En faisant tendre le point $z$ vers un point arbitraire $t \neq c_\nu$ sur $L$, on aura, d'après les formules de Plemelj, pour la fonction $\mu(\tau)$ une équation intégrale de la forme

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^{m-1}t'\mu(\tau)\,d\sigma}{\tau^{m-1}(\tau-t)} = \frac{t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)}{(-1)^m(m-1)!\pi i}. \tag{25}$$

D'après la théorie de Vécoua, cette équation est équivalente à l'équation intégrale réelle

$$\mu(t)+\int_L \mathrm{re}\left[\frac{t^{m-1}t'}{\pi i\tau^{m-1}(\tau-t)}\right]\mu(\tau)\,d\sigma = \mathrm{re}\left[\frac{t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)}{(-1)^m\pi i(m-1)!}\right] \tag{25'}$$

dont le noyau admet une faible singularité. Elle met en évidence le fait que la fonction $\mu(\tau)$ appartient à la classe $\mathfrak{H}_a^{h'}(c_{k_1},\ldots,c_{k_q})$ si la dérivée $\Phi^{(m)}(z)$ de la fonction donnée appartient à la classe $H_a^h(c_{k_1},\ldots,c_{k_q})$.

### Travaux cités


[1] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinues dans la théorie des fonctions analytiques (résumé)*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Sér. des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 311-317, ou: Journal of Mathematics and Mechanics, Indiana University, 1960.

[2] I. N. Vécoua, *Sur une nouvelle représentation intégrale des fonctions analytiques* (en russe), Comptes Rendus de l'Académie Géorgienne des Sciences, t. II, N° 6 (1941), p. 477-484.

[3] N. J. Muskhelishvili, *Singular integral equations*, P. Noordhoff, N. V. Groningen — Holland 1953.



INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES


*Reçu par la Rédaction le 14. 10. 1959*


ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)


# Le trièdre de Frenet aux points d'inflexion d'une courbe

par S. Gołąb (Kraków)

Les démonstrations de l'existence des notions classiques de la géométrie différentielle des courbes et des surfaces exigent certaines hypothèses. Ces hypothèses présentent, d'une part, le caractère d'une certaine régularité de la représentation analytique de l'être envisagé, d'autre part, elles possèdent le caractère de certaines inégalités servant à exclure les points singuliers qui peuvent se présenter malgré la haute régularité de la représentation analytique. A titre d'un simple exemple, rappelons que pour assurer l'existence d'une tangente au sens ordinaire en un point donné (le contingent au sens de M. G. Bouligand doit contenir en ce point deux rayons opposés) il suffit de supposer que la représentation analytique (sous forme vectorielle) de la courbe

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u) \tag{1}$$

(où $\boldsymbol{r}$ désigne le rayon-vecteur du point mobile de la courbe et $u$ est un paramètre arbitraire) est de classe $C_1^*$, c'est-à-dire que la dérivée $d\boldsymbol{r}/du$ est continue et qu'on a, en outre,

$$|d\boldsymbol{r}/du| > 0. \tag{2}$$

L'hypothèse $C_1$, admise sans que la condition supplémentaire (2) soit satisfaite, n'exclut pas l'existence d'un point singulier où la tangente peut ne pas exister. D'une façon analogue, pour l'existence du trièdre de Frenet (dans ce but il suffit qu'en plus de la tangente existe la normale principale) il suffit que la représentation soit de classe $C_2^{**}$, c'est-à-dire que la seconde dérivée $d^2\boldsymbol{r}/du^2$ soit continue et que les vecteurs $d\boldsymbol{r}/du$, $d^2\boldsymbol{r}/du^2$ soient linéairement indépendants.

Si la courbe (1) est de classe $C_1^*$ et $C_2$, mais n'est pas de classe $C_2^{**}$ au point $u = u_0$, c'est-à-dire si le produit vectoriel

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{du}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{du^2} \tag{3}$$

est nul au point $u_0$, la courbe admet en ce point un vecteur tangent $\boldsymbol{t}_0$, mais elle peut ne pas avoir de vecteur normal principal $\boldsymbol{n}_0$. Les points où s'annule le vecteur (3) sont appelés *points d'inflexion de premier ordre*. Si le point $u_0$ est un point d'inflexion isolé et s'il existe une position limite du vecteur normal principal $\boldsymbol{n}$, quand $u \to u_0$, on peut prendre par définition cette position limite pour deuxième vecteur du trièdre de Frenet et, par conséquent, on peut définir au point $u_0$ le trièdre de Frenet tout entier.

