \overline{-1; 1} \quad \text{oraz} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

otrzymujemy układ

$$g_{n+1}(x) = \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}\, W_n(x) \qquad (n \geqslant 0),$$

gdzie $W_0(x) = 1$ i dla $n > 0$

$$W_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots \right).$$

Wielomiany W_n noszą nazwę *wielomianów Czebyszewa*.

Przyjmując

$$Z = \mathcal{R} \quad \text{i} \quad \varphi(x) = e^{-x^2}$$

otrzymujemy układ

$$g_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}\sqrt{\pi}}\, H_n(x) \qquad (n \geqslant 0),$$

gdzie

$$H_0(x) = 1 \quad \text{i} \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad \text{dla} \quad n > 0.$$

[1] Bliższe informacje o wielomianach ortogonalnych znajdzie czytelnik w dziełach specjalnych, przede wszystkim o monorgafii Szegö [1]. Por. także Tricomi [1].

Wielomiany H_n noszą nazwę *wielomianów Hermite'a*.

Zaznaczyć należy, że w przypadku gdy Z jest przedziałem domkniętym, a ν — miarą skończoną, wielomiany ortogonalne $\{g_n\}$ nigdy nie posiadają własności przysługującej układowi Franklina. Mianowicie dla każdej miary skończonej ν istnieje funkcja ciągła $f \in C(Z)$, której rozwinięcie ortogonalne względem $\{g_n\}$ jest rozbieżne w pewnym punkcie [1]).

ĆWICZENIA. **1.** Udowodnić, że jądra układu Haara (por. § 4, ćwiczenie 7)

$$\tau_n(x, y) = h_1(x)h_1(y) + h_2(x)h_2(y) + \ldots + h_n(x)h_n(y)$$

są nieujemne oraz $\int_0^1 \tau_n(x, y)\,dy = 1$.

2. Układ Haara można skonstruować oczywiście nie tylko dla przedziału $\overline{0; 1}$, lecz także dla dowolnego przedziału $P \subset \mathcal{R}$. Niech, przy ustalonym $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\{h_{m,n}\}$ będzie układem Haara dla przedziału $\overline{m; m+1}$. Rozszerzmy funkcje $h_{m,n}$ na całą prostą $\mathcal{R}$, przyjmując $h_{m,n}(x) = 0$ dla $x \notin \overline{m; m+1}$. Ciąg

$$\{h_{0,1}, h_{-1,1}, h_{0,2}, h_{1,1}, h_{-2,1}, h_{-1,2}, h_{0,3}, h_{1,2}, h_{2,1}, h_{-3,1}, \ldots\}$$

jest układem ortogonalnym unormowanym, określonym na prostej $\mathcal{R}$. Udowodnić, że układ ten posiada te same własności co układ Haara $\{h_n\}$ na odcinku $\overline{0; 1}$.

3. Niech $[w_1, w_2, \ldots]$ będzie podzbiorem przeliczalnym, gęstym przedziału $\overline{0; 1}$, przy tym $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ i $w_n \neq w_m$ dla $n \neq m$. Niech $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, a dla $n > 2$ niech f_n będzie funkcją ciągłą, liniową w każdym z przedziałów, na które przedział $\overline{0; 1}$ został podzielony przez punkty $w_1, w_2, \ldots, w_n$, przy tym $f_n(w_j) = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n-1$ i $f_n(w_n) = 1$. Ciąg funkcji $\{f_n\}$, określonych w przedziale $\overline{0; 1}$, posiada następujące własności:

(α) Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f \in C$, to dla $n = 1, 2, \ldots$

$$(*) \qquad c_1 f_1(w_n) + c_2 f_2(w_n) + \ldots + c_n f_n(w_n) = f(w_n)\,.$$

Zatem ciąg współczynników liczbowych $\{c_n\}$ jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcję f, a n-ta suma częściowa ($n > 1$) szeregu jest funkcją ciągłą, liniową w każdym z przedziałów, na które punkty $w_1, w_2, \ldots, w_n$ podzieliły przedział $\overline{0; 1}$, przyjmującą w tych punktach te same wartości, co funkcja f.

(β) Na odwrót, jeżeli współczynniki liczbowe c_n zdefiniować tak, by zachodziły wzory $(*)$ dla $n = 1, 2, \ldots$, gdzie $f \in C$ jest daną funkcją ciągłą, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ jest jednostajnie zbieżny do f.

Zatem każda funkcja $f \in C$ daje się przedstawić w dokładnie jeden sposób jako suma jednostajnie zbieżnego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$.

Uwaga. Ciąg $\{f_n\}$ nosi nazwę *bazy Schaudera* [2]). Ogólniej: *bazą* przestrzeni Banacha E nazywamy ciąg $\{u_n\}$ elementów tej przestrzeni taki, że każdy element $u \in E$ daje się dokładnie w jeden sposób przedstawić jako suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$ zbieżnego w E według normy. Oczywiście każda przestrzeń Banacha, posiadająca bazę, jest ośrodkowa. Zagadnienie, czy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha posiada bazę, jest dotychczas nierozstrzygnięte.

[1]) Nikołajew [1].

[2]) Schauder [1].

4. Jeżeli w ćwiczeniu 3 jako $\{w_n\}$ przyjmiemy ciąg podany w przykładzie C, to ortogonalizując bazę Schaudera $\{f_n\}$ otrzymujemy ponownie układ ortogonalny Franklina.

5. Iloczyny

$$r_{j_1} r_{j_2} \cdot \ldots \cdot r_{j_n}, \qquad (j_1 < j_2 < \ldots < j_n,\ n = 1, 2, \ldots)$$

funkcji Rademachera r_n tworzą wraz z funkcją $r_0 = 1$ układ ortogonalny unormowany, tzw. *układ Walsha* [1]). Dokładniej, *n-tą funkcją* układu Walsha ($n > 1$) nazywamy funkcję

$$\omega_n = r_{k_1+1} \cdot r_{k_2+1} \cdot \ldots \cdot r_{k_m},$$

gdzie $0 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ jest takim ciągiem liczb całkowitych, że $n - 1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$. Pierwszą funkcją ω_1 układu Walsha jest funkcja równa tożsamościowo jedności w przedziale $\overline{0; 1}$.

