The following lemma is proved in [1].

LEMMA. *Let S be a semigroup of words over the alphabet A. Then if $x, y \in l^1(S)\setminus\{0\}$, $x(\emptyset) = y(\emptyset) = 0$ and $x * y = y * x$, then* $\operatorname{lett}(\operatorname{supp} x) = \operatorname{lett}(\operatorname{supp} y)$, *where* $\operatorname{supp} x$ *denotes the support of* x *and* $\operatorname{lett}(E)$ *denotes the set of letters appearing in words from* E.

By the Lemma for any commutative subalgebra Y of X there is a finite $B \subset A$ such that if $x \in Y$ then $\operatorname{supp} x \subseteq S(B)$, so $\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2^{\operatorname{card} B}\|x\|$. This demonstrates that on commutative subalgebras both topologies coincide, i.e. $\|\cdot\|$ is equivalent to $\|\cdot\|_1$. On the other hand, the unit ball of $(X, \|\cdot\|_1)$ does not contain any ball of $(X, \|\cdot\|)$. To see this let $\{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq A$ and consider $x_n = n^{-1}\delta_{a_1 a_2 \ldots a_n}$, where δ_s denotes the function equal to 1 at s and 0 elsewhere. We have $\|x_n\| = n^{-1}$, while $\|x_n\|_1 = 2^n n^{-1}$.

2. The example $(X, \|\cdot\|)$ given above provides also a negative solution to another problem (Problem 16) from [2]:

Suppose that X is a topological algebra and all its commutative subalgebras are Banach ones. Does it follow that X is a Banach algebra?

In fact, for any commutative subalgebra Y of X there is a finite subset B of A such that if $x \in Y$ then $\operatorname{supp} x \subseteq S(B)$. So $\{x \in X: \operatorname{supp} x \in S(B)\}$ is a Banach algebra in $\|\cdot\|$-norm. So any commutative closed subalgebra is a Banach algebra but obviously $(X, \|\cdot\|)$ is not a Banach algebra (recall that the set A is infinite).

Moreover, our example $(X, \|\cdot\|)$ is locally convex, which solves negatively Problem 15 of [2].

References

[1] B. Aniszczyk, R. Frankiewicz and C. Ryll-Nardzewski, *An example of a nonseparable Banach algebra without nonseparable commutative subalgebras*, Studia Math. 93 (1989), 287–289.

[2] W. Żelazko, *On certain open problems in topological algebras*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, in press.

Bohdan Aniszczyk:

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Kopernika 18, 51-617 Wrocław, Poland

Ryszard Frankiewicz:

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Czesław Ryll-Nardzewski:

INSTITUTE OF MATHEMATICS
TECHNICAL UNIVERSITY OF WROCŁAW
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

Received April 23, 1990 (2681)

STUDIA MATHEMATICA 98 (3) (1991)

Equivalence et orthogonalité des mesures aléatoires engendrées par martingales positives homogènes

par

AI HUA FAN (Orsay)

Abstract. A positive homogeneous indexed martingale yields an operator which transforms a measure into a random measure. We compare the images of a measure by two such operators and demonstrate that either they are mutually singular or one is absolutely continuous with respect to the other. We also obtain a sufficient condition for one to be L^p-integrable with respect to the other. We give applications of such results to: Riesz products, random coverings, Mandelbrot's martingales, exponentiation of Gaussian processes etc.

Introduction. La source du présent travail est le fameux théorème dichotomique de Kakutani [10]: Soient μ_n et ν_n deux probabilités définies sur un espace mesurable $(\Omega_n, \mathscr{B}_n)$ $(n \geqslant 1)$. Supposons que ν_n soit absolument continue par rapport à μ_n. Alors la mesure produit $\otimes \nu_n$ est soit absolument continue par rapport à $\otimes \mu_n$, soit singulière par rapport à $\otimes \mu_n$, et le premier cas a lieu si et seulement si

$$\prod \int (d\nu_n/d\mu_n)^{1/2}\, d\mu_n > 0$$

où $d\nu_n/d\mu_n$ désigne la dérivée de Radon–Nikodym.

Autour de ce théorème beaucoup de travaux ont été réalisés dont une préoccupation majeure est de se dégager de la forte indépendance intervenant dans les hypothèses du théorème. Cette indépendance est que les fonctions $d\nu_n/d\mu_n$, considérées comme des variables définies sur $\otimes \Omega_n$, sont indépendantes par rapport à $\otimes \nu_n$ ainsi qu'à $\otimes \mu_n$.

Cela est possible comme l'indiquent les produits de Riesz qu'ont étudiés Brown–Moran [2], Peyrière [13, 14], Kilmer–Saeki [12], et les autres produits infinis qui ont été étudiés par Brown–Moran [1], Kanter [11], Ritter [15].

Les mesures dont nous nous préoccupons sont des mesures aléatoires qui se fabriquent de la façon que Kahane a décrite dans [7], ce que l'on appelle multiplication aléatoire. Ce cadre est vaste. On peut y encadrer tous les problèmes suivants: produits de Riesz aléatoires, recouvrements aléatoires, martingales de Mandelbrot, exponentiations de processus gaussiens etc.

1980 *Mathematics Subject Classification*: 28A99, 42A55, 60G42, 60G57.

Key words and phrases: homogeneous martingales, random measures, absolute continuity and singularity of measures, Riesz products.

On se demande quand deux telles measures sont p.s. absolument continues l'une par rapport à l'autre, quand elles sont p.s. mutuellement singulières. On y répond que la situation est dichotomique si les martingales produisant ces mesures sont homogènes. L'idée pour démontrer ceci est, fondamentalement, celle de Kakutani. Un autre ingrédient important pour ce faire est une probabilité auxiliaire qui, introduite par Peyrière [9] pour la première fois afin d'étudier les martingales de Mandelbrot, a fait marcher beaucoup de choses ([3], [4], [5], [8]).

Voici l'organisation des matières. Au § 1 on rappelle brièvement la théorie de multiplication de Kahane, ceci suivie des faits nécessaires pour la démonstration du théorème principal que l'on fait au § 2. On décrit au § 3 une classe bien générale de martingales homogènes dont la homogénéité n'est autre que l'invariance par translation sur un groupe. Le reste traite des applications. Par exemple, les §§ 4–5 sont consacrés à l'étude d'opérateurs de Riesz, § 6, § 7 et § 8 sont consacrés respectivement à celle de martingales de recouvrement, de martingales de Mandelbrot et d'exponentiation de processus gaussiens.

§ 1. Préliminaires. Le présent travail a pour cadre la théorie de martingales positives indexées par un espace localement compact. Rappelons donc tout d'abord cette théorie de Kahane [7]. Précisement dit, on va étudier une classe de martingales assez générales ayant en partage une certaine homogénéité et comprenant presque toutes celles que l'on a pu rencontrées antérieurement. A la suite de ce rappel, nous allons faire un bilan des faits bien connus ou simples à établir qui serviront soit à l'établissement de la continuité absolue ou de la singularité mutuelle entre deux mesures, soit à l'assurance de la convergence en moyenne de certaines suites de variables.