Il est facile de construire une courbe admettant au point $u_0$ une tangente, mais n'admettant pas en même temps de plan osculateur, dans ce sens que le plan mené par le vecteur tangent $\boldsymbol{t}_0$ et un point voisin de la courbe n'a pas de position limite quand $u \to u_0$.

Il est un peu plus difficile de construire une courbe de classe $C_1^*$ et $C_2$ pour laquelle le trièdre de Frenet en un point voisin $u$ n'admette pas de position limite pour $u \to u_0$. Nous donnons ci-dessous un tel exemple et nous démontrons en outre un théorème fournissant, sous les hypothèses $C_1^*$ et $C_2$ (mais non pas $C_2^{**}$) et sous une hypothèse additionnelle, une condition suffisante pour que le trièdre de Frenet admette une position limite.

Nous posons

$$\omega(t) = \sin\frac{1}{t}, \qquad t \neq 0 \tag{4}$$

et

$$\lambda(t) = t\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\omega(t)\right), \qquad \mu(t) = t\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\omega(t)-\tfrac{1}{16}\omega^2(t)}, \qquad \nu(t) = -\tfrac{1}{2}t \tag{5}$$

en admettant, à titre de convention additionnelle, que

$$\lambda(0) = \mu(0) = 0. \tag{6}$$

Remarquons que l'expression sous le radical est positive pour un intervalle

$$0 < |t| \leqslant \delta$$

et, par conséquent, les fonctions $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ sont continues dans l'intervalle $(-\delta, +\delta)$.

On démontre sans difficulté que les intégrales généralisées

$$\int_0^t \omega(t)\,dt, \qquad \int_0^t \omega^2(t)\,dt$$

sont finies et que les fonctions

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du, \qquad M(t) = \int_0^t \mu(u)\,du \tag{7}$$



sont continues dans l'intervalle $(-\delta, +\delta)$. Posons enfin

$$x(t) = \int_0^t \Lambda(u)\,du, \qquad y(t) = \int_0^t M(u)\,du, \qquad z(t) = t - \frac{t^3}{12}. \tag{8}$$

La courbe $C$ définie par l'intermédiaire des équations

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \tag{9}$$

où les fonctions $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont définies par les formules (8), sera de classe $C_2^*$ pour $\delta$ suffisamment petit. Le point $t = 0$ est pour elle un point d'inflexion (du premier ordre), car

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \to 1 \quad \text{pour} \quad t \to 0 \tag{10}$$

tandis que

$$x''(t) = \lambda(t) \to 0, \qquad y''(t) = \mu(t) \to 0, \qquad z''(t) \to 0 \quad \text{pour} \quad t \to 0. \tag{11}$$

Calculons les composantes du vecteur binormal $\boldsymbol{b}$ pour $t \neq 0$. Nous désignons par $W_1$, $W_2$, $W_3$ les mineurs correspondants de la matrice

$$\begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

En appliquant aux intégrales (7) le théorème de la moyenne nous pouvons écrire

$$\Lambda = t^2\Phi(t), \qquad M = t^2\Psi(t), \tag{13}$$

où les fonctions $\Phi$ et $\Psi$ sont en tout cas bornées. La matrice (12) prend la forme

$$\begin{bmatrix} t^2\Phi(t) & t^2\Psi(t) & 1-\frac{1}{4}t^2 \\ t(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\omega) & t\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\omega-\frac{1}{16}\omega^2} & -\frac{1}{2}t \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons

$$W_1 = -t\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\omega-\tfrac{1}{16}\omega^2} + t^3\Omega_1(t),$$

$$W_2 = t(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\omega) + t^3\Omega_2(t), \qquad W_3 = t^3\Omega_3(t),$$

où les fonctions $\Omega_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ sont bornées. Nous avons donc $W_1^2+W_2^2+W_3^2 = t^2(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\omega-\frac{1}{16}\omega^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\omega+\frac{1}{16}\omega^2)+t^4\Omega_0(t) = \frac{3}{4}t^2+t^4\Omega_0(t)$, où $\Omega_0(t)$ est une fonction bornée. Le vecteur binormal a les composantes

$$\frac{W_1}{\sqrt{W_1^2+W_2^2+W_3^2}}, \qquad \frac{W_2}{\sqrt{W_1^2+W_2^2+W_3^2}}, \qquad \frac{W_3}{\sqrt{W_1^2+W_2^2+W_3^2}}$$

alors pour $t > 0$

$$\frac{-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\omega-\frac{1}{16}\omega^2}+t^2\Omega_1}{\sqrt{\frac{3}{4}+t^2\Omega_0}}, \quad \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\omega+t^2\Omega_2}{\sqrt{\frac{3}{4}+t^2\Omega_0}}, \quad \frac{t^2\Omega_3}{\sqrt{\frac{3}{4}+t^2\Omega_0}}.$$

