icm

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

TOM XXVI

02338
[26]

MARCELI STARK

GEOMETRIA ANALITYCZNA

ZE SZCZEGÓLNYM UWZGLĘDNIENIEM PODRĘCZNIKA
EUSTACHEGO ŻYLIŃSKIEGO

2015/P

NAKŁADEM POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Z SUBWENCJI MINISTERSTWA SZKÓŁ WYŻSZYCH I NAUKI

WARSZAWA — WROCŁAW 1951

02333

COPYRIGHT 1951, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
WARSZAWA (POLAND) WROCŁAW
ŚNIADECKICH 8 ŚWIERCZEWSKIEGO 19

ALL RIGHTS RESERVED

NO PART OF THIS BOOK MAY BE TRANSLATED OR REPRODUCED IN ANY FORM, BY MIMEOGRAPH OR ANY OTHER MEANS, WITHOUT PERMISSION IN WRITING FROM THE PUBLISHERS.

PRINTED IN POLAND

Redaktor tomu: Bronisław Knaster.

Rękopis otrzymano 4. V. 1950 r. Nakład 3.000 egz.
Stron VIII + 629. Druk ukończono w lipcu 1951 r. Papier druk. sat. 80 g 70 × 100 cm.

AM. 395/50 — DRUKARNIA WROCŁAWSKIEGO TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WE WROCŁAWIU — F-1-11093.

PAMIĘCI HERMANA AUERBACHA

PRZEDMOWA

Książka niniejsza może służyć za podręcznik geometrii analitycznej dla studiujących matematykę. Wszystko, co wykracza w niej poza kurs, przewidziany w chwili obecnej dla pierwszego 3-letniego szczebla studiów uniwersyteckich, ujęte jest w grube nawiasy.

Rozdziały I-V obejmują algebrę wektorów prócz iloczynu wektorowego, który został przeniesiony do Przypisu II, układy współrzędnych i geometrię analityczną prostych na płaszczyźnie oraz prostych i płaszczyzn w przestrzeni.

W rozdziale VI badane są zmiany układów współrzędnych, a następnie grupy izometrii, podobieństw i przekształceń afinicznych. Na tym tle wyłożone są zasady „programu erlan[illegible]" F. Kleina.

Dalszy ciąg (rozdziały VII-XV) jest już ułożony według tego programu. Po rozszerzeniu przestrzeni euklidesowej do przestrzeni rzutowej zespolonej następuje teoria stożkowych i kwadryk.

Ostatnią część (rozdziały XVI-XIX) stanowi geometria rzutowa płaszczyzny i przestrzeni.

Książka wymaga uprzedniej znajomości geometrii elementarnej w zakresie szkoły średniej, ściślej: geometrii euklidesowej opartej np. na aksjomatyce Hilberta. Celem książki, mimo jej tytułu, nie jest jednak wyłożenie metody analitycznej w geometrii, lecz samej geometrii. Dlatego metoda wykładu nie jest jednolita — i to celowo — lecz przechodzi często z analitycznej w syntetyczną. Jestem bowiem zdania, że wykład geometrii jedną tylko prowadzony metodą wymagałby wielu zbędnych komplikacji lub uszczuplenia teorii, studenta zaś na tym szczeblu przyzwyczajałby do sztucznej i niepożądanej jednostronności rozumowań.

Zakres materiału jest tradycyjny: teoria tworów geometrycznych pierwszego i drugiego stopnia. Wobec tego metody analityczne też są tradycyjne: wyłącznie algebraiczne. W całej książce korzysta się z algebry liniowej i teorii form kwadratowych. Niezbędne wiadomości z tych dziedzin zebrane są w Przypisie I. Jedynie teoria wyznaczników jest w nim potraktowana pobieżniej, ponieważ wyłożona jest w wielu podręcznikach algebry *.

Zbiór zadań, zamieszczony w Dodatku, ilustruje wyłożony materiał.

*

Myśl napisania tej książki poddał mi profesor Bronisław Knaster. Wdzięczność moja należy mu się również za cierpliwość i pracę włożoną przez niego w przestudiowanie i poprawienie rękopisu oraz korekt. Często korzystałem w czasie druku z jego doświadczenia redaktorskiego i wydawniczego.

Z początku zamierzałem jedynie opracować do druku drugie wydanie książki: Eustachy Żyliński, *Geometria analityczna*, wydanej w 1938 roku. Jednakże w miarę pracy nad nią książka zmieniła się i rozrosła tak dalece, że nie można już jej było uważać za drugie wydanie tamtej. Za zgodą profesora Żylińskiego skorzystałem z niej wydatniej w §§ 1, 12, 14-16, 21, 48-50, 52, 62 oraz w § 1 Przypisu I. Za tę zgodę składam mu specjalne podziękowanie.

Dziękuję Komitetowi Redakcyjnemu „Monografii Matematycznych", w osobie jego przewodniczącego, profesora Kazimierza Kuratowskiego, za zaszczyt przyjęcia mojej książki do tej znanej w świecie serii matematycznej.

Dziękuję też młodym matematykom, Jerzemu Siciarzowi i Zenobii Mazurównie, pracownikom Działu Wydawnictw Polskiego Towarzystwa Matematycznego, za ich trud wydawniczy oraz pracownikom Drukarni Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego za staranne wykonanie druku.

Wrocław, w kwietniu 1951 roku.

Marceli Stark

* Np. w książce: W. Sierpiński, *Zasady algebry wyższej*, Monografie Matematyczne, Warszawa-Wrocław, wydanie drugie, 1951.

ERRATA

Stronica i wiersz:	jest:	ma być:
124_{13}	$\bar{\psi}$	ψ
176_{4}	tj.	a więc
183_{16}	$\lambda=-\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert PB\rvert}=$	$\lambda=\frac{\lvert AP\rvert}{\lvert PB\rvert}=$
183_{13}	$-\frac{\lvert PB\rvert-\lvert PA\rvert}{\lvert PB\rvert}$ $\frac{\lvert PA\rvert}{\lvert PB\rvert}$	$-\frac{\lvert PB\rvert-\lvert AB\rvert}{\lvert PB\rvert}$ $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert PB\rvert}$
195^{9}	$\mu m_1+\nu n_2$	$\mu m_1+\nu n_1$
247^{3}	ε	e
296_{9}	k^4 $=k^2\sin\nu$	$2k^4$ $=2k^2\sin\nu$
304_{8}	$I_3=D^2\Delta'$	$I_3=D^2\bar{\Delta}'$
308^{11}	I_1	I_1^2
310^{11}	$I_3=$	$\bar{I}_3=$
401^{4}	$J(m_1+n_1:m_2+n_2)$	$J\big((m_1+n_1):(m_2+n_2)\big)$
401_{12}	$\tau y_i=\mu_1 m_i'+\nu_1 n_i'$	$\varrho y_i=\mu m_i'+\nu n_i'$

Errata.