On se donne un espace localement compact T et un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ avec une suite croissante de sous-tribus de $\mathfrak{F}$, $(\mathfrak{F}_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Désignons par $M^+(T)$ l'ensemble de toutes les mesures σ-finies positives portées par T. Considérons une suite de poids

$$P_n = P_n(t) = P_n(t, \omega) \qquad (n\in\mathbf{N},\ t\in T,\ \omega\in\Omega)$$

où les fonctions $P_n(\cdot, \omega)$ sont boréliennes et positives pour tout ω, et sont indépendantes sur Ω. Supposons que

$$\mathbf{E}P_n(t) = 1 \qquad (\forall n\in\mathbf{N},\ \forall t\in T)$$

(ce que l'on appelle la condition de normalisation). Posons alors

$$Q_n(t) = P_1(t)P_2(t)\ldots P_n(t).$$

Etant donné une mesure $\sigma\in M^+(T)$, $Q_n\sigma$ désigne la mesure aléatoire dont la densité par rapport à σ est $Q_n(t)$. Grâce à l'indépendance et la normalisation, les Q_n forment une martingale (positive). Nous nous intéressons à la limite de la suite $Q_n\sigma$. Voici des faits fondamentaux dus à J.-P. Kahane [7].

Proposition 1 ([7]). *Presque sûrement la suite $Q_n\sigma$ converge faiblement vers une mesure aléatoire S.*

On notera $S = Q\sigma$. Alors Q est un opérateur qui transforme des mesures en mesures aléatoires. Il y a deux cas extrêmes: $Q\sigma = 0$ p.s. et $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$. Dans le premier cas on dit que Q est *dégénéré sur* σ; dans le deuxième on dit que Q *agit pleinement sur* σ.

Proposition 2 ([7]). *L'opérateur* $\mathbf{E}Q$ *est une projection. Ainsi toute mesure est décomposée d'une façon unique en somme de deux mesures sur l'une desquelles Q agit pleinement et sur l'autre Q est dégénéré.*

Si pour tout $n\in\mathbf{N}$ la distribution de $P_n(t, \omega)$ ne dépend pas de $t\,(\in T)$, on dit que $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une *suite de poids homogènes* et la martingale correspondante $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une *martingale homogène.* Pour une telle martingale, un outil puissant est la probabilité de Peyrière que l'on définit maintenant. Soit σ une probabilité vérifiant $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$. La *probabilité de Peyrière* associée à $Q\sigma$ est la probabilité q définie sur $T\times\Omega$ par

$$\int_{T\times\Omega} f(t, \omega)\,d\mathrm{q}(t, \omega) = \mathbf{E}\int_T f(t, \omega)\,dQ\sigma(t)$$

où f est une fonction positive mesurable. Nous écrirons ainsi $\mathbf{E}_{\mathrm{q}}f$ pour le premier membre de l'expression précédente.

Proposition 3 ([7]). *Si* $\mathbf{E}Q\sigma = \sigma$ *et que* $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une martingale homogène, les P_n sont* q*-indépendantes.*

Tout ce que l'on va faire est de comparer deux opérateurs provenant de deux martingales homogènes. Il est bon ici de préciser le cadre où on travaille. Soient P'_n et P''_n deux suites de poids homogènes. Supposons de plus que la suite de vecteurs $\mathbf{P}_n = (P'_n, P''_n)$ soit indépendante et que la distribution de $\mathbf{P}_n$ ne dépende pas de $t\,(\in T)$. On dira tout simplement que $\mathbf{P}_n$ est une *suite de poids homogène (à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$). Maintenant on peut indiquer une formule très utile dans la suite.

Proposition 4. *Soit* $\mathbf{P}_n = (P'_n, P''_n)$ *une suite de poids homogène. Soit* $\varphi\in L^1(\sigma)$ *où* σ *est une probabilité telle que* $\mathbf{E}Q'\sigma = \sigma$. *On a*

$$(\mathrm{F}_1)\qquad \mathbf{E}_{\mathrm{q}'}\varphi\prod_{n=1}^{N} f_n(P'_n, P''_n) = \int\varphi\,d\sigma\cdot\prod_{n=1}^{N}\mathbf{E}P'_n f_n(P'_n, P''_n)$$

pour toutes fonctions $f_1, \ldots, f_N$ positives, q′ *étant la probabilité de Peyrière associée à $Q'\sigma$.*

Preuve. Soit $Q'_{(N)}$ l'opérateur provenant des poids P'_m $(m\geqslant N+1)$. D'après la définition de q′ et l'homogénéité de $\mathbf{P}_n$, on sait que le membre à gauche de l'expression précédente est égal à

$$\prod_{n=1}^{N}\mathbf{E}P'_n f_n(P'_n, P''_n)\cdot\mathbf{E}\int\varphi\,dQ'_{(N)}\sigma.$$

Or il est clair que si $\mathbf{E}Q'\sigma = \sigma$ on a aussi $\mathbf{E}Q'\varphi\sigma = \varphi\sigma$ pour toute $\varphi \in L^1(\sigma)$, $\mathbf{E}Q'_{(N)}\sigma = \sigma$ pour tout $N \in \mathbf{N}$; on a donc

$$\mathbf{E}\int \varphi\, dQ'_{(N)}\sigma = \int \varphi\, d\sigma. \blacksquare$$

Sous les hypothèses de la proposition précédente on sait en particulier que les $P_n = (P'_n, P''_n)$ sont q'-indépendants et que pour toute fonction positive f on a

$$(\mathrm{F}_2) \qquad \mathbf{E}_{q'} f(P'_n, P''_n) = \mathbf{E} P'_n f(P'_n, P''_n).$$

Voici quelques faits connus ou simples qui soit nous serviront comme base d'idées, soit interviendront dans les raisonnements. Les deux premiers dus à Kakutani [10] donnent des critères pour la continuité absolue et la singularité mutuelle de deux mesures. Le quatrième offre une identification de deux mesures aléatoires. Et les deux derniers concernent le calcul de la limite de certaines martingales.

Proposition 5. *Soit X_n une suite de variables L^p-intégrables ($p \geq 1$). Si l'on a*

(a) $X_n \geq 0$, $\mathbf{E}X_n^p \leq 1$,
(b) $\sum_{n\geq 1} [1 - \mathbf{E}(X_n X_{n+1})^{p/2}]^{1/2p} < \infty$,

alors X_n converge dans L^p, et de plus $\sum_{n\geq 1} \|X_n - X_{n+1}\|_{L^p} < \infty$.

Proposition 6. *Soient σ et τ deux probabilités. Pour avoir $\sigma \perp \tau$ il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction h non négative mesurable telle que*

$$h > 0 \quad \tau\text{-p.s.}, \qquad \left(\int h\, d\sigma\right)\left(\int h^{-1}\, d\tau\right) < \varepsilon.$$

Les preuves sont simples et d'ailleurs explicitées ([10], [12]) sauf pour $p > 1$. La même démarche que pour $p = 1$ qui est le cas le plus utile s'adapte bien au cas $p > 1$. Il faut néanmoins remarquer l'inégalité suivante:

$$(1 - \sqrt{x})^{2p} \leq 1 + x^p - 2x^{p/2} \qquad (0 \leq x \leq 1,\ p \geq 1).$$

En fait, pour assurer l'appartenance à L^p ($p > 1$), on a

Proposition 7. *Soient μ et ν deux mesures dans $M^+(T)$. Soit $1 < p \leq \infty$. S'il existe un filtre borné (φ_i) dans $L^p(\mu)$ tel $\varphi_i\mu$ tend faiblement vers ν, on a $\nu \in L^p(\mu)$.*

Proposition 8. *Soient μ_ω et ν_ω deux mesures aléatoires sur T. Si pour toute fonction f continue et bornée $\int f\, d\mu_\omega = \int f\, d\nu_\omega$ p.s., on a $\mu_\omega = \nu_\omega$ p.s.*

Prenons une famille dénombrable Φ dense dans l'espace des fonctions continues $C(T)$. Selon l'hypothèse, p.s. pour toute $f \in \Phi$ on a $\int f\, d\mu_\omega = \int f\, d\nu_\omega$, donc $\mu_\omega = \nu_\omega$.