Comme les expressions $t^2\Omega_1, t^2\Omega_2, t^2\Omega_3, t^2\Omega_0$ tendent vers zéro quand $t \to 0$, il s'ensuit que

$$\frac{W_3}{\sqrt{W_1^2+W_2^2+W_3^2}} \to 0$$

tandis que, comme $\omega$ n'admet pas de limite et oscille de $-1$ à $+1$, les deux premiers quotients n'ont pas de limite et, par suite, le vecteur binormal n'admet pas de position limite pour $t \to 0$. Par conséquent le trièdre de Frenet n'admet pas de position limite, c. q. f. d.

Remarquons que la courbure (première) $\varkappa(t)$ de la courbe $C$ tend vers zéro, quand $t \to 0$.

Nous passons maintenant à l'énoncé du théorème. Soit une courbe $C$ définie par les équations

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad -\delta \leqslant t \leqslant +\delta$$

et supposons que cette courbe soit de classe $C_2^{**}$ pour $t \neq 0$ et de classe $C_2^*$ au point $t = 0$. Cela signifie que les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ ont des dérivées secondes continues. Les dérivées premières satisfont à l'inégalité

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2 > 0$$

dans tout l'intervalle $\langle -\delta, +\delta\rangle$. Pour $t \neq 0$ la matrice (12) est d'ordre deux, tandis que pour $t = 0$ elle est d'ordre un. Dans ces conditions la courbe $C$ est rectifiable, nous pouvons donc introduire l'arc comme paramètre naturel; nous supposons que $t$ représente déjà ce paramètre naturel. Il est bien connu des éléments de la géométrie différentielle que dans ce cas, la condition pour l'existence d'un point d'inflexion est:

$$x''(0) = y''(0) = z''(0) = 0. \tag{14}$$

Les fonctions $x''(t), y''(t), z''(t)$ sont donc des fonctions infiniment petites au voisinage du point $t = 0$.

THÉORÈME. *Dans les hypothèses enoncées ci-dessus, si nous admettons que les fonctions $x''(t), y''(t), z''(t)$ sont dans le voisinage $(0, \delta)$ infiniment petites d'ordre déterminé, il existe une position limite du trièdre de Frenet quand $t \to 0+0$.*



Démonstration. Pour prouver le théorème il suffit de montrer que le vecteur normal principal $\boldsymbol{n}$ admet une position limite quand $t \to 0+0$. Dans ce but il suffit d'établir que les trois quotients

$$x''/D, \quad y''/D, \quad z''/D, \tag{15}$$

où

$$D = \sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2}, \tag{16}$$

admettent des limites finies. La démonstration de cette circonstance est si simple qu'elle peut être laissée au lecteur. Nous établirons cependant davantage: nous déduirons, en effet, certaines relations entre les ordres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des infiniment petits $x''$, $y''$, $z''$ et nous déterminerons le trièdre de Frenet au point $t = 0$ en fonction des nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et des limites $x''/t^\alpha, y''/t^\beta, z''/t^\gamma$. Dans la démonstration nous nous appuyerons sur le lemme bien connu suivant.

LEMME. *Si la fonction continue $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre $r$ au voisinage du point $x = 0$, la fonction*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

*est un infiniment petit d'ordre $r+1$ au voisinage de ce point.*

Dans la suite nous désignerons par $\varepsilon_i(t)$ les fonctions qui sont infiniment petites au voisinage du point $t = 0$.

Nous admettons un système des coordonnées $x$, $y$, $z$ tel que les relations

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad x'(1) = 1, \quad y'(0) = z'(0) = 0 \tag{17}$$

soient satisfaites. Selon l'hypothèse nous pouvons écrire

$$x''(t) = t^\alpha(-\varrho+\varepsilon_1), \quad y''(t) = t^\beta(\sigma+\varepsilon_2) \quad \text{pour} \quad t \in (0, \delta) \tag{18}$$

où $\varrho$, $\sigma$ sont des constantes différentes de zéro. Les nombres $\alpha$, $\beta$ sont évidemment positifs. D'après l'hypothèse (17) et le lemme nous pouvons écrire

$$x'(t) = 1+\left(-\frac{\varrho}{\alpha+1}+\varepsilon_3\right)t^{\alpha+1}, \quad y'(t) = \left(\frac{\sigma}{\beta+1}+\varepsilon_4\right)t^{\beta+1}. \tag{19}$$