Stronica wiersz:	jest:	ma być:
403^{7}	$\varrho_1 : \varrho_2$	$q_1 : q_2$
475_{7}	MP' i PM'	MP i $P'M'$
477^{2}	*43*	*45*
537_{7}	$(\|c\|c_1)\,\mathfrak{a}$	$(\|c\|c_1) \times \mathfrak{a}$
581^{6}	wyrażającym się	wyraża się wraz ze swym przekształceniem odwrotnym

---

ROZDZIAŁ I

WEKTORY

§ 1. Pojęcia podstawowe

1. Definicja wektora. Zasadniczym pojęciem, na którym opiera się współczesna geometria, jest wektor. Weźmy pod uwagę odcinek łączący dwa punkty P i Q. Odcinkowi temu możemy nadać *zwrot* od P do Q, uważając P za początek, a Q za koniec, lub zwrot od Q do P, uważając Q za początek, a P za koniec.

Odcinek z nadanym zwrotem nazywamy *wektorem*.

Z każdego odcinka mogą powstać dwa wektory przez nadanie mu jednego z dwóch możliwych zwrotów. Wektor o początku P i końcu Q oznaczamy przez PQ. Gdy nie zależy nam na zaznaczeniu początku i końca wektora, to oznaczamy wektory małymi literami fraktur owymi $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ itd.

Wprowadzimy jeszcze pojęcie *wektora zerowego*, tj. którego początek i koniec zlewają się w jeden punkt. Oznaczamy go przez $\mathfrak{o}$ lub PP, QQ itp.

Długość odcinka, z którego powstaje wektor, nazywamy *długością wektora*.

Długość wektora $\mathfrak{a}$ oznaczamy przez $|\mathfrak{a}|$, długość wektora PQ — przez $|PQ|$; w szczególności $|\mathfrak{o}| = 0$.

Dwa wektory, różne od zerowych i powstające z odcinków równoległych, nazywamy *wektorami równoległymi* lub mającymi ten sam *kierunek*.

Wektory równoległe mogą mieć ten sam zwrot lub zwroty przeciwne.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronice.

Absolutny niezmiennik 308.
Afiniczna geometria 162, 191, — grupa przekształceń 191, *-e* pojęcia 162.
Afiniczne przekształcenie płaszczyzny 142, — płaszczyzny rzutowej 181, — płaszczyzny rzutowej zespolonej 192, — prostej 139, — prostej rzutowej 181, — prostej rzutowej zespolonej 190, — przestrzeni rzutowej 181.
Algebraiczna geometria 206, — krzywa 201, 458, — krzywa płaska 205, — krzywa zdegenerowana 204, — powierzchnia 205, *-e* dopełnienie 496, *-e* krzywe jednozbieżne 466, *-y* twór 199.
Analityczna definicja punktu w ∞ 165.
Anharmoniczny stosunek czterech prostych w pęku 427, — czwórki punktów 402.
Apoloniusza koło 576, — twierdzenie drugie 288, — twierdzenie pierwsze 287, — twierdzenia uogólnione 386.
Archimedesa spirale 551.
Astroida 553.
Asymptota kisoidy 74, *-y* kwadryki 350, *-y* stożkowej 272.
Asymptotyczna płaszczyzna 351, *-e* kierunki kwadryki 352, *-y* kierunek 276, *-y* stożek 350.

Bezwładności moment 576.
Biegun 65, — płaszczyzny 337, — prostej 269.
Biegunowa forma 31, 518, — oś 65, — płaszczyzna 337, — prosta 269, *-e* współrzędne 66, *-o* sprzężona prosta 363.
Bikwadratowe przekształcenie 581.
Bok czworoboku 442, — czworokąta 442, — przeciwległy 444, 477.
Brianchona punkt 477, — twierdzenie 477.

Capelliego i Kroneckera twierdzenie 508.
Cardana twierdzenie 553.
Cauchy'ego twierdzenie 510.
Cayleya miary 448.
Centralne (kanoniczne) równanie elipsy 76.
Cevy twierdzenie 186.
Chasles'a twierdzenie 11.
Ciągła krzywa 75, *-e* przekształcenie 163.
Cosinusy kierunkowe wektora 35, 36, — osi 36.
Cosinusowe twierdzenie 18.
Cramera układ 499, — wzory 499.
Cykliczne punkty 207.
Cykloida 77, — skrócona 552, — wydłużona 552.
Cylindryczne (walcowe) współrzędne 67.
Czworobok zupełny 442, *-u* wierzchołki przeciwległe 444.
Czworokąt zupełny 442, *-a* boki przeciwległe 444.
Czworościan podstawowy 391, — samobiegunowy 487.
Czwórka harmoniczna punktów 411.

Darboux i Möbiusa twierdzenie 230, — i Staudta twierdzenie dla przekształceń afinicznych 152, — i Staudta twierdzenie dla przekształceń rzutowych 420.
Definicja punktu w ∞ analityczna 165, — syntetyczna 165.
Desargues'a twierdzenie 437, 444, 469.
Dioklesa kisoida 73.
Długość geograficzna 69, — osi elipsy 286, — średnicy rzeczywistej 297, — wektora 1.
Dopełnienie algebraiczne 496.
Dualizm płaski (zasada dwoistości płaskiej) 432, — przestrzenny (zasada dwoistości przestrzennej) 436.
Dwubiegunowe współrzędne 550.
Dwuliniowa forma 31, 516.
Dwupowłokowa hiperboloida 320.
Dwustosunek czterech prostych w pęku 427, — czwórki punktów 402.
Dylatacja (rozszerzenie) 294, 569.

Elipsa 76, 237, — nierzeczywista 254, — szyjna 320, *-y* równanie kanoniczne (centralne) 76.
Elipsoida 317, — nierzeczywista 326, — obrotowa 317, — spłaszczona 317, — wydłużona 317, *-y* osi główne 318, *-y* środek 318.
Eliptyczna inwolucja 414.
Epicykloida 552.
Euklidesowa płaszczyzna 166, — prosta 166, — przestrzeń 165.
Eulera kąty 123, — tożsamość 337, 446.
Ewolwenta koła 577.

Forma biegunowa 31, 518, — dwuliniowa 31, 516, — kwadratowa 31, 516, — kwadratowa określona dodatnio 525, — kwadratowa określona ujemnie 525, — stopnia *n* 199.
Formy kwadratowej macierz 517, — macierz mała 250, — macierz wielka 250, — postać kanoniczna 525, — pierwiastki charakterystyczne 528, — wielomian charakterystyczny 527, — wyróżnik 517.