Proposition 9. *Soit $(\mathscr{F}_n)$ une suite croissante de sous-tribus. Si une variable intégrable X est $\mathscr{F}_\infty$-mesurable, $\mathscr{F}_\infty$ étant la tribu engendrée par l'union des $\mathscr{F}_n$ ($n \geq 1$), alors $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X|\mathscr{F}_n) = X$, au sens de p.s. et de L^1.*

Proposition 10. *Soit $\mathscr{F}$ une sous-tribu. Supposons que X_n tend vers X dans L^1 et que $\mathbf{E}(X_n|\mathscr{F})$ converge p.s. Alors on a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n|\mathscr{F}) = \mathbf{E}(X|\mathscr{F})$ dans L^1.*

Nous laissons les vérifications au lecteur.

§2. Critères d'équivalence et d'orthogonalité. Nous nous intéressons désormais exclusivement aux martingales homogènes. Supposons que l'on ait deux suites de poids homogènes P'_n et P''_n qui produisent respectivement deux opérateurs Q' et Q''. Supposons de plus que $P_n = (P'_n, P''_n)$ le soit aussi au sens de la proposition 4. Sous ces hypothèses on a le théorème suivant. C'est notre résultat principal.

Théorème 2.1. *Soient μ et ν deux mesures (probabilités) dans $M^+(T)$.*

(a) *Supposons que $\nu \ll \mu$ et $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$. On a*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\sqrt{P'_n P''_n} > 0 \Rightarrow Q''\nu \ll Q'\mu \text{ p.s. et } \mathbf{E}Q''\nu = \nu.$$

(b) *Les mesures μ et ν étant quelconques, on a toujours*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\sqrt{P'_n P''_n} = 0 \Rightarrow Q''\nu \perp Q'\mu \text{ p.s.}$$

L'hypothèse que les mesures μ et ν soient des probabilités n'est pas essentielle. On peut s'en passer grâce à la σ-finitude de μ et ν.

Dans l'énoncé du théorème on utilise le symbole "$\mu \ll \nu$" pour signifier que la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure ν, et le symbole "$\mu \perp \nu$" pour signifier qu'elles sont mutuellement singulières. A propos, signalons que l'on utilisera le symbole "$\nu \in L^p(\mu)$" ($p \geq 1$) pour dire que la dérivée de Radon–Nikodym de ν par rapport à μ est dans $L^p(\mu)$.

On va diviser la démonstration du théorème en six lemmes. Les cinq premiers servent plutôt à la partie (a), et le sixième à la partie (b).

Supposons $\nu \ll \mu$. Soit φ la dérivée de ν par rapport à μ. Introduisons alors

$$h_n = \varphi \cdot Q''_n / Q'_n \qquad (n \geq 1).$$

Lemme 1. *Si $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$, pour $1 \leq m < n$ on a*

$$\mathbf{E}_{q'} \sqrt{h_m h_n} = \prod_{j=m+1}^{n} \mathbf{E}\sqrt{P'_j P''_j},$$

q' étant la probabilité de Peyrière associée à $Q'\mu$.

Preuve. Remarquons que

$$\sqrt{h_m h_n} = \varphi \cdot \prod_{j=1}^{m} (P''_j / P'_j) \prod_{j=m+1}^{n} \sqrt{P''_j / P'_j}.$$

En utilisant la formule (F_1) et la condition de normalisation, on obtiendra l'égalité désirée. $\blacksquare$

Pour les lemmes 2–5 supposons que l'on ait les conditions de (a).

Lemme 2. *La q'-martingale h_n converge dans $L^1(q')$.*

Preuve. Il est clair que h_n est une martingale par rapport à q'. Prenons une suite sommable de positifs δ_k ($k \geqslant 1$). Comme le produit converge, il existe une suite d'entiers $n_1 < n_2 < \ldots$ telle que

$$\prod_{j=m+1}^{n} \mathbf{E}\sqrt{P'_j P''_j} > 1-\delta_k^2$$

pour $n > m > n_k$. Posons alors $X_k = h_{n_k}$. D'après le lemme 1 et la dernière inégalité, on obtient donc

$$\sum_{k\geqslant 1} [1-\mathbf{E}_{q'}(X_k X_{k+1})^{1/2}]^{1/2} \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \delta_k.$$

Ceci, accompagné de la proposition 5 (avec $p = 1$), montre que la sous-suite X_n converge dans $L^1(q')$. Puisque h_n est une martingale positive, cette convergence de sous-suite implique celle de la suite entière. ∎

Soit alors h_ω la limite de h_n ($n \geqslant 1$).

Lemme 3. *Il existe une suite $n_1 < n_2 < \ldots$ telle que p.s. h_{n_k} converge dans $L^1(Q'\mu)$ vers h_ω.*

Preuve. Selon la dernière preuve et la proposition 5

$$\mathbf{E}\sum_{k\geqslant 1} \|h_{n_k}-h_{n_{k+1}}\|_{L^1(Q'\mu)} = \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{E}_{q'}|h_{n_k}-h_{n_{k+1}}| < \infty,$$

d'où la convergence. Quant à la limite, observons que

$$\mathbf{E}\liminf_{k\to\infty} \int |h_{n_k}-h_\omega|\, dQ'\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathbf{E}_{q'}|h_{n_k}-h_\omega|.$$

Donc le lemme 2 nous dit que la limite est h_ω. ∎

Soit $\mathscr{F}_n$ la sous-tribu engendrée par les variables P'_m, P''_m ($1 \leqslant m \leqslant n$).

Lemme 4. *Pour toute fonction bornée f définie sur T,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(\int f h_\omega\, dQ'\mu | \mathscr{F}_n) = \int f h_\omega\, dQ'\mu$$

au sens de L^1.