Comme le paramètre $t$ est l'arc de la courbe $C$, on a

$$x'^2+y'^2+z'^2 = 1, \tag{20}$$

donc

$$|x'(t)| \leqslant 1$$

d'où résulte, en vertu des relations $\alpha+1>0$, $\varrho\neq 0$, $\varepsilon_3\to 0$, que

$$\varrho>0. \tag{21}$$

De la relation (20) nous tirons

$$z'=\eta\sqrt{1-x'^2-y'^2}\qquad(\eta^2=1)$$

ce qui, rapproché de (19), donne

$$z'=\eta\sqrt{2t^{\alpha+1}\left[\frac{\varrho}{\alpha+1}-\varepsilon_3\right]-t^{2\alpha+2}\left[\left(\frac{\varrho}{\alpha+1}\right)^2+\varepsilon_5\right]-t^{2\beta+2}\left[\left(\frac{\sigma}{\beta+1}\right)^2+\varepsilon_6\right]}. \tag{22}$$

Comme l'expression sous le signe du radical doit être non négative, nous obtenons une condition (nécessaire) sous forme de l'alternative

$$2\beta+2>\alpha+1$$

(et dans ce cas le nombre $\sigma$ peut être arbitraire), ou bien

$$2\beta+2=\alpha+1,$$

et dans ce cas on doit encore avoir l'inégalité

$$\frac{2\varrho}{\alpha+1}>\left(\frac{\sigma}{\beta+1}\right)^2.$$

Nous envisagerons dans la suite les deux cas suivants:

(I) $$2\beta>\alpha-1,$$

(II) $$\beta=\tfrac{1}{2}(\alpha-1)\quad\text{et}\quad 0<|\sigma|<\tfrac{1}{2}\sqrt{2\varrho(\alpha+1)}.$$

Remarque. Comme $2\alpha+2>\alpha+1$ pour chaque $\alpha>0$, le deuxième terme sous le radical ne conduit à aucune condition.

Dans tous les cas nous constatons que la fonction $z'(t)$ est un infiniment petit d'odre $\frac{1}{2}(\alpha+1)$. Comme $z''$ est, d'après l'hypothèse, un infiniment petit d'ordre déterminé, il doit être un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}(\alpha+1)-1=\frac{1}{2}(\alpha-1)$, d'où résulte, en particulier, l'inégalité

$$\alpha>1.$$

Puisque

$$\frac{z'(t)}{t^{(\alpha+1)/2}}=\tau+\varepsilon_7,$$



où

$$\tau=\begin{cases}\eta\sqrt{\dfrac{2\varrho}{\alpha+1}} & \text{pour}\quad \beta>\dfrac{\alpha-1}{2},\\[2ex] \eta\sqrt{\dfrac{2\varrho}{\alpha+1}-\dfrac{4\sigma^2}{(\alpha+1)^2}} & \text{pour}\quad \beta=\dfrac{\alpha-1}{2}\end{cases}$$

nous avons (toujours en vertu du lemme)

$$z''(t)=t^{(\alpha-1)/2}[\tfrac{1}{2}\tau(\alpha+1)+\varepsilon_8]. \tag{23}$$

Nous allons maintenant examiner la position limite du vecteur $\boldsymbol{n}$ de composantes (15). D'après les formules (18) et (23) nous avons

$$D=\sqrt{t^{2\alpha}(\varrho^2+\varepsilon_9)+t^{2\beta}(\sigma^2+\varepsilon_{10})+t^{\alpha-1}[\tfrac{1}{4}\tau^2(\alpha+1)^2+\varepsilon_{11}]}. \tag{24}$$

Pour calculer l'ordre de l'infiniment petit $D$ il s'agit de comparer les trois nombres

$$2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha-1. \tag{25}$$

Or, nous avons toujours $\alpha-1<2\alpha$.