Udowodnić, że:

(α) Funkcje $\omega_{2^{m-1}+1}, \omega_{2^{m-1}+2}, \ldots, \omega_{2^m}$ są kombinacjami liniowymi funkcji Haara $h_{2^{m-1}+1}, h_{2^{m-1}+2}, \ldots, h_{2^m}$ i na odwrót ($m = 0, 1, \ldots$).

(β) 2^m-ta suma częściowa rozwinięcia funkcji $f \in L$ względem układu Walsha równa się 2^m-tej sumie częściowej rozwinięcia funkcji f względem układu Haara.

(γ) Dla dowolnej funkcji $f \in L$ o rozwinięciu

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n$$

mamy prawie wszędzie

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{2^m} a_n \omega_n(x) = f(x)\,.$$

(δ) Układ Walsha jest pełny i liniowo gęsty we wszystkich przestrzeniach L^p ($1 \leqslant p < \infty$).

6. Jeżeli funkcja $f \in L$ jest ortogonalna do każdej funkcji g ortogonalnej do wszystkich funkcji r_n ($n = 1, 2, \ldots$) oraz

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n\,,$$

to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ oraz $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ prawie wszędzie.

[1]) Walsh [1].

(Wsk.: n-ta suma częściowa szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ równa się 2^{n+1}-szej sumie częściowej rozwinięcia funkcji f względem układu Walsha, a więc także względem układu Haara — por. ćwiczenie 5 (β). Skorzystać z twierdzeń 5.1 i 5.5.)

Uwaga. Można udowodnić, że jeśli funkcja f jest ponadto ograniczona, to $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Na odwrót, można wykazać, że dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{a_n\}$, jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ (jeśli $a_n \to 0$), to istnieje funkcja $f \in \boldsymbol{C}$ (funkcja $f \in \boldsymbol{L}$) taka, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ jest rozwinięciem funkcji f [1]).

7. Dla każdej liczby p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ istnieje stała α_p taka, że

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \leqslant \alpha_p \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j \right\|_p$$

dla dowolnego ciągu liczb $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

(Wsk.: W przypadku $p > 1$ jest to bezpośredni wniosek z twierdzenia 5.8. W przypadku $p = 1$ zastosować nierówność Höldera z wykładnikami 3/2 i 3 do tożsamości

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \int_0^1 |g(x)|^{2/3} |g(x)|^{4/3} dx \qquad \left(g = \sum_{j=1}^{n} a_j r_j\right),$$

a następnie nierówność Chinczyna podobnie jak w dowodzie twierdzenia 5.8.)

8. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny bezwarunkowo w $\boldsymbol{L}^p(X, \mu)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, to ciąg norm $\left\| \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2} \right\|_p$ jest ograniczony i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)^2$ jest prawie wszędzie zbieżny [2]).

(Wsk.: Z ćwiczenia 6, § 10, rozdział XII, wynika, że istnieje stała $\alpha < \infty$ taka, że $\int_X \left| \sum_{j=1}^{n} f_j(x) r_j(t) \right|^p d\mu(x) < \alpha$. W nierówności podanej w ćwiczeniu 7 podstawić $a_n = f_n(x)$ i scałkować względem x. Po prawej stronie zmienić kolejność całkowania.)

9. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w $\boldsymbol{L}^2(X, \mu)$, to $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2^2 < \infty$.

(Wsk.: Podstawić $p = 2$ w ćwiczeniu 8.)

Uwaga. Można udowodnić [3]), że — ogólniej — bezwarunkowa zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ w $\boldsymbol{L}^p(X, \mu)$ pociąga za sobą nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^s < \infty, \quad \text{gdy} \quad 1 \leqslant p \leqslant 2,$$

[1]) Kaczmarz i Steinhaus [1]. Por. także Banach [4].
[2]) Orlicz [5].
[3]) Orlicz [5] i [6].

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p^p < \infty, \quad \text{gdy} \quad 2 \leqslant p < \infty.$$

10. Na to, by szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ był zbieżny dla każdego punktu x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, potrzeba i wystarcza, by $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ [1]).

§ 6. Zbieżność prawie wszędzie szeregów ortogonalnych.

Niech μ będzie miarą, określoną na przeliczalnie addytywnym ciele $\mathfrak{M}$ pewnej przestrzeni X.

Podobnie jak w § 4, rozważać będziemy funkcje o wartościach zespolonych i przestrzeń zespoloną $\tilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$. Aby otrzymać analogiczne twierdzenia o funkcjach rzeczywistych i przestrzeni $\boldsymbol{L}^2(X, \mu)$, wystarczy wszędzie opuścić znak $\sim$ i ograniczyć się do ciągów $\{a_n\}$ współczynników rzeczywistych.

$\{g_n\}$ oznacza stale pewien — na ogół zespolony — układ ortogonalny unormowany, określony na X.

Z twierdzenia 4.1 (ii) natychmiast wynika, że (por. rozdział XII, 2.5)

6.1. *Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty, \tag{1}$$

to szereg ortogonalny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \tag{2}$$

(tzn. ciąg sum częściowych $s_n = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_n g_n$) jest zbieżny według miary μ do funkcji $f \in \tilde{\boldsymbol{L}}^2(X, \mu)$, która jest sumą szeregu (2) *według normy $\| \ \|_2$. Istnieje więc ciąg rosnący liczb naturalnych $\{m_n\}$ taki, że $s_{m_n}(x) \to f(x)$ prawie wszędzie.*

W rezultacie

6.2. *Jeżeli spełniony jest warunek* (1) *i szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) \tag{3}$$

jest zbieżny w każdym punkcie x pewnego zbioru mierzalnego A, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x) = f(x) \quad \text{dla prawie każdego } x \in A,$$

gdzie f oznacza sumę szeregu (2) *według normy $\| \ \|_2$.*

[1]) Kaczmarz i Steinhaus [1].