Preuve. L'intégrale, i.e. le membre à droite de l'égalité, est une variable dont l'espérance est majorée par $\|f\|_\infty$. Ses espérances conditionnelles par rapport à $\mathscr{F}_n$ forment alors une martingale convergente dans L^1. Remarquons que cette intégrale est mesurable par rapport à $\mathscr{F}_\infty$, la tribu engendrée par l'union des $\mathscr{F}_n$. On peut alors utiliser la proposition 8 pour avoir la conclusion. ∎

Lemme 5. *Pour toute fonction mesurable bornée f définie sur T,*

$$\mathbf{E}(\int f h_\omega\, dQ'\mu | \mathscr{F}_n) = \int f Q''_n \varphi\, d\mu.$$

Preuve. Appliquant consécutivement les lemmes 3 et 2, on peut changer l'ordre des espérances et des limites:

$$\mathbf{E}(\int f h_\omega\, dQ'\mu | \mathscr{F}_n) = \mathbf{E}(\lim_{k\to\infty} \int f h_{n_k}\, dQ'\mu | \mathscr{F}_n) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}(\int f h_{n_k}\, dQ'\mu | \mathscr{F}_n).$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a utilisé la proposition 10. Or, comme $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$ on a, si $n_k \geqslant n$,

$$\mathbf{E}(\int f h_{n_k}\, dQ'\mu | \mathscr{F}_n) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{E}(\int f Q''_{n_k} \prod_{j=n_k+1}^{m} P'_j \varphi\, d\mu | \mathscr{F}_n) = \int f Q''_n \varphi\, d\mu. \ ∎$$

Lemme 6. *Si le produit dans le théorème s'annule, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{q'}\sqrt{h_n} = 0$ (h définie comme avant avec $\varphi = 1$).*

Preuve. Remarquons que $\sqrt{h_n} = \prod_{j=1}^{n} \sqrt{P''_j/P'_j}$. D'après la proposition 4 on a alors $\mathbf{E}_{q'}\sqrt{h_n} = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}\sqrt{P'_j P''_j}$. ∎

Faisons maintenant la synthèse. Supposons que le produit soit positif. D'après les lemmes 4 et 5, pour toute f mesurable bornée on a

$$\lim_{n\to\infty} \int f Q''_n \varphi\, d\mu = \int f h_\omega\, dQ'\mu.$$

Selon la définition de Q'', cela veut dire

$$\int f\, dQ''\varphi\mu = \int f h_\omega\, dQ'\mu.$$

En vertu de la proposition 8 on s'aperçoit que $Q''\varphi\mu = h_\omega Q'\mu$ p.s. Encore le lemme 5, avec le fait que $\mathbf{E}|\int f h_\omega\, dQ'\mu| \leqslant \|f\|_\infty$, entraîne $\mathbf{E}Q''\varphi\sigma = \varphi\sigma$. Ainsi on termine la preuve de (a).

Supposons que le produit s'annule. Pour le moment supposons encore $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$, $\mathbf{E}Q''\nu = \nu$. Le lemme 6 nous permet alors de dire que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{q'}\sqrt{h_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{q''}\sqrt{h_n^{-1}} = 0,$$

q' et q'' étant associées respectivement à $Q'\mu$ et $Q''\nu$. Posons

$$I_n = \int \sqrt{h_n}\, dQ'\mu, \quad J_n = \int \sqrt{h_n^{-1}}\, dQ''\nu.$$

En utilisant le lemme de Fatou et l'inégalité de Schwarz on obtient

$$\mathbf{E}\liminf_{n\to\infty} \sqrt{I_n J_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} (\mathbf{E}_{q'}\sqrt{h_n})^2 (\mathbf{E}_{q''}\sqrt{h_n^{-1}})^2 = 0,$$

d'où le fait que p.s.

$$\liminf_{n\to\infty} I_n J_n = 0.$$

Le deuxième fait à établir est que p.s.

$$\forall n \geqslant 1 \qquad h_n > 0 \quad Q''\nu\text{-p.p.}$$

En effet,

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathbf{E}_{q''} h_n^{-1} = 1.$$

Selon ces deux faits et la proposition 6, on conclut que p.s. $Q'\mu \perp Q''\nu$.

Considérons maintenant le cas où μ et ν sont quelconques. Décomposons-les: $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, de façon que

$$\mathbf{E}Q'\mu_1 = \mu_1, \qquad \mathbf{E}Q''\nu_1 = \nu_1,$$

$$Q'\mu_2 = 0, \qquad Q''\nu_2 = 0.$$

Comme $Q'\mu = \mu_1$ et $Q''\nu = \nu_1$, on peut conclure en utilisant ce que l'on vient de prouver.

En ce qui concerne l'appartenance à L^p $(1 < p < \infty)$ le théorème suivant est alors immédiat. Supposons que $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$ et que

$$\text{(A)} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\sqrt{P'_n P''_n} > 0.$$

D'après le théorème 2.1(a), l'opérateur S_μ: $L^1(\mu) \to L^1(\mathrm{q}')$ défini par $S_\mu \varphi = h_\omega$ est borné. Et même on a la formule suivante:

$$\mathbf{E}\int S_\mu \varphi \, dQ'\mu = \int \varphi \, d\mu.$$

THÉORÈME 2.2. *Supposons que* $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$ *et que l'on ait* (A). *Pour que* S_μ *soit un opérateur borné de* $L^p(\mu)$ *dans* $L^p(\mathrm{q}')$ $(1 < p < \infty)$ *il faut et il suffit que*

$$(\mathrm{B}_p) \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \mathbf{E} P_n''^{p} P_n'^{1-p} < \infty.$$

En particulier, sous l'hypothèse (B_p) *on a, si* $\nu \in L^p(\mu)$, $Q''\nu \in L^p(Q'\mu)$ *p.s.*

Preuve. En effet,

$$\mathbf{E}_{q'} h_n^p = \mathbf{E}\int h_n^p \, dQ'\mu = \int \varphi^p \, d\mu \cdot \prod_{j=1}^{n} \mathbf{E} P_j''^{p} P_j'^{1-p},$$

h_n étant définie tout au debut de cette section. Par là on voit que la condition (B_p) équivaut au fait que la q'-martingale h_n converge dans $L^p(\mathrm{q}')$. ■

Remarque. Sous (A), (B_p) et $\nu \in L^p(\mu)$, a-t-on

$$\mathbf{E}(Q'\mu(T))^p < \infty \Rightarrow \mathbf{E}(Q''\nu(T))^p < \infty?$$

D'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\mathbf{E}(Q''\nu(T))^p \leqslant \mathbf{E}\left(\|Q'\mu\|^{p-1}\int h_\omega^p \, dQ'\mu\right),$$

$\|\cdot\|$ désignant la masse totale de la mesure. Selon l'inégalité de Hölder, le membre à droite est majoré par

$$(\mathbf{E}\|Q'\mu\|^p)^{(p-1)/p}\left[\mathbf{E}\left(\int h_\omega^p \, dQ'\mu\right)^p\right]^{1/p}.$$

La question n'est résolue que lorsqu'on a une condition supplémentaire à sa disposition.

§ 3. Homogénéité provenant de translation. Dans cette section nous présentons une classe de martingales positives homogènes, dont les homogénéités se produisent par translation. Parmi cette classe figurent les produits de Riesz aléatoires généralisés et les martingales de recouvrement, etc.

Soit G un groupe abélien compact avec la mesure de Haar normalisée dt $(= \lambda)$. On se donne une suite de fonctions positives intégrables de L^1-norme 1:

$$p_n(t) \geqslant 0 \quad \lambda\text{-p.p.}, \qquad \int p_n(t)\,dt = 1.$$

Considérons un espace de probabilité (Ω, P), l'espace produit infini de (G, λ):

$$(\Omega, P) = (G, \lambda)^{\mathbf{N}}.$$

Construisons maintenant les poids

$$P_n(t, \omega) = p_n(t + \omega_n) \qquad (n \geqslant 1)$$

où $\omega = (\omega_n) \in \Omega$. Cela veut dire que l'on translate la n-ième fonction par le n-ième élément de ω pour obtenir le n-ième poids. D'après l'invariance de la mesure de Haar, on a la normalisation

$$\mathbf{E}P_n(t) = 1 \qquad \forall t \in G,$$

et de plus, la répartition ne depend pas de t $(\in G)$.

Voici deux exemples.