Geograficzna długość 69, — szerokość 69.
Geometria afiniczna 162, — afiniczna rzeczywista 191, 192, — afiniczna zespolona 191, — algebraiczna 206, — grupy przekształceń 162, — metryczna 162, — Möbiusa 231, — podobieństw 162, — rzutowa rzeczywista 389, — rzutowa zespolona 389.
Geometryczne miejsce 70.
Główne płaszczyzny 372, — kierunki kwadryki 369, *-y* kierunek stożkowej 283.
Grupa przekształceń 127, — afiniczna rzeczywista 191, — afiniczna zespolona 191, — rzutowa rzeczywista 388, — rzutowa zespolona 388.

Hachette'a i Monge'a twierdzenie 375, 378.
Hamiltona i Rodrigues'a twierdzenie 567.
Hessego (normalne) równanie płaszczyzny 106, — prostej 95.
Hiperbola 238, — równoboczna 279, *-e* sprzężone 311, *-i* osie 295.
Hiperboliczna inwolucja 414.
Hiperboloida jednopowłokowa 319, — dwupowłokowa 320.
Hipocykloida 552.
Homeomorfizm (przekształcenie topologiczne) 164.
Homotetia 140, 147, *-i* środek 147, *-i* zewnętrznej środek 573.

Identyczność 125.
Iloczyn macierzy 510, 514, — mieszany wektorów 538, — przekształceń 126, — skalarowy 16, — wektorowy 535.
Inwersja w permutacji 493, — względem koła (odbicie w kole) 225, *-i* wiernokątność 228.
Inwersor Peaucelliera 228.
Inwersyjnie sprzężony punkt 225.
Inwolucja 225, 412, — eliptyczna 414, — hiperboliczna 414, — na prostej w ∞ 419.
Izolowany punkt 281.
Izometria 129.

Jednakowo (zgodnie) zorientowane wektory 52, 57.
Jednopowłokowa hiperboloida 319.
Jednorodne współrzędne 169, 170, — równania 500.
Jednowymiarowe twory liniowe 434.

Kanoniczna postać formy kwadratowej 525, *-e* (centralne) równanie elipsy 76, *-e* równania krzywych drugiego stopnia 253.
Kardioida 551.
Kartezjańskie współrzędne 65.
Kąt 7, — między dwoma kołami 219, — między osiami 8, — między prostą a płaszczyzną 14, — między wektorami 8, — między wektorem a płaszczyzną 14, — niezorientowany 8, — zorientowany 9, *-a* miara łukowa 8, *-y* Eulera 123, *-y* równe 8.
Kierownica stożkowej 238.
Kierunek asymptotyczny 276, — główny stożkowej 283, — sprzężony 275, — wektora 2, *-i* asymptotyczne kwadryki 352, *-i* główne kwadryki 369.
Kierunkowe równanie prostej 89, *-y* współczynnik 63.
Kisoida Dioklesa 73, *-y* asymptota 74.

Klasa krzywej 449.
Koło 213, — Apoloniusza 576, — Monge'a 584, — sferyczne 210, — zerowe 214, *-a* ewolwenta 577, *-a* przechodzące przez punkt w ∞ 229.
Kołowe pokrewieństwo 230.
Kół pęk 221, — pęki ortogonalne 223, — pęku równanie 221.
Konchoida Nikomedesa 552.
Konfiguracja Steinera 153.
Kontrawariantne (*zwyczajne*) składowe wektora 40, — współrzędne 40.
Korelacja dla płaszczyzn 430, — przestrzenna 435.
Kowariantne składowe wektora 40, — współrzędne 40, 44.
Kroneckera i Capelliego twierdzenie 508.
Krotność pierwiastka charakterystycznego 532.
Krzywa algebraiczna 201, 458, — algebraiczna płaska 205, — ciągła 75, *-e* algebraiczne jednozbieżne 466, *-e* algebraiczne zdegenerowane 204, *-ej* ostrze 281, *-ej* parametryczne przedstawienie 75, *-ej* punkt osobliwy 281, *-ej* punkt podwójny 281, *-ej* punkt izolowany 281, *-ej* stopień 201, 449, *-ych* drugiej klasy wiązka 470.
Kula Monge'a 595.
Kuliste (sferyczne) współrzędne 68.
Kwadratowa forma 31, 516, 525, — macierz 494.
Kwadryka 312, — rzędu czwartego 484, — stycznych 350, *-i* asymptoty 350, *-i* niewłaściwe 333, *-i* oś 372, *-i* rząd 481, *-i* średnice sprzężone 336, *-i* właściwe 333.

Lagrange'a tożsamość 38.
Laguerre'a twierdzenie 447.
Lemniskata 74.
Lewoskrętna linia śrubowa 83, *-y* układ współrzędnych 59.
Linia śrubowa 83, *-i* śrubowej parametryczne przedstawienie 83.
Liniowe (rzutowe) przekształcenie 388.
Logarytmiczna spirala 551.
Loksodroma 555.

Macierz 493, — formy kwadratowej 517, — formy kwadratowej mała 250, — formy kwadratowej wielka 250, — kwadratowa 494, — odwrotna 512, — ortogonalna 515, — przestawiona 495, 512, — symetryczna 517, *-y* iloczyn 510, 514, *-y* kwadratowej stopień 494, *-y* rząd 503.
Maclaurina i Newtona twierdzenie 480.
Mała półoś 286.
Menelaosa twierdzenie 188, — uogólnione 573.
Metryczna geometria 162.
Miara łukowa kąta 8, *-y* Cayleya 448.
Miejsce geometryczne 70.
Mieszany iloczyn wektorów 538.
Mimośród stożkowej liczbowy 239, — liniowy 246.
Minimalne proste 206, 212, *-y* stożek 210.
Minor 502.
Mnożenie wektora przez liczbę 6, — wektorowe 535.
Moment bezwładności 576.
Monge'a i Hachette'a twierdzenie 375, 378, — koło 584, — kula 595, — twierdzenie 595.
Möbiusa geometria 231, — i Darboux twierdzenie 230, — płaszczyzna 229.

Neila parabola 459.
Newtona i Maclaurina twierdzenie 480.
Nierzeczywista elipsa 254, — elipsoida 326, — oś hiperboli 295, *-y* walec 326, *-y* stożek 326.
Niewłaściwa (w ∞) płaszczyzna 166, — (w ∞) prosta 166, — *e* kwadryki 333, *-e* stożkowe 237.
Niezmiennik absolutny 308, *-i* przekształceń afinicznych 162.
Niezorientowany kąt 8.
Nikomedesa konchoida 552.
Normalna 291, *-e* (Hessego) równanie płaszczyzny 106, *-e* (Hessego) równanie prostej 95.