Można natomiast podać przykłady ciągów $\{a_n\}$, spełniających warunek (1), i układów ortogonalnych unormowanych $g_n \in L^2$ takich, że szereg (3) jest rozbieżny prawie wszędzie [1]).

Można udowodnić [2]), że dla każdego układu ortogonalnego unormowanego $\{g_n\}$ istnieje ciąg rosnący liczb naturalnych $\{m_n\}$ taki, że dla każdego szeregu (1) podciąg $\{s_{m_n}\}$ ciągu $\{s_n\}$ sum częściowych szeregu (2) jest zbieżny prawie wszędzie [3]). Dla różnych układów ortogonalnych $\{g_n\}$ takie uniwersalne ciągi $\{m_n\}$ mogą być różne. Na przykład dla układu Haara wystarczy przyjąć $m_n = n$ (por. 5.1). Dla układu trygonometrycznego wystarczy przyjąć $m_n = 2^n$ (por. rozdział XIV, 8.7). Zastępując warunek (1) przez pewne warunki silniejsze, można znaleźć ciąg uniwersalny $\{m_n\}$ dobry dla wszystkich układów ortogonalnych. Na przykład

6.3. *Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \log n < \infty \tag{4}$$

i $f \in \widetilde{L}^2(X, \mu)$ *jest sumą szeregu* (2) *według normy* $\| \ \|_2$, *to ciąg*

$$s_{2^n}(x) = \sum_{j=1}^{2^n} a_j g_j(x)$$

jest zbieżny prawie wszędzie do $f(x)$ [4]).

Załóżmy, że warunek (4) jest spełniony. Niech

$$b_n = \sum_{j=2^n+1}^{\infty} |a_j|^2 = \int_X |f - s_{2^n}|^2 .$$

Z definicji

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1(|a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2) + 2(|a_5|^2 + \ldots + |a_8|^2) + 3(|a_9|^2 + \ldots + |a_{16}|^2) + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \log_2 2 \cdot |a_2|^2 + \log_2 3 \cdot |a_3|^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \log_2 n =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \log n < \infty .$$

[1]) Menchoff [2].

[2]) Marcinkiewicz [1].

[3]) Twierdzenie to nie jest prawdziwe, jeżeli założenie (1), tzn. założenie, że $\{a_n\}$ są współczynnikami rozwinięcia pewnej funkcji o kwadracie całkowalnym, zastąpić założeniem, że $\{a_n\}$ są współczynnikami rozwinięcia pewnej funkcji całkowalnej w p-tej potędze, $p \neq 2$. Por. Orlicz [7].

[4]) Por. Rademacher [1], Kaczmarz [2].

W rezultacie (por. rozdział VII, 3.4) $\lim_{n\to\infty} |f(x) - s_{2^n}(x)|^2 = 0$ prawie wszędzie, tzn. $s_{2^n}(x) \to f(x)$ prawie wszędzie.

Zastępując warunek (1) przez pewien warunek silniejszy od (4) możemy zapewnić zbieżność prawie wszędzie szeregu ortogonalnego (3) (por. twierdzenie 6.5). Dowód tej uwagi poprzedzimy następującym oszacowaniem:

6.4 [1]). *Jeśli* $h_1, \ldots, h_k \in \widetilde{L}^2(X, \mu)$ *oraz*

$$\int_X h_n \overline{h_m} \, d\mu \begin{cases} = 0, & gdy \quad n \neq m , \\ \leqslant 1, & gdy \quad n = m , \end{cases} \tag{5}$$

to dla dowolnego ciągu liczb zespolonych $c_1, \ldots, c_k$

$$\int_X \left(\max_{1 \leqslant k' \leqslant k} \left| \sum_{j=1}^{k'} c_j h_j(x) \right| \right)^2 d\mu(x) \leqslant \left(\frac{\log 2k}{\log 2} \right)^2 \sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 \tag{6}$$

oraz

$$\int_X \left(\max_{1 \leqslant k' \leqslant k'' \leqslant k} \left| \sum_{j=k'}^{k''} c_j h_j(x) \right| \right)^2 d\mu(x) \leqslant \left(\frac{2 \log 2k}{\log 2} \right)^2 \sum_{j=1}^{k} |c_j|^2 . \tag{7}$$

Niech m będzie taką liczbą naturalną, że $2^{m-1} \leqslant k < 2^m$. Z definicji

$$m \leqslant \frac{\log 2k}{\log 2} . \tag{8}$$

Przyjmijmy $c_j = 0$ dla $k < j \leqslant 2^m$ oraz $h_j = 0$ dla $k < j \leqslant 2^m$. Funkcje h_j $(j = 1, \ldots, 2^m)$ nadal spełniają warunki (5).

Podzielmy przedział $\langle 0; 2^m \rangle$ na 2^j przedziałów rozłącznych prawostronnie domkniętych o długości 2^{m-j}

$$P_{j,1}, \ldots, P_{j,2^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) .$$

Niech

$$\varphi_{j,n} = \sum_{q \in P_{j,n}} c_q h_q ,$$

gdzie q przebiega oczywiście tylko liczby naturalne. Niech

$$\varphi(x) = m \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=1}^{2^j} |\varphi_{j,n}(x)|^2 .$$

[1]) Rademacher [1], Orlicz [2]. Por. także Kaczmarz [2].