EXEMPLE 1 (poids de recouvrement). Soit χ_n la fonction indicatrice d'un ouvert O_n du groupe G. On définit

$$p_n(t) = \frac{1 - \chi_n(t)}{1 - v_n}$$

où $v_n = |O_n|$, $|\ |$ signifiant la mesure de Haar.

EXEMPLE 2 (poids de Riesz). Soit $\gamma = (\gamma_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de caractères autres que l'unité du groupe G. Soit $a = (a_n)$ une suite de complexes de modules inférieurs à 1. Posons

$$p_n(t) = 1 + \operatorname{Re} a_n \gamma_n(t).$$

L'opérateur engendré par ces poids sera appelé *opérateur de Riesz*, et l'image d'une mesure par cet opérateur sera appelé *produit de Riesz*.

Si (γ_n) est une suite dissociée ([6]), faisant agir à la mesure de Haar les produits partiels de ces poids déterministes p_n, on obtient le produit de Riesz classique. Mais de la façon aléatoire et translatoire, décrite comme ci-dessus, on généralise aisément ces produits de Riesz classiques dans deux sens. Le premier est que pour définir les produits de Riesz aléatoires, on peut relâcher les hypothèses classiques sur les caractères ("lacunarité des spectres"). Le deuxième est que le produit pourra agir non seulement sur la mesure de Haar mais aussi sur toutes les autres mesures de dimension assez grande (voir § 5).

Un problème fatal et difficile est de savoir si on peut acquérir de vrais mesures, i.e. des mesures non nulles. Ceci équivaut à la convergence dans L^1 de la martingale. On se demande aussi quelles sont les relations entre ces différentes mesures non nulles. On retournera à ces questions.

Revenons au cas général. Abandonnant momentanément le problème de L^1-convergence, nous nous engageons à présent dans l'étude de L^m-convergence, m étant un entier supérieur à 1. Posons

$$K_n^{(m)}(t_1, \ldots, t_m) = \prod_{j=1}^{n} H_{m,j}(t_1, \ldots, t_m) \quad \text{avec}$$

$$H_{m,j}(t_1, \ldots, t_m) = \int \prod_{k=1}^{m} p_j(t_k+t)\,dt.$$

Introduisons particulièrement

$$K_n(t) = \prod_{j=1}^{n} p_j * \check{p}_j(t)$$

où $\check{p}_n(t) = p_n(-t)$. Alors pour $m = 2$, on a $K_n^{(2)}(t, s) = K_n(t-s)$. Remarquons que K_n est une fonction positive et paire.

Théorème 3.1. *Soit $m \geqslant 2$ un entier. Pour toute $\sigma \in M^+(G)$, on a*

$$\mathbf{E}\Big(\int Q_n d\sigma\Big)^m = O(1) \Leftrightarrow \int \ldots \int K_n^{(m)}(t_1, \ldots, t_m)\,d\sigma(t_1) \ldots d\sigma(t_m) = O(1).$$

En particulier,

$$\mathbf{E}\Big(\int Q_n d\sigma\Big)^2 = O(1) \Leftrightarrow \int \int K_n(t-s)\,d\sigma(t)\,d\sigma(s) = O(1).$$

Quant à la L^γ-convergence avec γ ($\geqslant 1$) quelconque, on va faire une conjecture aventurée. Pour ce faire, on introduit à partir des poids p_n une autre suite de poids de renormalisation:

$$p_n^{(\gamma)}(t) = p_n^{\gamma/2}(t)/\int p_n^{\gamma/2}.$$

On notera $Q_n^{(\gamma)}$ la martingale correspondante. On introduit aussi

$$\Phi_n^{(\gamma)}(t) = \prod_{j=1}^{n} p_j^{(\gamma)} * \check{p}_j^{(\gamma)}(t).$$

Conjecture. Soit $\sigma \in M^+(T)$. Pour que la martingale $\int Q_n d\sigma$ converge dans L^γ il faut et il suffit que la martingale $\int Q_n^{(\gamma)} d\sigma$ converge dans L^2. Une condition nécessaire et suffisante pour ceci est alors

$$\int \int \Phi_n^{(\gamma)}(t-s)\,d\sigma(t)\,d\sigma(s) = O(1).$$

Cette conjecture est confirmée par les poids de recouvrement correspondant à des intervalles aléatoires sur les groupes $\mathbf{T}$ et $\mathbf{D} = \{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$ pour $1 \leqslant \gamma \leqslant 2$. En effet, d'abord, on s'aperçoit que toute suite de poids associée au recouvrement s'identifie avec toutes ses renormalisations. Ensuite dans ces deux cas, la L^1-convergence et la L^2-convergence se produisent en même temps, ainsi que la L^p-convergence (tout $p \geqslant 1$) ([5], chapitre 7).

Traduisons les théorèmes 2.1 et 2.2. On se donne deux suites de fonctions normalisées (p'_n) et (p''_n) définies sur un groupe G. On désigne par Q' et Q'' les deux opérateurs correspondants pour lesquels on a

Théorème 3.2. *Soient μ et ν dans $M^+(G)$.*

(a) *Supposons $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$ et $\nu \ll \mu$. On a*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \int \sqrt{p'_n(t)p''_n(t)}\,dt > 0 \Rightarrow Q''\nu \ll Q'\mu \text{ p.s. et } \mathbf{E}Q''\nu = \nu.$$

(b) *Les mesures μ et ν étant quelconques, on a toujours*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \int \sqrt{p'_n(t)p''_n(t)}\,dt = 0 \Rightarrow Q''\nu \perp Q'\mu \text{ p.s.}$$

(c) *Supposons que $\nu \in L^p(\mu)$ $(1 < p < \infty)$ et $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$. Si*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \int \sqrt{p'_n(t)p''_n(t)}\,dt > 0, \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \int (p'_n(t))^p (p''_n(t))^{1-p}\,dt < \infty,$$

on a $Q''\nu \in L^p(Q'\mu)$ p.s.

§ 4. **Produits de Riesz.** Les produits de Riesz aléatoires ont été introduits dans la section précédente par l'exemple 2. Comme le théorème 3.2 l'indique, pour savoir la continuité et la singularité de deux produits de Riesz aléatoires on est ramené à calculer l'intégrale suivante:

$$I_n(a, b, \gamma) = \int_G \sqrt{(1+\operatorname{Re} a_n\gamma_n(t))(1+\operatorname{Re} b_n\gamma_n(t))}\,dt.$$

Le calcul de cette intégrale dépend fort de la structure du groupe G. On le verra bien en comparant différents groupes. Néanmoins en ce qui concerne la singularité on a un critère simple, efficace et uniforme pour tous les groupes.