Dans le cas (I) on a $\alpha-1<2\beta$, donc le plus petit des nombres (25) est $\alpha-1$; la fonction $D$ est donc un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}(\alpha-1)$. De là découlent les relations

$$x''(t)/D\to 0,\qquad y''(t)/D\to 0.$$

Par contre

$$z''(t)/D\to\eta$$

et, par conséquent, *le vecteur $\boldsymbol{n}$ admet une limite pour $t\to 0+0$. Ce vecteur-limite est confondu avec l'axe des $z$ du système des coordonnées.*

Dans le cas (II) les nombres (25) sont égaux aux nombres

$$2\alpha,\ \alpha-1,\ \alpha-1$$

et $D$ est aussi un infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}(\alpha-1)$. Mais, dans ce cas, seulement

$$x''(t)/D\to 0,$$

tandis que

$$\frac{y''(t)}{D}\to\frac{(\alpha+1)\sigma}{\sqrt{(\alpha+1)\sigma^2+2\varrho(\alpha+1)-4\sigma^2}}\neq 0,$$

$$\frac{z''(t)}{D}\to\frac{\tau(\alpha+1)^2}{2\sqrt{(\alpha+1)^2\sigma^2+2\varrho(\alpha+1)-4\sigma^2}}\neq 0.$$

Alors *le vecteur-limite du vecteur $\boldsymbol{n}$ n'est pas confondu avec l'axe des $z$.*

On peut, en outre, prouver *qu'il existe au point $t = 0$ un plan osculateur* comme position limite du plan variable contenant la tangente au point $t = 0$ et un point voisin de la courbe et que la limite du vecteur $\boldsymbol{n}$ est contenue dans ce plan osculateur.

Remarque 1. On pourrait penser que si la courbe est de classe $C_3^*$ et admet pour $t = 0$ un point d'inflexion, la position limite du vecteur $\boldsymbol{n}$ pour $t \to 0$ peut être obtenue en appliquant le théorème de l'Hôspital. Nous allons montrer qu'il n'en est rien. En prenant l'arc pour paramètre nous avons

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

d'où

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0, \quad x'x''' + y'y''' + z'z''' + x''^2 + y''^2 + z''^2 = 0.$$

Admettons que l'on ait

$$x_0' = 1, \quad y_0' = z_0' = 0$$

et que le point $t_0$ soit un point d'inflexion, c'est-à-dire que

$$x_0'' = y_0'' = z_0'' = 0.$$

Si les points voisins ne sont pas des points d'inflexion, le vecteur $\boldsymbol{n}$ a les composantes

$$x''/D, \quad y''/D, \quad z''/D.$$

Comme $D_0 = 0$, on a

$$x_0'x_0''' + y_0'y_0''' + z_0'z_0''' = 0$$

ou

$$x_0'x_0''' = 0,$$

d'où l'on tire

$$x_0''' = 0.$$

Supposons que le vecteur $(x_0''', y_0''', z_0''')$ ne soit pas un vecteur nul. Soit p. ex. $y_0''' \neq 0$. En appliquant la régle de l'Hôspital au quotient $y''/D$ nous trouvons que le numérateur a une limite non nulle, tandis que la dérivée du dénominateur

$$D' = \frac{x''x''' + y''y''' + z''z'''}{D}$$

est encore une expression indéfinie du type $0/0$. Ainsi, l'application de la règle de l'Hôspital ne mène pas au résultat cherché. Vis-à-vis de ce fait notre théorème acquiert une certaine importance.



Remarque 2. Dans l'exemple cité plus haut on a

$$\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \sqrt{t^2\left\{\frac{1}{4} + \frac{\omega}{4} + \frac{\omega^2}{16} + \frac{1}{2} - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega^2}{16} + \frac{1}{4}\right\}} = |t|$$

donc le module du vecteur $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ est un infiniment petit d'odre déterminé (un). Cet exemple montre que notre théorème cesse d'être vrai si l'on remplace l'hypothèse que $x'', y'', z''$ sont des infiniments petits d'ordres déterminés par l'hypothèse que $|\boldsymbol{r}''|$ est un infiniment petit d'ordre déterminé.

Remarque 3. Il peut arriver que dans nos hypothèses les passages à la limite pour $t \to 0+0$ et $t \to 0-0$ fournissent des ordres $\alpha$ et $\beta$ différents ou bien, les ordres $\alpha$, $\beta$ étant les mêmes, des limites différentes pour les expressions

$$x''/|t|^\alpha \quad \text{et} \quad y''/|t|^\beta.$$

Dans ce cas les limites $\lim\limits_{t\to 0+0} \boldsymbol{n}$ et $\lim\limits_{t\to 0-0} \boldsymbol{n}$ sont en général différentes et, par conséquent, le trièdre de Frenet ne peut pas être défini univoquement au point $t = 0$.

*Reçu par la Rédaction le 7. 5. 1959*