Z (5) wynika, że

$$\int_X \varphi(x)\,d\mu(x) = m\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{2^j}\int_X |\varphi_{j,n}(x)|^2\,d\mu(x) =$$

$$= m\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{2^j}\sum_{q\in P_{j,n}}|c_q|^2\int_X |h_q|^2 \leqslant m\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{2^j}\sum_{q\in P_{j,n}}|c_q|^2 =$$

$$= m\sum_{j=1}^{m}\sum_{q=1}^{2^m}|c_q|^2 = m^2\sum_{q=1}^{2^m}|c_q|^2 = m^2\sum_{j=1}^{k}|c_j|^2 .$$

Zatem na mocy (8)

$$\int_X \varphi(x)\,d\mu(x) \leqslant \left(\frac{\log 2k}{\log 2}\right)^2 \sum_{j=1}^{k}|c_j|^2 . \tag{9}$$

Przedział $0;\overline{k'}$ (gdzie k' jest liczbą naturalną, $k' \leqslant k < 2^m$) można przedstawić jako sumę pewnych przedziałów

$$P_{j_1,n_1}+P_{j_2,n_2}+\ldots+P_{j_s,n_s},$$

gdzie $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant m$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$. Wynika to z faktu, że liczbę k' można przedstawić w postaci

$$k' = 2^{m-j_1}+2^{m-j_2}+\ldots+2^{m-j_s} \qquad (1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_s \leqslant m).$$

Ponieważ

$$\sum_{j=1}^{k'} c_j h_j = \sum_{q=1}^{s}\varphi_{j_q,n_q},$$

więc z nierówności Cauchy'ego dla ciągów skończonych (por. rozdział XII, § 2, (25))

$$\left|\sum_{j=1}^{k'} c_j h_j\right| \leqslant \sqrt{s}\cdot\sqrt{\sum_{q=1}^{s}|\varphi_{j_q,n_q}|^2} \leqslant \sqrt{\varphi}.$$

Stąd dla $1 \leqslant k' \leqslant k'' \leqslant k$

$$\left|\sum_{j=k'}^{k''} c_j h_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{k'}|c_j h_j| + \sum_{j=1}^{k''}|c_j h_j| \leqslant 2\sqrt{\varphi}.$$

Funkcje pod znakiem całki we wzorach (6) i (7) są więc nie większe od φ i 4φ. Stąd oraz z (9) wynika (6) i (7).

6.5 (Twierdzenie Mieńszowa-Rademachera). *Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2(\log n)^2 < \infty \tag{10}$$

i funkcja $f \in \tilde{L}^2(X,\mu)$ *jest sumą szeregu* (2) *według normy* $\|\ \|_2$, *to szereg* (2) *jest zbieżny do* f *prawie wszędzie.*

Niech

$$S_m = \max_{2^m < n \leqslant 2^{m+1}} |s_n - s_{2^m}|,$$

gdzie s_n oznacza n-tą sumę częściową szeregu (3). Przyjmując w twierdzeniu 6.4 $k = 2^m$, $h_j = g_{2^m+j}$, $c_j = a_{2^m+j}$ otrzymujemy z nierówności (6) następujące oszacowanie

$$\int_X S_m^2 \leqslant \left(\frac{\log 2^{m+1}}{\log 2}\right)^2 \sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}}|a_j|^2 \leqslant (\log 2)^{-2}\sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}}|a_j|^2(\log 2j)^2 .$$

Zatem

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_X S_m^2 \leqslant (\log 2)^{-2}\sum_{j=1}^{\infty}|a_n|^2(\log 2j)^2 < \infty$$

na mocy (10). Stąd wynika (por. rozdział VII, 3.4), że

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = 0 \tag{11}$$

dla prawie każdego punktu $x \in X$. Ponieważ warunek (10) pociąga warunek (4), więc prawie wszędzie

$$s_{2^m}(x) \to f(x) \quad \text{dla} \quad m \to \infty \tag{12}$$

na podstawie twierdzenia 6.3. W każdym punkcie x, w którym zachodzi (11) i (12), szereg (3) jest zbieżny. Istotnie, jeśli $n \to \infty$ i $m \to \infty$, przy tym $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$, to

$$s_n(x) - s_{2^m}(x) \to 0,$$

gdyż wartość bezwzględna tej różnicy jest $\leqslant S_m(x)$. W rezultacie

$$s_n(x) = \left(s_n(x) - s_{2^m}(x)\right) + s_{2^m}(x) \to f(x), \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Dla specjalnych układów ortogonalnych warunek (10) w twierdzeniu 6.5 może być osłabiony. Np. dla układu Haara może być w ogóle pominięty, dla układu trygonometrycznego może być zastąpiony słabszym warunkiem (4) [1]. Można jednak wykazać, że dla dowolnych układów ortogonalnych unormowanych założenie (10) nie może być zastąpione [2] żadnym innym słabszym warunkiem tego typu, dokładniej mówiąc: warunkiem postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 w_n < \infty,$$

gdzie $\{w_n\}$ jest monotonicznym ciągiem liczbowym i $w_n/(\log n)^2 \to 0$.

[1]) Kolmogoroff i Seliverstoff [1], [2].

[2]) Menchoff [1], [3]. Por. także Kaczmarz [3].

Zastępując warunek (1) pewnymi warunkami silniejszymi od (10) możemy otrzymać nie tylko zbieżność prawie wszędzie szeregu (3), lecz nawet bezwarunkową zbieżność prawie wszędzie.

Mówimy, że szereg funkcyjny

$$f_1(x)+f_2(x)+\dots$$

jest *bezwarunkowo zbieżny prawie wszędzie*, jeżeli jest zbieżny przy dowolnym uporządkowaniu składników po pominięciu zbioru miary zero, zależnego na ogół od uporządkowania wyrazów szeregu. Suma szeregu bezwarunkowo zbieżnego prawie wszędzie nie zależy (z dokładnością do funkcji równoważnych) od uporządkowania jego składników. Dowód ostatniej uwagi jest taki sam jak dowód twierdzenia 10.4, rozdział XII [1]).