Théorème 4.1. *Soient Q' et Q'' deux opérateurs de Riesz associés à (a, γ) et (b, γ). Si $\sum_{n\geqslant 1} |a_n - b_n|^2 = \infty$ alors pour tout couple de mesures μ et ν on a p.s. $Q'\mu \perp Q''\nu$.*

Preuve. Suivant le théorème 1.2, on écrit $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\nu = \nu_1 + \nu_2$, de sorte que

$$\mathbf{E}Q'\mu_1 = \mu_1, \quad Q'\mu_2 = 0 \quad \text{p.s.},$$
$$\mathbf{E}Q''\nu_1 = \nu_1, \quad Q''\nu_2 = 0 \quad \text{p.s.}$$

Il est clair qu'il suffit de montrer que $Q'\mu_1 \perp Q''\nu_1$. Supposons sans perdre la généralité que μ_1 et ν_1 soient deux probabilités. Soient q' et q'' les deux probabilités associées à $Q'\mu_1$ et $Q''\nu_1$. On calcule facilement

$$\mathbf{E}_{q'}\gamma_n(t+\omega_n) = \tfrac{1}{2}\bar{a}_n, \quad \mathbf{E}_{q'}(\gamma_n(t+\omega_n) - \tfrac{1}{2}\bar{a}_n)^2 = 1 - \tfrac{1}{4}|a_n|^2,$$
$$\mathbf{E}_{q''}\gamma_n(t+\omega_n) = \tfrac{1}{2}\bar{b}_n, \quad \mathbf{E}_{q''}(\gamma_n(t+\omega_n) - \tfrac{1}{2}\bar{b}_n)^2 = 1 - \tfrac{1}{4}|b_n|^2.$$

Comme les $\gamma_n(t+\omega_n)$ sont à la fois q'-indépendantes et q''-indépendantes, dès que $\sum|\alpha_n|^2$ est finie on sait que p.s.

$$\sum \alpha_n(\gamma_n(t+\omega_n) - \tfrac{1}{2}\bar{a}_n) \quad \text{converge } Q'\mu\text{-p.p.},$$
$$\sum \alpha_n(\gamma_n(t+\omega_n) - \tfrac{1}{2}\bar{b}_n) \quad \text{converge } Q''\nu\text{-p.p.}$$

Si $Q'\mu \perp Q''\nu$ est fausse, on en déduit que pour toute suite (α_n) carré-sommable, la série $\sum \alpha_n(a_n - b_n)$ converge, ce qui entraîne une contradiction par le théorème de Banach–Steinhaus. ■

L'énoncé et la démonstration du théorème 4.1 ressemblent à ceux de Peyrière [14], mais dans un contexte différent.

Sur le tore $\mathbf{T}$ l'intégrale se calcule effectivement ([12]). Prenons $\gamma \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$. Soient Q' et Q'' deux opérateurs de Riesz définis par (a, γ) et (b, γ).

THÉORÈME 4.2. *Soient μ et ν deux mesures dans $M^+(\mathbf{T})$.*

(a) *Supposons $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$ et $\nu \ll \mu$. Si la série*

$$\sum |a_n - b_n|^2 \left(1 + \frac{\cos^2(t_n - s_n)}{\sqrt{2 - |a_n - b_n|}}\right)$$

converge ($t_n = \arg(a_n + b_n)$ et $s_n = \arg(a_n - b_n)$), on a $\mathbf{E}Q''\nu = \nu$, $Q''\nu \ll Q'\mu$ p.s.

(b) *Si la série diverge, pour toute mesure μ et toute mesure ν on a $Q''\nu \perp Q'\mu$ p.s.*

Remarque. Au lieu de l'exemple 2, on peut envisager sa variante ci-dessous en considérant les poids $p_n(t) = 1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\omega_n}\gamma_n(t))$ $(\gamma_n \in \hat{G})$.

Envisageons maintenant le groupe $\mathbf{D} = \{-1, 1\}^{\mathbf{N}}$. Soit $\Phi = (\varphi_n)_{n \geq 0}$ le système de Walsh. Soient Q' et Q'' deux opérateurs de Riesz définis par (a, Φ) et (b, Φ). Dans ce cas, le théorème 2.1 se traduit comme suit:

THÉORÈME 4.3. *Soient μ et ν deux mesures dans $M^+(\mathbf{D})$.*

(a) *Supposons $\mathbf{E}Q'\mu = \mu$ et $\nu \ll \mu$. Si la série*

$$\sum \left(1 - \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1+a_n)(1+b_n)} + \sqrt{(1-a_n)(1-b_n)}\right]\right)$$

converge, on a $\mathbf{E}Q''\nu = \nu$, $Q''\nu \ll Q'\mu$ p.s.

(b) *Si la série diverge, pour toute mesure μ et toute mesure ν on a $Q''\nu \perp Q'\mu$ p.s.*

La traduction du théorème 2.2 est laissée au lecteur.

§5. **Produits de Riesz (suite).** Donnons ici quelques critères de la dégénérescence et de l'action pleine de l'opérateur de Riesz défini sur $\mathbf{T}$.

Pour un réel a ($|a| \leq 1$), définissons

$$\hat{a} = \int_0^{2\pi} (1 + |a|\cos x)\log(1 + |a|\cos x)\frac{dx}{2\pi}.$$

Envisageons l'opérateur de Riesz

$$Q\sigma = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \mathrm{Re}(a_n e^{i\lambda_n(t+\omega_n)})\right) d\sigma$$

où $|a_n| \leq 1$ et les λ_n sont des entiers positifs. Posons

$$D = \liminf_{n\to\infty} \frac{\hat{a}_1 + \ldots + \hat{a}_n}{\log(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1})}.$$

Les λ_n satisfont éventuellement

$$(\Lambda_1) \qquad \frac{n}{\log(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)} = O(1).$$

THÉORÈME 5.1. *Supposons que $\sup|a_n| < 1$ et que l'on ait (Λ_1). Si la dimension de la mesure $\sigma (\in M^+(\mathbf{T}))$ est strictement inférieure à D, l'opérateur Q est dégénéré sur σ.*

Preuve. Supposons que $\dim\sigma < D' < D$. D'après le théorème 3 dans [7], il suffit de montrer qu'il existe deux constantes $0 < h < 1$ et $C > 0$ telles que l'on ait

$$\mathbf{E}\sup_{t\in I}(Q_n(t))^h \leq C|I|^{(1-h)D'}$$

pour tout intervalle I et un certain $n = n(I)$ dépendant de I.

Il est clair que l'on a $|\log(1+x) - \log(1+y)| = O(|x-y|)$ si $y > -1+\delta$ ou $x > -1+\delta$ pour un certain $\delta > 0$. On en déduit que

$$|\log Q_n(t) - \log Q_n(s)| = O(|t-s|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i).$$

Pour l'intervalle I fixé prenons alors l'entier $n = n(I)$ tel que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \leq |I|^{-1} < \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i$, d'où on a

$$\mathbf{E}\sup_{t\in I}(Q_n(t))^h = O(1)\prod_{i=1}^{n}\int_0^{2\pi}(1+|a_i|\cos x)^h\frac{dx}{2\pi}$$

quel que soit $0 < h < 1$. En remarquant que

$$(1+a)^h = (1+a)\left(1+(h-1)\log(1+a)+O((1-h)^2)\right)$$

on voit que le dernier produit est majoré par

$$\exp\left[(h-1)\sum_{i=1}^{n} \hat{a}_i + O(n(1-h))\right].$$

Celle-ci est majorée, grâce à (Λ_1), par $O(1)(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1})^{-(1-h)D'}$ si $|I|$ est assez petite. ∎

Donnons maintenant un critère dans l'autre sens.

Soit (λ_n) une suite d'entiers positifs. Pour $k \geqslant 1$ posons

$$B_k = \operatorname{Card}\{(\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}\colon\ \varepsilon_j = -1,\, 0,\, 1; \textstyle\sum \varepsilon_j \lambda_j = 0;\ \sum |\varepsilon_j| = k\}.$$

THÉORÈME 5.2. *S'il existe un réel $\varrho < 2/r^2$ $(r = \sup|a_j|)$ tel que*

$$(\Lambda_2) \qquad \limsup_{k\to\infty} (\log B_k)/k \leqslant \varrho,$$

l'opérateur Q agit pleinement sur la mesure de Lebesgue, donc sur toutes les fonctions dans $L^1(dt)$.