Obrotowa elipsoida 317, — hiperboloida dwupowłokowa 320, — hiperboloida jednopowłokowa 319, — paraboloida eliptyczna 321, — powierzchnia 78.
Obrót 121, 123, 131, 133, — czworościanu 566.
Obszar 571.
Obwiednia 455.
Odbicie 122, 133, 140, — punktu w kole 225, — w kole (inwersja) 225, 418, — w punkcie 418.
Odcięta 26.
Odcinki prostej rzutowej 571.
Odcinkowe równanie prostej 90, — płaszczyzny 104.
Odległość dwu punktów zespolonych 206, 210.

Odwrotna macierz 512, *-e* przekształcenie 126, 512.
Odwzorowanie perspektywiczne 427.
Ognisko stożkowej 238, — i kierownica odpowiadające sobie wzajemnie 242, *-a* urojone 584.
Ogólne równanie płaszczyzny 104, — prostej 86.
Oktanty (ósemki) przestrzeni 559.
Ortogonalna macierz 515, *-e* przekształcenie 526.
Osobliwy punkt 281.
Ostrze 281.
Oś 7, — biegunowa 65, — kwadryki 372, — hiperboli nierzeczywista 295, — pęku płaszczyzn 107, — hiperboli rzeczywista 295, — stożka 236, 315, — stożkowej 283, — walca 314, *-i* cosinusy kierunkowe 36, *-i* elipsy długość 286, *-i* główne elipsoidy 318, *-i* współrzędnych początek 24, *-ie* równoległe 7, *-ie* współrzędnych 24, 28.
Ósemka przestrzeni (oktant) pierwsza 29.

Pappusa twierdzenie 407.
Parabola 238, — Neila 459, *-e* współogniskowe 590.
Paraboloida eliptyczna 321, — hiperboliczna 322.
Parametr stożkowej 242.
Parametryczne przedstawienie krzywej 75, — linii śrubowej 83, — płaszczyzny 105, — prostej 87, 111, — prostej rzutowej 196.
Pascala prosta 477, — ślimak 552, — twierdzenie 477.
Peaucelliera inwersor 228.
Permutacja 492.
Perspektywiczne odwzorowanie 427, *-y* (środkowy) rzut 407.
Perspektywiczność dwóch tworów liniowych jednowymiarowych 434.
Pęk kół 221, — par punktów 417, — płaszczyzn 177, — płaszczyzn przecinających się 107, — płaszczyzn równoległych 108, — prostych 174, — prostych przecinających się 98, — prostych równoległych 98, — stożkowych 467, 582, *-i* ortogonalne kół 223, *-u* kół równanie 221, *-u* płaszczyzn oś 107, *-u* prostych wierzchołek 98, *-u* stożkowych wierzchołki 468.
Pierwiastek charakterystyczny formy kwadratowej 528, *-a* charakterystycznego krotność 532.
Pierwsze twierdzenie Apoloniusza 287.
Plückerowskie współrzędne płaszczyzny 434, — prostej 423.
Płaszczyzna asymptotyczna 351, — biegunowa 337, — euklidesowa 166, — Möbiusa 229, — niewłaściwa (w ∞) 166, — potęgowa 218, — rzutowa 166, — styczna 345, — średnicowa 360, — właściwa 166, — w przestrzeni zespolonej 197, *-y* biegun 337, *-y* główne 372, *-y* równanie normalne (Hessego) 106, *-y* równanie odcinkowe 104, *-y* równanie ogólne 104, *-y* topologia 164.
Początek osi współrzędnych 24.
Podobieństw geometria 162, *-a* 147.
Podstawowy czworościan 391, — trójkąt 396, — wektor 20, 25.
Pojedynczego podziału stosunek 183, 190.
Pojęcia afiniczne 162.
Pokrewieństwo kołowe 230.
Południk 80.
Postać kanoniczna formy kwadratowej 525.
Potęga punktu 216.
Powierzchnia algebraiczna 205, — obrotowa 78, — prostokreślna 352, — walcowa 80, *-i* prostokreślnej tworząca 352, *-i* rząd 483, *-i* walcowej tworząca 81.
Powiększenia współczynnik 147.
Półoś mała 286, — wielka 286.
Prawoskrętna linia śrubowa 83, *-y* układ współrzędnych 59.
Promienie wodzące 286.
Proporcjonalne układy liczb 59.
Prosta 192, — biegunowa 269, — biegunowo sprzężona 363, — euklidesowa 166, — niewłaściwa (w ∞) 166, — Pascala 477, — podwójna 451, — potęgowa (pierwiastna) 216, — rzeczywista 192, — rzutowa zespolona 189, — Steinera 475, — właściwa 166, 192, — w przestrzeni zespolonej 197, *-e* minimalne 206, *-e* minimalne w przestrzeni 212, *-e* przekątne 442, *-e* rzutowe 166, *-e* skośne (wichrowate) 168, *-e* sprzężone względem stożkowej 611, *-ej* biegun 269, *-ej* podwójnej równanie 254, *-ej* równanie normalne (Hessego) 95, *-ej* równanie kierunkowe 89, *-ej* równanie odcinkowe 90, *-ej* równanie ogólne 86, *-ej* rzutowej odcinki 571.
Prostokątny układ współrzędnych 32, 33.
Prowadząca 81.
Przeciwległe boki 444, 477, — wierzchołki 444, 477.
Przedstawienie prostej przez jej rzuty 110.

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny 142, — płaszczyzny rzutowej 181, — płaszczyzny rzutowej zespolonej 192, — prostej 139, — prostej rzutowej 181, — prostej rzutowej zespolonej 190, — przestrzeni rzutowej 181.
Przekształcenie bikwadratowe 581, — ciągłe 163, — liniowe 509, — odwrotne 126, 512, — ortogonalne 526, — przez identyczność 125, — punktowe 128, — topologiczne (homeomorfizm) 164, — wzajemnie jednoznaczne 125.
Przekształcenie rzutowe (*liniowe*) 388, — pęku w pęk 428, — płaszczyzny 397, — prostej w prostą 399.
Przekształceń afinicznych niezmienniki 162, — grupa 127, — iloczyn 126.
Przestawiona macierz 495, 512.
Przestrzeń euklidesowa 165, — rzutowa 165, *-i* oktanty (ósemki) 559.
Przesunięcie (translacja) 121, 130, 133, 140.
Przystające afinicznie twory 260, — twory 163.
Ptolemeusza twierdzenie 544, 579.
Punkt Brianchona 477, — inwersyjnie sprzężony 225, — izolowany 281, — jednostkowy (podstawowy) 391, 397, 399, — niewłaściwy (w ∞) 165, — osobliwy 281, — podwójny 451, — podwójny krzywej 281, — stały przekształcenia 414, 566, 569, — rzeczywisty 189, — styczności 452, 484, — właściwy 166, 189, — w ∞ płaszczyzny Möbiusa 229, — zespolony 189, *-ów* czwórka harmoniczna 411, *-u* równanie 424, *-u* współrzędne 21, 26, *-u* współrzędne kontrawariantne (zwyczajne) 40, *-u* współrzędne kowariantne 40, 44, *-y* cykliczne 207, *-y* przekątne 442, *-y* sprzężone 191, 194, *-y* zespolone identyczne 189, 192.