6.6 (Twierdzenie Orlicza [2])). *Niech* $\{w_n\}$ *będzie takim niemalejącym ciągiem liczb dodatnich, że istnieje ciąg rosnący* $\{n_m\}$ *liczb naturalnych o własności*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{w_{n_m}}<\infty \tag{13}$$

oraz

$$\log n_{m+1}\leqslant c\log n_m \qquad (m=1,2,3,\dots), \tag{14}$$

gdzie $c>1$ *jest pewną stałą. Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 w_n(\log n)^2<\infty, \tag{15}$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n g_n(x)$ *jest bezwarunkowo zbieżny prawie wszędzie.*

Niech $\tau(n)$ będzie dowolnym jednojednoznacznym odwzorowaniem zbioru liczb naturalnych na siebie. Udowodnimy zbieżność prawie wszędzie szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\tau(n)}g_{\tau(n)}(x). \tag{16}$$

Przy chwilowo ustalonym m niech

$$h_1, h_2, \dots, h_{k_m} \qquad (k_m=n_{m+1}-n_m)$$

będzie ciągiem utworzonym z funkcji

$$g_{n_m+1}, \dots, g_{n_{m+1}}$$

[1]) Orlicz [1].
[2]) Orlicz [2].

wypisanych w takiej kolejności, w jakiej występują w ciągu $\{g_{\tau(n)}\}$ (tzn. w szeregu (16)). Niech $c_1, \dots, c_m$ oznaczają współczynniki liczbowe przy funkcjach $h_1, \dots, h_m$ w szeregu (16) (liczby $c_1, \dots, c_m$ są więc pewną permutacją liczb $a_{n_m+1}, \dots, a_{n_{m+1}}$). Z twierdzenia 6.4, (7), wynika, że funkcja

$$S_m(x)=\max_{1\leqslant k'\leqslant k''\leqslant k_m}\Big|\sum_{j=k'}^{k''}c_j h_j(x)\Big| \tag{17}$$

spełnia nierówność

$$\int_X S_m(x)^2\,d\mu(x)\leqslant\Big(\frac{2\log 2k_m}{\log 2}\Big)^2\sum_{j=1}^{k_m}|c_j|^2=\Big(\frac{2\log 2k_m}{\log 2}\Big)^2\sum_{n=n_m+1}^{n_{m+1}}|a_n|^2.$$

Zatem na mocy (14)

$$\int_X S_m(x)^2\,d\mu(x)\leqslant\Big(\frac{2c\log 2n_m}{\log 2}\Big)^2\sum_{n=n_m+1}^{n_{m+1}}|a_n|^2. \tag{18}$$

Bezpośrednio z definicji funkcji S_m wynika, że dla $n'<n''$

$$\Big|\sum_{\substack{n'\leqslant n\leqslant n''\\ n_m<\tau(n)\leqslant n_{m+1}}}a_{\tau(n)}g_{\tau(n)}(x)\Big|\leqslant S_m(x), \tag{19}$$

gdyż wyrażenie po lewej stronie nierówności (19) jest jedną z liczb występujących pod znakiem „max“ po prawej stronie równości (17).

Z (18) oraz z monotoniczności ciągu $\{w_n\}$ wynika, że

$$w_{n_m}\int_X S_m(x)^2\,d\mu(x)\leqslant\Big(\frac{2c}{\log 2}\Big)^2\sum_{n=n_m+1}^{n_{m+1}}|a_n|^2 w_n(\log 2n)^2.$$

Zatem

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_X w_{n_m}S_m(x)^2\,d\mu(x)\leqslant\Big(\frac{2c}{\log 2}\Big)^2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 w_n(\log 2n)^2<\infty$$

na mocy (15). Szereg

$$\sum_{m=1}^{\infty}w_{n_m}S_m(x)^2 \tag{20}$$

jest więc prawie wszędzie zbieżny (por. rozdział VII, 3.4).

Wykażemy, że szereg (16) jest zbieżny w każdym punkcie x zbieżności szeregu (20). Istotnie, dla dowolnej liczby $\varepsilon>0$ istnieje liczba naturalna m_0 taka, że (por. (13))

$$\sum_{m=m_0}^{\infty}w_{n_m}S_m(x)^2<\frac{\varepsilon^2}{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{w_{n_m}}}. \tag{21}$$

Niech n_0 będzie taką liczbą naturalną, że

$$\tau(n) > n_{m_0} \quad \text{dla} \quad n > n_0 .$$

Stosując nierówność Cauchy'ego dla ciągów nieskończonych (por. rozdział XII, § 2, (24)) mamy dla $n'' > n' > n_0$ na mocy (19) i (21)

$$\left|\sum_{n=n'}^{n''} a_{\tau(n)} g_{\tau(n)}(x)\right| \leqslant \sum_{m=m_0}^{\infty} \left|\sum_{\substack{n'\leqslant n\leqslant n'' \\ n_m<\tau(n)\leqslant n_{m+1}}} a_{\tau(n)} g_{\tau(n)}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=m_0}^{\infty} S_m(x) \leqslant \sqrt{\sum_{m=m_0}^{\infty} S_m(x)^2 w_{n_m}} \cdot \sqrt{\sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{w_{n_m}}} < \varepsilon ,$$

co dowodzi zbieżności szeregu (16) w punkcie x.

Innego rodzaju wzmocnieniem warunku (1) niż warunki (4), (10), (15) jest warunek (22) w następującym twierdzeniu.

6.7 (Twierdzenie Mieńszowa [1]). *Jeżeli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon} < \infty \tag{22}$$

dla pewnej dodatniej liczby $\varepsilon < 2$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n$ *jest bezwarunkowo zbieżny prawie wszędzie.*

Dowód twierdzenia 6.7 opiera się na następującym lemacie z teorii ciągów liczbowych: Jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem nierosnącym liczb nieujemnych i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, to $na_n \to 0$. Istotnie, dla $n > n_0$ jest

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j < \varepsilon/2 ,$$

a więc

$$2na_{2n} \leqslant 2 \sum_{j=n+1}^{2n} a_j < \varepsilon$$

oraz

$$(2n+1)a_{2n+1} = 2(n+\tfrac{1}{2})a_{2n+1} \leqslant 2 \sum_{j=n+1}^{2n+1} a_j < \varepsilon .$$

[1]) Menchoff [3].