Preuve. On sait que pour toute mesure σ on a l'égalité suivante:

$$\mathbf{E}(Q_n\sigma(\mathbf{T}))^2 = \int\int K_n(t-s)\,d\sigma(t)\,d\sigma(s) \quad \text{avec}$$

$$K_n(t) = \prod_{j=1}^{n} \left(1+\tfrac{1}{2}|a_j|^2 \cos\lambda_j t\right).$$

Prenons la mesure de Lebesgue. On a

$$\int\int K_n(t-s)\,dt\,ds = \sum \prod_{j=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2}|a_j|^2\right)^{|\varepsilon_j|},$$

la somme étant prise sur toutes les $(\varepsilon_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ telles que $\sum \varepsilon_j\lambda_j = 0$. Le membre à droite de l'égalité précédente est donc majoré par $\sum_{k=1}^{n} B_k(\frac{1}{2}r^2)^k$. D'après l'hypothèse (Λ_2), ce dernier est contrôlé par une constante ne dépendant pas de n. ∎

Regardons un exemple avec $\lambda_n = [q^n]$ $(q > 1$ réel) et $a_n = r$ $(0 < r < 1)$, $[\ ]$ désignant la partie entière du nombre dans les crochets. Comme $D > 1$ signifie que $q < e^r$, d'après le théorème 5.1, dans ce cas-là, l'opérateur Q est dégénéré sur toute mesure.

En revanche, comme $B_k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ lors de $q \geqslant 2$, d'après le théorème 5.2 l'opérateur de Riesz agit pleinement sur la mesure de Lebesgue.

§6. Martingales de recouvrement. Prenons l'exemple 2 introduit au §2. Considérons le cas où $G = \mathbf{T}$, $O_n =]0, l_n[$. Notons Q l'opérateur correspondant. De même notons Q' l'autre correspondant à une autre suite $O'_n =]0, l'_n[$.

THÉORÈME 6.1. *Soient $\mu, \nu \in M^+(\mathbf{T})$.*

(a) *Supposons $\nu \ll \mu$ et $\mathbf{E}Q\mu = \mu$. On a*

$$\sum |l_n - l'_n| < \infty \Leftrightarrow Q'\nu \ll Q\mu \text{ p.s. et } \mathbf{E}Q'\nu = \nu.$$

(b) *μ et ν étant quelconques,*

$$\sum |l_n - l'_n| = \infty \Leftrightarrow Q'\nu \perp Q\mu \text{ p.s.}$$

(c) *Supposons que $\nu \in L^p(\mu)$ et $\mathbf{E}(Q\mu(\mathbf{T}))^p < \infty$ $(1 < p < \infty)$. On a*

$$\sum |l_n - l'_n| < \infty \Rightarrow Q'\nu \in L^p(Q\mu) \text{ p.s.}$$

Preuve. Pour (a) et (b), d'après le théorème 2.1 il suffit de calculer

$$\int \left[\frac{(1-\chi_n(t))(1-\chi'_n(t))}{(1-l_n)(1-l'_n)}\right]^{1/2} dt,$$

Cette intégrale est égale à

$$\exp\left[-\tfrac{1}{2}|l - l'_n| + O(l_n^2) + O(l_n'^2)\right].$$

Tenant compte de l'hypothèse sous-jacente que (l_n) et (l'_n) sont carré-sommables, on termine la preuve de (a) et (b).

Pour (c), il suffit de calculer

$$\int \left[\frac{1-\chi'_n(t)}{1-l'_n}\right]^p \left[\frac{1-\chi_n(t)}{1-l_n}\right]^{1-p} dt.$$

Or elle est égale à

$$\exp\left[(p-1)(l'_n - l_n) + O(l_n^2) + O(l_n'^2)\right] \quad \text{si } l_n \leqslant l'_n,$$

$$\exp\left[p(l_n - l'_n) + O(l_n^2) + O(l_n'^2)\right] \quad \text{si } l_n > l'_n. \ ∎$$

Au lieu de Q', on va comparer l'opérateur Q avec l'opérateur Q_φ, qui est associé à la suite d'ouverts $O_{\varphi,n} =]\varphi_n, \varphi_n + l_n[$ où $\varphi = (\varphi_n)$ est une suite d'élements de $\mathbf{T}$.

THÉORÈME 6.2. *Soient $\mu, \nu \in M^+(\mathbf{T})$.*

(a) *Supposons $\nu \ll \mu$ et $\mathbf{E}Q\mu = \mu$. On a*

$$\sum \min(l_n, |\varphi_n|) < \infty \Leftrightarrow Q_\varphi\nu \ll Q\mu \text{ p.s. et } \mathbf{E}Q_\varphi\nu = \nu.$$

(b) *μ et ν étant quelconques,*

$$\sum \min(l_n, |\varphi_n|) = \infty \Leftrightarrow Q_\varphi\nu \perp Q\mu \text{ p.s.}$$

(c) *Supposons que $\nu \in L^p(\mu)$ et $\mathbf{E}Q\mu = \mu$ $(1 < p < \infty)$. On a*

$$\sum \min(l_n, |\varphi_n|) < \infty \Rightarrow Q_\varphi\nu \in L^p(Q\mu) \text{ p.s.}$$

§7. Martingales de Mandelbrot. Adoptons les notations de [9]. Soit Q l'opérateur défini par une variable W positive d'espérance 1, à laquelle est associée la fonction convexe suivante:

$$\varphi(h) = \log_c \mathbf{E}\, W^h - (h-1).$$

Si W admet le moment d'ordre q, on notera Q^q l'opérateur défini sur $M^+(T_c)$ par la variable renormalisée $W_q = W^q/\mathbf{E}\, W^q$, dont la fonction associée est $\varphi_q(h) = \varphi(qh) - h\varphi(q)$.

THÉORÈME 7.1. *Soient μ et ν deux mesures dans $M^+(T_c)$.*

(a) *Supposons que $\nu \ll \mu$ et $\mathbf{E} Q\mu = \mu$. On a*

$$\varphi\big(\tfrac{1}{2}(q+1)\big) = \tfrac{1}{2}\varphi(q) \Rightarrow Q^q\nu \ll Q\mu \text{ p.s. et } \mathbf{E}Q^q\nu = \nu.$$

(b) *Les μ et ν étant quelconques, on a toujours*

$$\varphi\big(\tfrac{1}{2}(q+1)\big) < \tfrac{1}{2}\varphi(q) \Rightarrow Q^q\nu \perp Q\mu \text{ p.s.}$$

(c) *On a $Q^q\nu \in L^\alpha(Q\mu)$ p.s. ($\alpha \geqslant 1$) dès que*

$$\varphi\big(\tfrac{1}{2}(q+1)\big) = \tfrac{1}{2}\varphi(q), \quad \varphi\big((q-1)\alpha+1\big) < \infty.$$

La démonstration est du simple calcul. Remarquons cependant que grâce à la convexité de φ et au fait que $\varphi(1) = 0$, on a toujours

$$\varphi\big(\tfrac{1}{2}(q+1)\big) \leqslant \tfrac{1}{2}\varphi(q).$$

Cela implique que si φ est strictement convexe on tombe dans la situation (b); si φ est linéaire on tombe dans la situation (a), comme c'est le cas quand

$$P(W = C^\alpha) = C^{-\alpha}, \quad P(W = 0) = 1 - C^{-\alpha}.$$

On va voir que sauf ce cas extrême la fonction φ est toujours strictement convexe dans son domaine de définition. Autrement dit, on a toujours singularité sauf ce cas exceptionnel pour lequel on a $W_q = W$ pour tout q.