Rodrigues'a i Hamiltona twierdzenie 567.
Rozwiązanie zerowe 500.
Rozwinięcie wyznacznika 496.
Rozszerzenie (dylatacja) 294, 569.
Równanie kanoniczne (centralne) elipsy 76, — kierunkowe prostej 89, — normalne (Hessego) płaszczyzny 106, — normalne (Hessego) prostej 95, — odcinkowe płaszczyzny 104, — odcinkowe prostej 90, — ogólne płaszczyzny 104, — ogólne prostej 86, — pęku kół 221, — prostej podwójnej 254, — punktu 424, — tworu geometrycznego 70, *-a* jednorodne 500, *-a* kanoniczne krzywych drugiego stopnia 253.
Równe kąty 8, — wektory 2.
Równoboczna hiperbola 279.
Równoległe osie 7, — wektory 1.
Równoległik 80.
Różnica wektorów 6.
Ruchy 133.
Rząd kwadryki 481, — macierzy 503, — powierzchni 483.
Rzeczywista oś hiperboli 295, — prosta 192, *-y* punkt 189.
Rzędna 26.
Rzut na oś równoległy do płaszczyzny 11, — na oś równoległy do prostej 13, — na płaszczyznę równoległy do prostej 13, — perspektywiczny (środkowy) 407, — prostopadły na oś 11, — prostopadły na płaszczyznę 14, — stereograficzny 231, — stereograficzny stożkowej 470, — wektora na oś 11, — wektora na płaszczyznę 14, *-u* perspektycznego środek 407.
Rzutowa geometria 389, — grupa przekształceń 388, — płaszczyzna 166, — prosta 166, — przestrzeń 165, *-e* współrzędne 390, 394, *-e* współrzędne płaszczyzny w pęku 434, *-e* współrzędne prostej w pęku 425.
Rzutowe (*liniowe*) *przekształcenie* 388, — pęku w pęk 428, — płaszczyzny 397, — prostej w prostą 399.

Samobiegunowy czworościan 487, — trójkąt 463.
Sarrusa schemat 495.
Sferyczne koło 210, — (kuliste) współrzędne 68.
Skalarowy iloczyn 16.
Składowe wektora 20, 25, 28, — kontrawariantne (zwyczajne) 40, — kowariantne 40.
Skośne (wichrowate) proste 168.
Skrócona cykloida 552.
Spirala logarytmiczna 551, *-e* Archimedesa 551.
Spłaszczona elipsoida 317.
Sprzężony inwersyjnie punkt 225, — kierunek 275, *-e* hiperbole 311, *-e* punkty 191, 194.
Stały punkt przekształcenia 414, 566, 569.
Staudta i Darboux twierdzenie dla przekształceń afinicznych 152, — dla przekształceń rzutowych 420.
Steinera konfiguracja 153, — prosta 475, — twierdzenie 472.

Stereograficzny rzut 231, — stożkowej 470.
Stopień krzywej 201, 449, — macierzy kwadratowej 494.
Stosunek anharmoniczny czterech prostych w pęku 427, — anharmoniczny czwórki punktów 402, — pojedynczego podziału 183, 190.
Stożek 315, — asymptotyczny 350, — minimalny 210, — nierzeczywisty 326, — stycznych 350, *-a* oś 236, 315, *-a* środek 236, 315, 338, *-a* tworząca 236, 316, *-a* wnętrze 236, *-a* zewnętrze 236.
Stożkowa 249, *-e* niewłaściwe 237, *-e* właściwe 237, 455, *-e* współogniskowe 587, *-ej* asymptoty 272, *-ej* kierownica 238, *-ej* mimośród liczbowy 239, *-ej* mimośród liniowy 246, *-ej* ognisko 238, *-ej* oś 283, *-ej* parametr 242, *-ej* średnica 274, *-ej* średnice sprzężone 277, *-ej* środek 273, *-ej* wierzchołki 285, *-ej* właściwej wnętrze 238, *-ych* pęk 467, 582.
Sturma twierdzenie 469.
Styczna do kwadryki 345, — do powierzchni drugiej klasy 483, — do stożkowej 266, — płaszczyzna 345, *-ych* kwadryka 350.
Suma wektorów 3.
Swobodny wektor 3.
Symetryczna macierz 517.
Syntetyczna definicja punktu w ∞ 165.
Szerokość geograficzna 69.
Sześciobok 476, *-u* bok przeciwległy 477, *-u* wierzchołek przeciwległy 477.
Szyjna elipsa 320.

Ślimak Pascala 552.
Średnica 364, — sprzężona z kierunkiem 275, — sprzężona z płaszczyzną 364, — stożkowej 274, *-e* sprzężone kwadryki 366, *-e* sprzężone stożkowej 277, *-y* rzeczywistej długość 297.
Średnicowa płaszczyzna 360.
Środek elipsoidy 318, — homotetii 147, — homotetii zewnętrznej 573, — pary punktów 190, — potęgowy trzech kół 218, — powierzchni rzędu czwartego 341, — rzutu perspektywicznego 407, — stożka 236, 315, 338, — stożkowej 273.
Środkowy (perspektywiczny) rzut 407.
Śrubowa linia 83, *-ej* linii parametryczne przedstawienie 83.

Topologia płaszczyzny 164.
Topologiczne przekształcenie (homeomorfizm) 164.
Torus 553.
Tożsamość Eulera 337, 446, — Lagrange'a 38.
Translacja (przesunięcie) 121, 130, 133, 140.
Trójkąt na płaszczyźnie 437, — podstawowy 396, — samobiegunowy 463, — w przestrzeni 440.
Trójścian 440.
Twierdzenie Apoloniusza 287, 288, 386, — Brianchona 477, — Capelliego i Kroneckera 508, — Cardana 553, — Cauchy'ego 510, — Cevy 186, — Chasles'a 11, — cosinusowe 18, — Desargues'a 437, 444, 469, — Laguerre'a 447, — Menelaosa 188, 573, — Monge'a 595, — Monge'a i Hachette'a 375, 378, — Möbiusa i Darboux 230, — Newtona i Maclaurina 480, — o bezwładności form kwadratowych 523, — Pappusa 407, — Pascala 477, — Ptolemeusza 544, 579, — Rodrigues'a i Hamiltona 567, — Staudta i Darboux 152, 420, — Steinera 472, — Sturma 469, — Weierstrassa 371, 532.
Tworząca powierzchni prostokreślnej 352, — powierzchni walcowej 81, — stożka 236, 316.
Twór algebraiczny 199, — określony przez równanie biegunowe 72, *-u* geometrycznego równanie 70, *-y* liniowe jednowymiarowe 434, *-y* przystające 163, *-y* przystające afinicznie 260.