Dokonując ewentualnie odpowiedniej permutacji zbioru liczb naturalnych możemy zakładać, że

$$|a_1| \geqslant |a_2| \geqslant \ldots$$

Z (22) wynika, że $n|a_n|^{2-\varepsilon} \to 0$. Zatem

$$|a_n|^2 < n^{-2/(2-\varepsilon)} \quad \text{dla dostatecznie dużych } n.$$

Przyjmując $n_m = 2^{2^m}$ oraz $w_n = (\log\log n)^{1+\varepsilon}$ dla $n > 1$ stwierdzamy, że spełnione są założenia twierdzenia 6.6. Szereg (3) jest więc bezwarunkowo zbieżny.

Udowodnimy obecnie twierdzenie, które orzeka, że w pewnym sensie zbieżność prawie wszędzie rozwinięcia funkcji o kwadracie całkowalnym jest zjawiskiem powszechnym. Twierdzenie to zarazem zilustruje nam praktyczną użyteczność układu ortogonalnego Rademachera $\{r_n\}$, który w sposób analogiczny do niżej opisanego bywa również stosowany do wielu innych zagadnień.

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Rozważmy szereg ortogonalny

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) g_n(x) , \tag{23}$$

gdzie t jest pewną ustaloną liczbą z przedziału $\overline{0;1}$. Ponieważ

$$a_n r_n(t) = \pm a_n ,$$

szereg (23) różni się od szeregu (3) jedynie zmianą znaków na przeciwne niektórych wyrazów szeregu.

Jeżeli dany jest ciąg nieskończony liczb

$$\varkappa = \{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots\} , \tag{24}$$

gdzie $\varkappa_m = 1$ albo -1, taki, że liczba -1 występuje w nim nieskończoną ilość razy, to istnieje dokładnie jedna liczba $t \in \overline{0;1}$ taka, że

$$\varkappa_n = r_n(t) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Wystarczy w tym celu przyjąć

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{2^n}, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_n = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad \varkappa_n = 1 , \\ 1, & \text{gdy} \quad \varkappa_n = -1 . \end{cases}$$

Ponieważ ilość wyjątkowych ciągów $\varkappa$, dla których nie istnieje liczba t spełniająca równości (25), jest co najwyżej przeliczalna, można powiedzieć, że z pominięciem zbioru przeliczalnego układ Rademachera

ustala odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między liczbami $t \in \overline{0;1}$ a ciągami typu (24), tzn. wszelkimi możliwymi zmianami znaków.

6.8. *Jeżeli* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$, *to dla prawie każdego ustalonego* $t \in \overline{0;1}$ *szereg* (23) *jest zbieżny prawie wszędzie* μ [1]).

Dla prostoty załóżmy, że miara μ jest półskończona. Założenie to nie zmniejsza ogólności rozważań, gdyż właściwie zamiast całej przestrzeni X, można by ograniczyć się tylko do zbioru $\sum_{n=1}^{\infty}[x\colon g_n(x)\neq 0]$ miary półskończonej.

Niech $A\subset X\times\overline{0;1}$ oznacza zbiór tych punktów $\{x,t\}$, dla których szereg (23) jest rozbieżny. Zbiór A jest mierzalny (względem miary produktowej $\mu\times_c l_1$), bo

$$A=\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}[\{x,t\}\colon |a_{m+1}r_{m+1}(t)g_{m+1}(x)+\ldots+a_{m+k}r_{m+k}(t)g_{m+k}(x)|\geqslant 1/j].$$

Obliczymy obecnie miarę produktową $\mu\times_c l_1$ zbioru A posługując się twierdzeniem Fubiniego (dokładniej: twierdzeniem 4.1 z rozdziału VIII):

$$\mu\times_c l_1(A)=\int_X l_1(A_x)\,d\mu(x),$$

gdzie zgodnie ze znakowaniem z rozdziału VIII

$$A_x=[t\colon \{x,t\}\in A].$$

Przy ustalonym $x\in X$ zbiór A_x jest zbiorem tych t, dla których szereg (23) jest rozbieżny. Interpretujmy szereg (23) przy ustalonym x jako szereg ortogonalny względem układu Rademachera o współczynnikach $a_n g_n(x)$. Ponieważ

$$\int_X\sum_{n=1}^{\infty}|a_n g_n(x)|^2\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|a_n|^2|g_n(x)|^2\,d\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty,$$

więc (por. rozdział VII, 3.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n g_n(x)|^2<\infty \quad \text{dla} \quad x\in X-C, \tag{26}$$

gdzie $C\subset X$ jest pewnym zbiorem miary μ zero. Jeżeli więc $x\in X-C$, to z twierdzenia 5.4 wynika, że $l_1(A_x)=|A_x|=0$.

W rezultacie $\mu\times_c l_1(A)=0$. Z drugiej strony,

$$0=\mu\times_c l_1(A)=\int_0^1\mu_1(A^t)\,dt, \tag{27}$$

[1]) Paley i Zygmund [1].

gdzie $A^t=[x\colon \{x,t\}\in A]$, tzn. A^t jest — przy ustalonym t — zbiorem takich x, że szereg (23) jest rozbieżny. Funkcja podcałkowa w całce (27) jest nieujemna, a więc $\mu(A^t)=0$ dla prawie każdego $t\in\overline{0;1}$, c. b. d. o.

Jeśli $\liminf_{n\to\infty}\int_A|g_n|^2>0$ dla każdego zbioru A miary dodatniej, to prawdziwe jest również odwrócenie twierdzenia 6.8: jeśli $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2=\infty$, to dla prawie każdego t szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n r_n(t)g_n(x)$ jest rozbieżny prawie wszędzie μ [1]). Dowód tego twierdzenia opiera się na 5.5.

ĆWICZENIA. 1. Niech $\{g_n\}$ będzie układem ortogonalnym, unormowanym, wspólnie ograniczonym, $g_n\in L^2(X,\mu)$, $\mu(X)<\infty$. Jeżeli szereg ortogonalny $\sum_{n=1}^{\infty}a_n g_n$ jest zbieżny prawie wszędzie, to $a_n\to 0$.