Supposons $\mathbf{E}W^q < \infty$. Posons $\tau = \max(1, q)$. Envisageons la fonction $\psi(h) = \mathbf{E}\,W^h$ définie dans la bande $0 < \operatorname{Re} h < \tau$ du plan complexe. On vérifie qu'elle y est holomorphe. Par conséquent, les seules variables dont les fonctions associées sont linéaires dans un intervalle sont celles qui ne prennent que deux valeurs, dont l'une est zéro.

§8. Exponentiation de processus gaussiens. Considérons la série de Fourier aléatoire gaussienne

$$\sum a_n(\xi_n \operatorname{Re}\gamma_n(t) + \xi'_n \operatorname{Im}\gamma_n(t))$$

où les a_n sont des positifs, les ξ_n et ξ'_n sont indépendantes de loi $N(0, 1)$ et les γ_n sont des caractères d'un groupe compact abélien G.

Si les coefficients satisfont $\sum a_n^2 < \infty$ on sait que p.s. la série converge p.p. (relativement à la mesure de Haar) vers une fonction de $L^2(dt)$. En fait, on peut dire plus. Mais au contraire, si la condition n'est pas satisfaite la série ne représente ni une fonction ni une mesure de Radon.

Si la condition est violée, au lieu d'étudier la série on va considérer le poids exponentiel suivant:

$$P_{n,a}(t) = \exp[\xi_n a_n \operatorname{Re}\gamma_n(t) + \xi'_n a_n \operatorname{Im}\gamma_n(t) - \tfrac{1}{2}a_n^2]$$

et puis un opérateur associé Q_a. De même Q_b se définit en fonction d'une autre suite (b_n). En remarquant que

$$\mathbf{E}\sqrt{P_{n,a}P_{n,b}} = \exp[-\tfrac{1}{4}(a_n - b_n)^2]$$

on a

THÉORÈME 8.1. *Soient μ et ν deux mesures dans $M^+(G)$.*

(a) *Supposons que $\nu \ll \mu$ et $\mathbf{E}Q_a\mu = \mu$. On a*

$$\sum (a_n - b_n)^2 < \infty \Rightarrow Q_b\nu \ll Q_a\mu \text{ p.s. et } \mathbf{E}Q_b\nu = \nu.$$

(b) *Les μ et ν étant quelconques, on a*

$$\sum (a_n - b_n)^2 = \infty \Rightarrow Q_b\nu \perp Q_a\mu \text{ p.s.}$$

Remerciements. L'auteur tient à remercier Monsieur Jean-Pierre Kahane qui l'a beaucoup encouragé, ainsi que Madame Myriam Déchamps et Monsieur Hervé Queffélec qui lui ont trouvé quelques erreurs de frappe ou de calcul dans le manuscrit.

Références

[1] G. Brown and W. Moran, *A dichotomy for infinite convolutions of discrete measures*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 73 (1973), 307–316.
[2] —, —, *On orthogonality of Riesz products*, ibid. 76 (1974), 173–181.
[3] A. H. Fan, *Chaos additif et chaos multiplicatif de Lévy*, C. R. Acad. Sci. Paris 308 (1989), 151–154.
[4] —, *Sur la convergence de séries trigonométriques lacunaires presque partout par rapport à des produits de Riesz*, ibid. 309 (1989), 295–298.
[5] —, Thèse, Orsay 1989.
[6] E. Hewitt and H. S. Zuckerman, *Singular measures with absolutely continuous convolution squares*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 399–420; Corrigendum, ibid. 63 (1967), 367–368.
[7] J.-P. Kahane, *Positive martingales and random measures*, Chinese Ann. Math. 8B1 (1987), 1–12.
[8] —, *Sur le chaos multiplicatif*, Ann. Sci. Math. Québec 9 (1985), 105–150; voir aussi C. R. Acad. Sci. Paris 301 (1985), 329–332.
[9] J.-P. Kahane et J. Peyrière, *Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot*, Adv. in Math. 22 (1976), 131–145.
[10] S. Kakutani, *On equivalence of infinite product measures*, Ann. of Math. 49 (1948), 214–224.
[11] M. Kanter, *Equivalence singularity dichotomies for a class of ergodic measures*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 81 (1977), 249–252.
[12] S. J. Kilmer and S. Saeki, *On Riesz product measures: mutual absolute continuity and singularity*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (2) (1988), 63–93.

[13] J. Peyrière, *Sur les produits de Riesz*, C. R. Acad. Sci. Paris 276 (1973), 1417–1419.
[14] —, *Etude de quelques propriétés des produits de Riesz*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25 (2) (1975), 127–169.
[15] G. Ritter, *On Kakutani's dichotomy theorem for infinite products of not necessarily independent functions*, Math. Ann. 239 (1979), 35–53.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES Bât. 425
91405 Orsay, France

Received May 15, 1990 (2690)

INFORMATION FOR AUTHORS

Manuscripts should be typed on one side only, with double or triple spacing and wide margins, and submitted in duplicate, including the original typewritten copy. Poor quality copies will not be accepted.

An **abstract** of not more than 200 words is required. The AMS Mathematics Subject Classification is desirable.

Formulas should be typewritten, and with the number (if any) placed in parentheses at the left margin.

A complete **list of all handwritten symbols** with indications for the printer should be enclosed. Special typefaces should be indicated according to the following code: **script letters** – by encircling the typed Roman letter in black, **German letters** – by typing the Roman equivalent and underlining in green, **boldface letters** – by straight black underlining.

No underlining is necessary for the titles, the text of theorems, the words "Theorem", etc. These will be set automatically according to the style of the journal. No titles should be written in capital letters.

Figures should be drawn accurately on separate sheets, preferably twice the size in which they are required to appear. The author should indicate in the margin of the manuscript where figures are to be inserted.

References should be arranged in alphabetical order, typed with double spacing, and styled and punctuated according to the examples given below. Abbreviations of journal names should follow Mathematical Reviews. Titles of papers in Russian should be translated into English.

Examples:

[6] D. Beck, *Introduction to Dynamical Systems*, Vol. 2, Progr. Math. 54, Birkhäuser, Basel 1978. [with no underlining in the manuscript]
[7] R. Hill and J. James, *An index formula*, J. Differential Equations 15 (1982), 197–211.
[8] J. Kowalski, *Some remarks on $J(X)$*, in: Algebra and Analysis, Proc. Conf. Edmonton 1973, E. Brook (ed.), Lecture Notes in Math. 867, Springer, Berlin 1974, 115–124.
[Nov] A. S. Novikov, *An existence theorem for planar graphs*, preprint, Moscow University, 1980 (in Russian).

Authors' **affiliation** should be given at the end of the manuscript.

Authors receive only page **proofs** (one copy). If the proofs are not returned promptly, the article will be proofread against the manuscript by the publisher and printed without the author's corrections.

Authors receive 50 **reprints** of their articles.