Układ Cramera 499, — lewoskrętny 59, — prawoskrętny 59, — prostokątny 32, 33, *-y* proporcjonalne liczb 59.
Umiejscowiony wektor 2.
Urojone ogniska 584.

Walec nierzeczywisty 326, *-a* oś 314.
Walcowa powierzchnia 80, *-e* (cylindryczne) współrzędne 67.
Weierstrassa twierdzenie 371, 532.
Wektor 1, — podstawowy 20, 25, — swobodny 3, — umiejscowiony 2, — zerowy 1, *-a* cosinusy kierunkowe 35, 36, *-a* długość 1, *-a* kierunek 2, *-a* składowe 20, 25, 28, *-a* składowe kontrawariantne (zwy-

czajne) 40, *-a* składowe kowariantne 40, *-ów* różnica 6, *-ów* suma 3, *-y* równe 2, *-y* równoległe 1, *-y* zgodnie zorientowane 52, 57, *-y* zgodnie zorientowane z układem osi współrzędnych 53.
Wektorowe mnożenie 535, *-y* iloczyn 535.
Wiązka krzywych drugiej klasy 470.
Wichrowate (skośne) proste 168.
Wielka macierz formy kwadratowej 250, — półoś 286.
Wielomian charakterystyczny formy kwadratowej 527, *-y* równe tożsamościowo 95.
Wiernokątność inwersji 228.
Wierzchołek pęku prostych 98, *-i* czworoboku 442, *-i* czworokąta 442, *-i* pęku stożkowych 468, *-i* przeciwległe 444, 477, *-i* stożkowej 285.
Właściwa płaszczyzna 166, — prosta 166, 192, *-e* kwadryki 333, *-e* stożkowe 237, 455, *-y* punkt 166, 189.
Wnętrze stożka 236, — stożkowej właściwej 238.
Współczynnik kierunkowy 63, — powiększenia 147.
Współogniskowe parabole 590, — stożkowe 587.
Współrzędne 21, 26, — biegunowe 66, — cylindryczne (walcowe) 67, — dwubiegunowe 550, — jednorodne 169, 170, — kartezjańskie 65, — kontrawariantne (zwyczajne) 40, — kowariantne 40, 44, — plückerowskie płaszczyzny 434, — plückerowskie — prostej 423, — rzutowe 390, 394, — rzutowe płaszczyzny w pęku 434, — rzutowe prostej w pęku 425, — sferyczne (kuliste) 68, *-ych* osie 24, 28.
Wyznacznik 494, *-a* rozwinięcie 496.
Wydłużona cykloida 552, — elipsoida 317.
Wypukłość 238.
Wyróżnik formy kwadratowej 517.
Wzajemnie jednoznaczne przekształcenie 125.
Wzory Cramera 499.

Zasada dwoistości płaskiej (dualizm płaski) 432, — przestrzennej (dualizm przestrzenny) 436.
Zerowe koło 214, — rozwiązanie 500, *-y* wektor 1.
Zespolona prosta rzutowa 189, *-e* punkty identyczne 189, 192, *-y* punkt 189.
Zewnętrze stożka 236.
Zgodnie (jednakowo) zorientowane wektory 52, 57, — wektory z układem osi współrzędnych 53.
Zorientowany kąt 9.
Zupełny czworobok 442, — czworokąt 442.

SPIS RZECZY

Str.

PRZEDMOWA V

ERRATA VII

ROZDZIAŁ I. WEKTORY.

§ 1. **Pojęcia podstawowe** 1
1. Definicja wektora. 2. Dodawanie wektorów. 3. Mnożenie wektora przez liczbę.

§ 2. **Kąty i rzuty** 7
1. Oś. 2. Kąty niezorientowane. 3. Kąty zorientowane. 4. Wartość wektora na osi. 5. Rzut na prostą w przestrzeni. 6. Rzut na prostą w płaszczyźnie. 7. Rzut na płaszczyznę.

§ 3. **Iloczyn skalarowy** 16

ROZDZIAŁ II. SKŁADOWE WEKTORA I WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU.

§ 4. **Składowe wektora i współrzędne punktu na prostej** 20
1. Składowe wektora. 2. Współrzędne punktu.

§ 5. **Składowe wektora i współrzędne punktu na płaszczyźnie** . . . 23
1. Zależności między wektorami równoległymi do płaszczyzny. 2. Składowe wektora na płaszczyźnie.

§ 6. **Składowe wektora i współrzędne punktu w przestrzeni** 27
1. Zależności między wektorami w przestrzeni. 2. Składowe wektora w przestrzeni. 3. Współrzędne punktu w przestrzeni.

§ 7. **Iloczyn skalarowy i długość wektora** 30
1. Iloczyn skalarowy i długość wektora na płaszczyźnie. 2. Iloczyn skalarowy i długość wektora w przestrzeni.

§ 8. **Kąty między wektorami w prostokątnych układach współrzędnych** 35
1. Cosinusy kierunkowe na płaszczyźnie. 2. Cosinusy kierunkowe w przestrzeni. 3. Kąty między wektorami.

§ 9. **Współrzędne kowariantne** 39
1. Współrzędne kowariantne na płaszczyźnie. 2. Współrzędne kowariantne w przestrzeni.

§ 10. **Objętość czworościanu i pole trójkąta** 45
1. Objętość czworościanu. 2. Pole trójkąta na płaszczyźnie i w przestrzeni.

§ 11. **Orientacja układu wektorów** 51
1. Orientacja pary wektorów na płaszczyźnie. 2. Orientacja trójki wektorów w przestrzeni.

Str.

§ 12. O kierunkach 59
1. Stosunki. 2. Kierunki. 3. Kierunki na płaszczyźnie.

§ 13. Inne układy współrzędnych 65
1. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie. 2. Współrzędne cylindryczne w przestrzeni. 3. Współrzędne sferyczne w przestrzeni.

ROZDZIAŁ III. RÓWNANIA TWORÓW GEOMETRYCZNYCH.

§ 14. Określenie równania tworu geometrycznego 70

§ 15. Przykłady równań tworów płaskich 72
1. Kisoida. 2. Lemniskata. 3. Parametryczne przedstawienie krzywej. 4. Elipsa. 5. Przedstawienie wymierne koła. 6. Cykloida.