(Wsk.: Z twierdzenia Jegorowa (rozdział VI, 6.1) wynika, że $a_n g_n(x)\to 0$ jednostajnie na zbiorze A, $\mu(X-A)<\varepsilon$. Zatem $a_n^2\int_A g_n^2\,d\mu\to 0$. Ponieważ $\int_A g_n^4\,d\mu>1-\varepsilon M^2$, gdzie $|g_n|\leqslant M$, więc $a_n\to 0$.)

2. Jeżeli $\{g_n\}$ jest układem ortogonalnym, unormowanym, wspólnie ograniczonym, $g_n\in L^2(X,\mu)$, to $\int_X fg_n\,d\mu\to 0$ dla każdej funkcji $f\in L(X,\mu)$ (twierdzenie Mercera).

(Wsk.: Przybliżyć funkcję f dowolnie blisko (według normy $\|\ \|_1$) funkcją należącą do $L^2(X,\mu)$ i zastosować twierdzenie Riesza-Fischera.)

3. Jeżeli $g_n\in L^2(X,\mu)$ $(n=1,2,\ldots)$ jest układem ortogonalnym, unormowanym, wspólnie ograniczonym i $\mu(X)<\infty$, to $\limsup_{n\to\infty}|g_n(x)|>0$ na pewnym zbiorze miary dodatniej. Zatem $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)^2=\infty$ na pewnym zbiorze miary dodatniej.

(Wsk.: W przeciwnym przypadku byłoby $\lim_{n\to\infty}\int_X g_n(x)^2\,d\mu(x)=0$.)

Uwaga. Można udowodnić, że jeśli $\{g_n\}$ jest układem ortogonalnym, unormowanym, liniowo gęstym w $L^2(X,\mu)$, to $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)^2=\infty$ prawie wszędzie [2]).

4. Jeżeli dla pewnej liczby $\alpha>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 n^{\alpha}<\infty,$$

to szereg (2) jest zbieżny prawie wszędzie (kryterium Hobsona) [3]).

[1]) Paley i Zygmund [1].

[2]) Orlicz [2]. Por. także Kaczmarz i Steinhaus [2], str. 150.

[3]) Hobson [2] (przypadek $\alpha=\frac{1}{2}$ został wcześniej udowodniony przez Weyla [1]). Jest to jedno z najwcześniejszych twierdzeń o zbieżności prawie wszędzie. Równocześnie z Hobsonem Plancherel [2] udowodnił, że nierówność $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2(\log n)^2<\infty$ implikuje zbieżność szeregu (2). Kilka lat potem Rademacher i Mieńszow znaleźli niezależnie od siebie ogólniejsze kryterium (10). Por. Rademacher [1] i Menchoff [1].

5. Jeżeli $\alpha > 1/2$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

jest bezwarunkowo prawie wszędzie zbieżny.

(Wsk.: Zastosować kryterium (22).)

6. Założenia (13) i (14) o ciągu niemalejącym liczb dodatnich $\{w_n\}$ w twierdzeniu 6.6 Orlicza są równoważne następującemu warunkowi: dla pewnej liczby naturalnej c

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{w_{2^m}} < \infty .$$

7. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \sqrt{|a_n|^2 + |a_{n+1}|^2 + |a_{n+2}|^2 + \ldots} < \infty$, to szereg (2) jest zbieżny prawie wszędzie (kryterium Kaczmarza) [1].

(Wsk.: Niech $b_n = |a_{n+1}|^2 + |a_{n+2}|^2 + \ldots$ Funkcje

$$f_n = (f - s_{n+1})^2 - (f - s_n)^2 = a_n g_n \left((f - s_{n+1}) + (f - s_n)\right),$$

gdzie f i s_n mają to samo znaczenie co w twierdzeniu 6.1, spełniają nierówność

$$\int_X |f_n| \, d\mu \leqslant |a_n| (\sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+1}}) .$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest więc prawie wszędzie zbieżny — por. rozdział VII, 3.4. Zatem $s_n \to f$ prawie wszędzie.)

8. Dla dowolnego układu ortogonalnego unormowanego $\{g_n\}$ ciąg

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \left(g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x)\right)$$

jest zbieżny prawie wszędzie do zera [2].

(Wsk.: Przyjmując w ćwiczeniu 5, § 2, $v_n = g_n$ mamy

$$-g_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_{n+1} - \sigma_n) \quad \text{w } L^2(X, \mu),$$

gdzie $\{w_n\}$ jest układem ortogonalnym, zdefiniowanym w cytowanym ćwiczeniu. Z kryterium (10) wynika, że ostatnie dwa szeregi są zbieżne prawie wszędzie do $-g_1$. Zatem $\sigma_n(x) - g_1(x) \to -g_1(x)$ prawie wszędzie.)

9. Dla prawie każdej liczby rzeczywistej

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \qquad (a_n = 0 \text{ lub } 1)$$

[1]) Kaczmarz [1] i [2].

[2]) Banach [1].

z przedziału 0; 1 granica $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ istnieje i równa się 1/2 (twierdzenie Borela [1]).

(Wsk.: Zastosować ćwiczenie 8 do układu Rademachera.)

10. Dla dowolnego ciągu nieskończonego $\{m_n\}$ różnych liczb naturalnych

$$\frac{\cos m_1 x + \ldots + \cos m_n x}{n} \to 0 \quad \text{i} \quad \frac{\sin m_1 x + \ldots + \sin m_n x}{n} \to 0$$

prawie wszędzie [2]).

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczenia 8.)

