STUDIA MATHEMATICA 97 (2) (1990)

# Sur les opérateurs nilpotents d'ordre deux

par

MOHAMED BARRAA (Marrakech)

**Abstract.** If $A$ and $B$ are two nilpotent operators of order two, on a Banach space, and if $\operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$ is trivial, then $A$ and $B$ are quasisimilar.

Soient $E$ un espace de Banach et $L(E)$ l'espace des opérateurs linéaires bornés sur $E$. Pour $A \in L(E)$, on désigne par $\operatorname{Lat} A$ le treillis des sous-espaces fermés invariants par $A$. On dit qu'un élément $X$ de $L(E)$ est une *quasiaffinité* si le noyau de $X$ est réduit à zéro et l'image de $X$ est dense dans $E$. On note $(\operatorname{Im} X)^-$ l'adhérence de l'image de $X$ dans $E$. On dit que $A$ et $B$ deux éléments de $L(E)$ sont *quasisemblables* s'il existe deux quasiaffinités $X$ et $Y$ avec $AX = XB$ et $YA = BY$.

Dans l'article [1] les auteurs ont montré que l'existence d'un opérateur sans sous-espace invariant non trivial est équivalente à l'existence d'un couple d'opérateurs quadratiques $A$ et $B$ de $L(E)$ tel que $\operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$ est trivial.

En relation avec ceci, on montre le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soient $E$ un espace de Banach de dimension supérieur à trois, $A$ et $B$ deux éléments de $L(E)$ avec $A^2 = B^2 = 0$ et $\operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$ trivial. Alors $A$ et $B$ sont quasisemblables.*

Démonstration. De la relation $A^2 = B^2 = 0$, on déduit $A(A+B) = (A+B)B$ et $(A+B)A = B(A+B)$. Donc pour montrer que $A$ et $B$ sont quasisemlables, il suffit de montrer que $X = A+B$ est une quasiaffinité. Remarquons que $X^2 = (A+B)^2 = AB+BA$ commute à la fois avec $A$ et $B$ et que $X^2$ est non nul, car sinon pour tout $\zeta \in \operatorname{Ker} A$, l'espace engendré par $\zeta$ et $B\zeta$: $\operatorname{Vect}(\zeta, B\zeta) \in \operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$, ce qui n'est pas possible.

On a $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, car sinon $\operatorname{Ker} X^2 \supset \operatorname{Ker} X \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker} X^2 \in \operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$ qui est trivial, donc $\operatorname{Ker} X^2 = E$, c'est-à-dire $X^2 = 0$, ce qui n'est pas possible.

De même si $(\operatorname{Im} X)^- \neq E$, comme $(\operatorname{Im} X^2)^- \subset (\operatorname{Im} X)^-$ et $(\operatorname{Im} X^2)^- \in \operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$, alors $(\operatorname{Im} X^2)^- = \{0\}$, c'est-à-dire $X^2 = 0$, ce qui n'est pas possible, donc $(\operatorname{Im} X)^- = E$. Ceci montre que $X$ est une quasiaffinité, et donc $A$ et $B$ sont quasisemblables.

1985 *Mathematics Subject Classification*: Primary 47A15; Secondary 15A04.

Remarques. Soient $K$ un corps commutatif quelconque et $E$ un espace vectoriel sur $K$, de dimension finie supérieure ou égale à 3. Si $A$ et $B \in L(E)$ avec $A^2 = B^2 = 0$, le raisonnement ci-dessus prouve que si $\operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B = \{0, E\}$, alors $A+B$ est inversible. Mais is $K$ est algébriquement clos, alors $\operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$ n'est jamais trivial. En effet, si $\operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B = \{0, E\}$, alors $\operatorname{Hlat}(AB+BA) = \{0, E\}$ (treillis des sous-espaces hyperinvariants), d'où $AB+BA = \beta I$ pour un $\beta \in K$, et dans ces conditions pour tout $x \in \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Vect}(x, Bx) \in \operatorname{Lat} A \cap \operatorname{Lat} B$, ce qui contredit l'hypothèse.

**Bibliographie**

[1] E. A. Nordgren, M. Radjabalipour, H. Radjavi and P. Rosenthal, *Quadratic operators and invariant subspaces*, Studia Math. 88 (1988), 263–268.

[2] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Masson et Akadémiai Kiadó, 1967.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ CADI AYYAD
Boulevard de Safi, B.P. S15, Marrakech, Maroc

*Received November 23, 1989*
*Revised version February 16, 1990* (2625)

STUDIA MATHEMATICA 97 (2) (1990)

# On algebraic generation of $B(X)$ by two subalgebras with square zero*

by

PETER ŠEMRL (Ljubljana)

**Abstract.** We prove several results on algebraic generation of $B(X)$ by two subalgebras with square zero, one of them being finite-dimensional. These results are motivated by a counterexample to one problem posed by W. Żelazko.

Let $X$ be a real or complex Banach space with $\dim X > 1$. We say that the algebra $B(X)$ of all its continuous endomorphisms is $\tau$-*generated* by its subset $\mathscr{S}$ if it coincides with the smallest $\tau$-closed subalgebra of $B(X)$ containing $\mathscr{S}$. Here $\tau$ denotes some topology on $B(X)$. When $\tau$ is the discrete topology we say that $\mathscr{S}$ *algebraically generates* $B(X)$. In other words, $\mathscr{S}$ algebraically generates $B(X)$ if each operator $T$ in $B(X)$ is a linear combination of finite products of elements of $\mathscr{S}$. In [3] W. Żelazko raised the question whether $B(X)$ is generated by two of its abelian subalgebras $\mathscr{A}_1$ and $\mathscr{A}_2$, i.e. whether it coincides with the smallest $\tau$-closed subalgebra containing $\mathscr{A}_1$ and $\mathscr{A}_2$. In the case when $X$ is a separable Hilbert space it was known earlier that $B(X)$ is strongly generated by two operators and hence by two commutative subalgebras. In [1] it is shown that $B(H)$ is strongly generated by two unitary operators, and in [2] that it is strongly generated by two hermitian operators. For an arbitrary subset $\mathscr{S}$ of $B(X)$ we put $\mathscr{S}^2 = \{T_1T_2\colon T_1, T_2 \in \mathscr{S}\}$; thus a subalgebra $\mathscr{A} \subset B(X)$ of square zero is automatically commutative. It is proved in [4] that for any Banach space $X$ with $\dim X > 1$ the algebra $B(X)$ is strongly generated by two subalgebras with square zero.

The situation is completely different if instead of generation in the strong operator topology we consider algebraic generation: there exist Banach spaces $X$ for which $B(X)$ cannot be algebraically generated by any number of subalgebras of square zero. On the other hand, many Banach spaces are "$n$th powers" and for such spaces the algebra $B(X)$ is algebraically generated by two subalgebras of square zero. More precisely, we have the following result.

---

1985 *Mathematics Subject Classification*: Primary 47A05.

* This work was supported by the Research Council of Slovenia.