§ 16. Przykłady równań tworów przestrzennych 78
1. Powierzchnie obrotowe. 2. Powierzchnie walcowe. 3. Rzut krzywej. 4. Linia śrubowa.

ROZDZIAŁ IV. PROSTA NA PŁASZCZYŹNIE.

§ 17. Równania prostej na płaszczyźnie 85
1. Równanie ogólne. 2. Przedstawienie parametryczne prostej. 3. Równanie kierunkowe. 4. Równanie odcinkowe.

§ 18. Kąt między dwiema prostymi 90

§ 19. Przykłady 92

§ 20. Postać normalna równania prostej 94

§ 21. Pęk prostych na płaszczyźnie 98

ROZDZIAŁ V. PŁASZCZYZNA I PROSTA W PRZESTRZENI.

§ 22. Płaszczyzna w przestrzeni 103
1. Równanie ogólne płaszczyzny. 2. Równanie odcinkowe płaszczyzny. 3. Kąt między płaszczyznami. 4. Przedstawienie parametryczne płaszczyzny. 5. Równanie normalne płaszczyzny. 6. Pęki płaszczyzn. 7. Płaszczyzna przez trzy punkty.

§ 23. Prosta w przestrzeni 109
1. Prosta jako krawędź przecięcia dwóch płaszczyzn. 2. Przedstawienie prostej przez jej rzuty. 3. Przedstawienie parametryczne prostej.

§ 24. Przykłady zagadnień dla prostej i płaszczyzny w przestrzeni . . 112

ROZDZIAŁ VI. ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, IZOMETRIE, PODOBIEŃSTWA I PRZEKSZTAŁCENIA AFINICZNE.

§ 25. Zmiana układu współrzędnych prostokątnych 117
1. Zmiana współrzędnych punktu. 2. Ruchy układu współrzędnych na płaszczyźnie. 3. Ruchy układu współrzędnych w przestrzeni.

§ 26. O przekształceniach zbiorów 125

Str.

§ 27. Izometrie 128
1. Izometrie na płaszczyźnie. 2. Izometrie w przestrzeni.

§ 28. Zmiana układu współrzędnych ukośnokątnych 135
1. Zmiana układu współrzędnych na prostej. 2. Zmiana układu współrzędnych w przestrzeni i na płaszczyźnie.

§ 29. Przekształcenia afiniczne 139
1. Przekształcenia afiniczne prostej. 2. Przekształcenia afiniczne płaszczyzny. 3. Podobieństwa. 4. Przekształcenia afiniczne przestrzeni.

§ 30. Własności przekształceń afinicznych 150
1. Przekształcenie prostej. 2. Przekształcenie płaszczyzny i przestrzeni. Twierdzenie Staudta i Darboux dla przekształceń afinicznych. 3. Rzut równoległy.

§ 31. O klasyfikacji pojęć i twierdzeń geometrii 161

ROZDZIAŁ VII. ELEMENTY NIEWŁAŚCIWE, WSPÓŁRZĘDNE JEDNORODNE.

§ 32. Elementy w nieskończoności 165

§ 33. Współrzędne jednorodne 169
1. Współrzędne jednorodne na prostej. 2. Współrzędne jednorodne na płaszczyźnie i w przestrzeni.

§ 34. Prosta na płaszczyźnie we współrzędnych jednorodnych . . . 171

§ 35. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni we współrzędnych jednorodnych 175

§ 36. Zmiana układu współrzędnych jednorodnych. Przekształcenia afiniczne przestrzeni rzutowej 178
1. Zmiana układu współrzędnych. 2. Przekształcenia afiniczne.

§ 37. Stosunek pojedynczego podziału 182
1. Określenie stosunku pojedynczego podziału. 2. Twierdzenia Menelaosa i Cevy.

§ 38. Punkty zespolone 188
1. Punkty zespolone na prostej. 2. Punkty zespolone na płaszczyźnie i w przestrzeni.

§ 39. Twory zespolone pierwszego stopnia 192
1. Twory pierwszego stopnia na płaszczyźnie zespolonej. 2. Pewne parametryczne przedstawienie prostej. 3. Płaszczyzna i prosta w przestrzeni zespolonej.

§ 40. Twory algebraiczne 199
1. Twory algebraiczne na prostej. 2. Twory algebraiczne na płaszczyźnie. 3. Twory algebraiczne w przestrzeni.

§ 41. Punkty cykliczne i koło sferyczne 206
1. Punkty cykliczne. 2. Koło sferyczne i stożek minimalny.

Str.

ROZDZIAŁ VIII. KOŁO.

§ 42. Równanie koła 213

§ 43. Wzajemne położenie prostych i kół na płaszczyźnie 215
1. Prosta i koło. 2. Punkty przecięcia dwóch kół. Prosta potęgowa. 3. Kąt dwóch kół.

§ 44. Pęki kół 220

§ 45. Inwersja 225
1. Własności podstawowe inwersji. 2. Wiernokątność inwersji.

§ 46. Pokrewieństwa kołowe 229

§ 47. Rzut stereograficzny 231

ROZDZIAŁ IX. STOŻKOWE.

§ 48. Przekroje płaskie stożka 236
1. Własności stożka. 2. Przekroje stożka. 3. Ogniska i kierownice.

§ 49. Równania stożkowych właściwych we współrzędnych biegunowych 242

§ 50. Równania stożkowych we współrzędnych kartezjańskich . . . 245

ROZDZIAŁ X. KLASYFIKACJA STOŻKOWYCH.

§ 51. Przekształcanie równań stożkowych 249

§ 52. Klasyfikacja metryczna stożkowych 252

§ 53. Klasyfikacja afiniczna stożkowych 260

ROZDZIAŁ XI. WŁASNOŚCI AFINICZNE STOŻKOWYCH.

§ 54. Położenie prostej względem stożkowej. Styczna i biegunowa . . 264
1. Oznaczenia. 2. Stożkowa a prosta. 3. Styczna w punkcie właściwym. 4. Styczna we współrzędnych jednorodnych. Biegunowa. 5. Asymptoty.

§ 55. Środek. Średnice 273
1. Środek. 2. Średnice. 3. Równanie pary asymptot. 4. Środki symetrii stożkowych niewłaściwych.

ROZDZIAŁ XII. WŁASNOŚCI METRYCZNE STOŻKOWYCH.

§ 56. Osie 283

§ 57. Własności metryczne elipsy rzeczywistej 285
1. Ogniska i kierownice. 2. Twierdzenia Apoloniusza. 3. Konstrukcje. 4. Biegunowe. 5. Normalna. 6. Wnętrze i zewnętrze. 7. Pewna własność przekształceń afinicznych.

§ 58. Własności metryczne hiperboli 295
1. Ogniska i kierownice. 2. Hiperbola w układzie asymptot. 3. Hiperbola w układzie średnic sprzężonych. 4. Wnętrze i zewnętrze.