11. Niech $g_n \in L^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ będzie układem ortogonalnym unormowanym funkcji ciągłych, liniowo gęstym w C. Niech $\tau_n(x, y)$ oznacza n-te jądro tego układu (por. § 4, ćwiczenie 7), tzn.

$$\tau_n(x, y) = g_1(x) g_1(y) + \ldots + g_n(x) g_n(y) .$$

(α) Na to, by rozwinięcie ortogonalne dowolnej funkcji $f \in C$ było zbieżne w punkcie x_0, potrzeba i wystarcza, by

$$\sup_n \int_0^1 |\tau_n(x_0, y)| \, dy < \infty .$$

(β) Na to, by rozwinięcie ortogonalne dowolnej funkcji $f \in C$ było zbieżne jednostajnie do f, potrzeba i wystarcza [3]), by

$$\sup_n \sup_x \int_0^1 |\tau_n(x, y)| \, dy < \infty .$$

(Wsk.: Aby otrzymać (α) należy interpretować wartość n-tej sumy częściowej w punkcie x_0 jako funkcjonał liniowy na przestrzeni C i zastosować twierdzenia 4.2, 4.6 i 4.7 z rozdziału XII.

Interpretując n-tą sumę częściową jako operację liniową, odwzorowującą C w C, otrzymujemy (β) przy pomocy tych samych twierdzeń z rozdziału XII.)

12. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią, a $\{g_n\}$ — układem ortogonalnym unormowanym w przestrzeni $L^2(X, \mu)$. Dla prawie każdego x

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(x)^2}{n (\log n)^{1+\varepsilon}} < \infty$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} g_j(x)^2}{n (\log n)^{1+\varepsilon}} = 0 \text{ [4])}.$$

[1]) Borel [1].

[2]) Banach [1].

[3]) Steinhaus [4].

[4]) Kaczmarz [2].

(Wsk.: Pierwsza część wynika z rozdziału VII, 3.4. Druga część wynika z pierwszej oraz z następującego twierdzenia Kroneckera [1]) o szeregach liczbowych: Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ jest zbieżny, a $\{\beta_n\}$ jest ciągiem niemalejącym, $\beta_n \to \infty$, to $(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n)/\beta_n \to 0$.)

13. Niech ε będzie dowolną liczbą dodatnią i niech $\tau_n(x, y)$ będzie n-tym jądrem układu ortogonalnego unormowanego $g_n \in L^2(X, \mu)$. Jeśli $\mu(X) < \infty$, to dla prawie każdego x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_X |\tau_n(x, y)|\, d\mu(y)}{\sqrt{n(\log n)^{1+\varepsilon}}} = 0$$ [2]).

(Wsk.: Skorzystać z ćwiczenia 12 i zastosować nierówność Schwarza-Buniakowskiego.)

14. Dla każdej liczby naturalnej n niech X_n oznacza zbiór złożony z liczb 1 i -1 z miarą μ_n zdefiniowaną wzorami

$$\mu_n([1]) = \mu_n([-1]) = 1/2\,.$$

Niech $X = X_1 \times X_2 \times \ldots$ i $\mu = \mu_1 \times_\sigma \mu_2 \times_\sigma \ldots$ (por. rozdział VIII, § 3).

Twierdzenia 5.5 i 5.6 można inaczej sformułować w następujący sposób:

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, to dla prawie każdego ciągu $u = \{\xi_n\} \in X$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n$$

jest zbieżny. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$, to dla prawie każdego ciągu $u \in X$ szereg ten jest rozbieżny. (Termin: „prawie wszędzie" odnosi się tu do miary produktowej μ.)

15. Dla dowolnej liczby naturalnej n niech Z_n oznacza okrąg jednostkowy (tzn. zbiór liczb zespolonych e^{it}, $0 \leqslant t < 2\pi$) z miarą $\varkappa_n$ zdefiniowaną wzorem

$$\varkappa_n(A) = \frac{1}{2\pi}\, l_1([t\colon (e^{it} \in A)\cdot(0 \leqslant t < 2\pi)] \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{B}(Z_n)\,,$$

gdzie l_1 oznacza, jak zawsze, jednowymiarową miarę Lebesgue'a. Niech $Z = Z_1 \times Z_2 \times \ldots$ oraz $\varkappa = \varkappa_1 \times_\sigma \varkappa_2 \times_\sigma \ldots$

Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia podanego w ćwiczeniu 14:

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, to dla prawie wszystkich ciągów $u = \{\xi_n\} \in Z$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n$$

jest zbieżny. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$, to szereg ten jest rozbieżny dla prawie wszystkich ciągów $u \in Z$ (termin „prawie wszędzie" odnosi się tu do miary produktowej $\varkappa$) [3]).

[1]) Knopp [1], str. 127.

[2]) Kaczmarz [2].

[3]) Steinhaus [5].

(Wsk.: Przyjmijmy oznaczenia z ćwiczenia 14. Interpretujemy zbiór Z_n jako produkt $Z_n = X_n \times Y_n$, gdzie $Y_n = [e^{it}\colon 0 \leqslant t < \pi]$, utożsamiając parę $\{\xi, \eta\} \in X_n \times Y_n$ z liczbą $\xi\eta \in Z_n$. Wtedy $\varkappa_n = \mu_n \times_\sigma \nu_n$, gdzie

$$\nu_n(A) = \frac{1}{\pi}\, l_1([t\colon (e^{it} \in A)\cdot(0 \leqslant t < \pi)]) \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{B}(Y_n)\,.$$

Oznaczając $Y = Y_1 \times Y_2 \times \ldots$ oraz $\nu = \nu_1 \times_\sigma \nu_2 \times_\sigma \ldots$ mamy $Z = X \times Y$ i $\varkappa = \mu \times_\sigma \nu$. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, to dla każdego ustalonego ciągu $\{\eta_n\} \in Y$ szereg

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n a_n$$

jest zbieżny dla prawie każdego ciągu $\{\xi_n\} \in X$, na podstawie ćwiczenia 14. Stosując twierdzenie Fubiniego stwierdzamy, że zbiór tych par ciągów $\{\{\xi_n\}, \{\eta_n\}\} \in X \times Y$, dla których szereg $(*)$ jest zbieżny, ma miarę 1.)

16. Udowodnić następujące uogólnienie twierdzenia 6.8:

Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych takim, że prawie wszędzie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^2 < \infty$. **Wówczas dla prawie każdej liczby $t \in 0; 1$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) f_n(x)$ jest prawie wszędzie zbieżny.**