§ 59. Własności metryczne paraboli 299

Str.

§ 60. Niezmienniki I_1, I_2, I_3 303
1. Twierdzenie pomocnicze. 2. Pełny układ niezmienników stożkowej. 3. Kryterium podobieństwa stożkowych.

ROZDZIAŁ XIII. PRZYKŁADY I KLASYFIKACJA KWADRYK.

§ 61. Przykłady kwadryk 312
1. Walce. 2. Stożek. 3. Elipsoida. 4. Hiperboloida jednopowłokowa. 5. Hiperboloida dwupowłokowa. 6. Paraboloidy.

§ 62. Klasyfikacja kwadryk 323
1. Uwagi wstępne. 2. Klasyfikacja metryczna kwadryk. 3. Klasyfikacja afiniczna kwadryk.

ROZDZIAŁ XIV. WŁASNOŚCI AFINICZNE KWADRYK.

§ 63. Płaszczyzna biegunowa 336
1. Oznaczenia. 2. Płaszczyzna biegunowa. 3. Środek.

§ 64. Proste i płaszczyzny styczne 345
1. Płaszczyzna styczna. 2. Przekrój kwadryki płaszczyzną styczną. 3. Stożek stycznych. 4. Stożek asymptotyczny. 5. Płaszczyzny asymptotyczne.

§ 65. Prostokreślność kwadryk 352

§ 66. Płaszczyzny średnicowe i średnice 360
1. Płaszczyzny średnicowe. 2. Proste biegunowo sprzężone. 3. Średnice. 4. Równania kwadryk w specjalnych układach współrzędnych.

ROZDZIAŁ XV. WŁASNOŚCI METRYCZNE KWADRYK.

§ 67. Kierunki główne. Osie 369

§ 68. Kwadryki obrotowe 372

§ 69. Przekroje kołowe 375

§ 70. Niezmienniki I_1, I_2, I_3, I_4. Uogólnienia twierdzeń Apoloniusza . 382
1. Niezmienniki I_1, I_2, I_3, I_4. 2. Uogólnienia twierdzeń Apoloniusza.

ROZDZIAŁ XVI. PRZEKSZTAŁCENIA RZUTOWE, WSPÓŁRZĘDNE RZUTOWE, STOSUNEK ANHARMONICZNY.

§ 71. Przekształcenia rzutowe przestrzeni rzutowej 387

§ 72. Współrzędne rzutowe w przestrzeni rzutowej 390

§ 73. Współrzędne rzutowe i przekształcenia rzutowe na płaszczyźnie i na prostej 394
1. Współrzędne rzutowe i przekształcenia rzutowe na płaszczyźnie. 2. Współrzędne rzutowe i przekształcenia rzutowe na prostej. 3. Przedstawienie parametryczne prostej.

§ 74. Stosunek anharmoniczny 401
1. Własności podstawowe. 2. Twierdzenie Pappusa.

§ 75. Stosunek harmoniczny 410

Str.

§ 76. Inwolucje rzutowe na prostej 412

§ 77. Pewne własności charakterystyczne przekształceń rzutowych . . 419
1. Przedstawienie przekształceń rzutowych przez rzuty perspektywiczne. 2. Twierdzenie Staudta i Darboux dla przekształceń rzutowych.

ROZDZIAŁ XVII. WSPÓŁRZĘDNE PLÜCKEROWSKIE, DUALIZM I PRZYKŁADY JEGO ZASTOSOWAŃ.

§ 78. Współrzędne plückerowskie prostych 423
1. Współrzędne prostej i równania punktu. 2. Współrzędne rzutowe prostej w pęku.

§ 79. Korelacje 429
1. Przekształcenia rzutowe we współrzędnych plückerowskich. 2. Korelacje dla płaszczyzn.

§ 80. Dualizm na płaszczyźnie 432

§ 81. Współrzędne plückerowskie płaszczyzn 434
1. Twory jednowymiarowe. 2. Korelacje i dualizm przestrzenny.

§ 82. Twierdzenie Desargues'a o trójkątach 437

§ 83. Czworobok zupełny i czworokąt zupełny 442

§ 84. Twierdzenie Laguerre'a 446

ROZDZIAŁ XVIII. KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA I DRUGIEJ KLASY.

§ 85. Klasyfikacja rzutowa krzywych drugiego stopnia i drugiej klasy 449

§ 86. Styczne i punkty styczności 451

§ 87. Dualizm tworów płaskich drugiego stopnia 453

§ 88. Biegunowa i biegun 459
1. Biegunowe we współrzędnych rzutowych. 2. Trójkąt samobiegunowy.

§ 89. Przedstawienie parametryczne i pęk stożkowych 465
1. Przedstawienie parametryczne. 2. Pęk stożkowych

§ 90. Twierdzenia i konstrukcje Steinera 470
1. Twierdzenia Steinera. 2. Konstrukcje Steinera.

§ 91. Twierdzenia Pascala i Brianchona 476

ROZDZIAŁ XIX. KWADRYKI I POWIERZCHNIE DRUGIEJ KLASY.

§ 92. Klasyfikacja rzutowa kwadryk 481

§ 93. Powierzchnie drugiej klasy 483

§ 94. Płaszczyzna biegunowa i biegun 487

§ 95. Tworzenie kwadryk przez pęki płaszczyzn 489

Str.

PRZYPIS I. WYZNACZNIKI, RÓWNANIA LINIOWE I FORMY KWADRATOWE.

§ 1. Wyznaczniki 492
1. Permutacje. 2. Określenie macierzy i wyznacznika. 3. Własności wyznaczników.

§ 2. Równania liniowe 499
1. Układ Cramera. 2. Układ ogólniejszy. 3. Rząd macierzy. 4. Twierdzenie Capelliego i Kroneckera.

§ 3. Przekształcenia liniowe i mnożenie macierzy 509
1. Mnożenie macierzy kwadratowych. 2. Macierz odwrotna. 3. Mnożenie macierzy prostokątnych. 4. Macierze ortogonalne.

§ 4. Formy dwuliniowe i kwadratowe 516
1. Określenia. 2. Przekształcenia liniowe form kwadratowych. 3. Sprowadzenie formy kwadratowej do sumy kwadratów. 4. Twierdzenie o bezwładności form kwadratowych.

§ 5. Przekształcenia ortogonalne macierzy kwadratowych 526

PRZYPIS II. ILOCZYN WEKTOROWY 535
1. Określenie. 2. Najprostsze własności. 3. Składowe iloczynu wektorowego. 4. Iloczyn mieszany wektorów. 5. Odległość między dwiema prostymi skośnymi.

DODATEK. ZADANIA 541

SKOROWIDZ NAZW 610