It would be desirable to replace condition (ii) by

(iii) $\mathrm{Lat}(S) = \{(0), X\}$,

where $\mathrm{Lat}(S)$ is the lattice of all closed subspaces of X which are invariant with respect to all operators T in S. One can see that Theorem 2 so modified would give a positive solution to the problem mentioned in § 3 in the case when X is a B_0-space.

References

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.
[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Springer 1973.
[3] J. M. G. Fell and R. S. Doran, *Representations of *-Algebras, Locally Compact Groups, and Banach *-Algebraic Bundles*, Academic Press, 1988.
[4] N. J. Kalton and J. W. Roberts, *A rigid subspace of L_0*, Trans. Amer. Math. Soc. 266 (1981), 645–654.
[5] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, PWN and Reidel, 1984.
[6] A. M. Sinclair, *Automatic Continuity of Linear Operators*, Cambridge Univ. Press, 1976.
[7] L. Waelbroeck, *Topological Vector Spaces and Algebras*, Lecture Notes in Math. 230, Springer, 1971.
[8] —, *A rigid topological vector space*, Studia Math. 59 (1977), 227–234.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Received February 20, 1989
Revised version April 17, 1989
(2534)

STUDIA MATHEMATICA, T. XCVI (1990)

Multifonctions analytiques polygonales

par

LINE BARIBEAU* (Québec)

Abstract. The spectrum of an analytic family of elements of a Banach algebra is an example of an analytic multivalued function. In this paper we study continuous analytic multivalued functions whose values are convex polygons. It is shown that if the number of vertices is bounded, then these vertices vary holomorphically away from branch points. Examples are given to show that this exceptional set can be quite large, and that the number of vertices may be unbounded. This shows that such a function cannot be seen as the convex hull of a finite analytic multivalued function, as was the case for segment-valued functions.

1. Introduction. La méthode sousharmonique s'est révélée au cours des dernières années une technique très puissante pour étudier la théorie spectrale dans les algèbres de Banach. Dans [8], Z. Słodkowski montre que cette théorie se laisse ramener à l'étude des *fonctions analytiques multiformes*, ou *multifonctions analytiques*, qu'on définit comme suit:

DÉFINITION 1. Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction définie sur un domaine D de $\mathbf{C}^n$, prenant ses valeurs dans $\mathscr{K}(\mathbf{C}^m)$, l'ensemble des compacts non vides de $\mathbf{C}^m$. On dira que la fonction K est *analytique* si elle satisfait les deux propriétés suivantes:

1. K est semi-continue supérieurement.

2. Pour tout ouvert $D_1 \subseteq D$, si V est un voisinage de $\mathrm{Gr}(K|_{D_1}) = \{(\lambda, z): \lambda \in D_1, z \in K(\lambda)\}$, et $\psi(\lambda, z)$ une fonction plurisousharmonique sur V, alors la fonction

$$\Psi(\lambda) = \sup\{\psi(\lambda, z):\ z \in K(\lambda)\}$$

est plurisousharmonique sur D_1.

Si $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est une fonction holomorphe à valeurs dans une algèbre de Banach, la fonction multiforme $\lambda \mapsto \mathrm{Sp} f(\lambda)$ est analytique. La théorie des algèbres uniformes fournit d'autres exemples de fonctions analytiques multiformes [2].

Certains fonctions analytiques multiformes sont bien connues. Par exemple, les multifonctions analytiques finies sont précisément les fonctions algébroïdes, c'est-à-dire de la forme

---

1980 *Mathematics Subject Classification*: Primary 32F05; Secondary 32F15, 47A10.
* Cette recherche a été subventionnée par une bourse de la Fondation de l'Université Laval.

$$K(\lambda) = \{z\colon z^n+\alpha_1(\lambda)z^{n-1}+\ldots+\alpha_n(\lambda) = 0\}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des fonctions holomorphes. Ce résultat bien connu se trouve démontré par exemple au début de la preuve du Théorème 1.5 de [3].

Dans [4], nous avons étudié les multifonctions analytiques prenant pour valeurs des segments. Sous l'hypothèse additionnelle de continuité, nous avons montré que les extrémités de $K(\lambda)$ varient localement holomorphiquement en dehors des points de branchement et qu'une telle fonction peut être vue comme l'enveloppe convexe d'une fonction algébroïde à deux éléments.

Pour faire suite aux questions soulevées dans [4], nous nous intéressons ici aux multifonctions analytiques continues dont les valeurs sont des polygones convexes. Nous verrons que si K a au plus n sommets, alors en dehors des points où K dégénère en un polygone à moins de n sommets, les sommets de K varient localement holomorphiquement. Cependant cet ensemble de points où K dégénère peut être très gros. Nous verrons par un exemple que contrairement au cas des segments, K ne peut pas être vue comme l'enveloppe convexe d'une fonction algébroïde.

2. Caractérisation des fonctions holomorphes au moyen des fonctions plurisousharmoniques. On trouve dans [1], p. 174, le résultat suivant de B. Aupetit et J. Wermer qui s'inspire d'un théorème de R. Narasimhan ([5], p. 59).

THÉORÈME 1. *Soit φ une fonction bornée sur un domaine D de $\mathbf{C}$. Pour que φ ou $\bar\varphi$ soit holomorphe sur D il faut et il suffit que $\lambda\mapsto\log|\varphi(\lambda)-z|$ soit sousharmonique sur D quel que soit $z\in\mathbf{C}$ de module assez grand.*

Les résultats que nous présentons ici sont de nature semblable.

LEMME 1. *Soit φ une fonction de classe C^2 sur un domaine D de $\mathbf{C}$, et G un ouvert non vide de $\mathbf{C}$. Supposons que la fonction $\log|\varphi(\lambda)-z|$ est plurisousharmonique sur $D\times G$. Alors φ est holomorphe sur D.*

Démonstration. La fonction $v(\lambda, z) = \log|\varphi(\lambda)-z|^2$ est plurisousharmonique. Par conséquent la matrice hessienne $H(v)$ associée à v est semi-définie positive. Son déterminant est donc positif ou nul. Un calcul rapide montre que

$$H(v) = \begin{bmatrix} v_{\lambda\bar\lambda} & \dfrac{\varphi_\lambda}{(\bar\varphi-\bar z)^2} \\ \dfrac{\varphi_{\bar\lambda}}{(\varphi-z)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

et l'inégalité $0\leqslant \det H = -|\varphi_{\bar\lambda}|^2/|\varphi-z|^4$ implique $\varphi_{\bar\lambda} = 0$. ∎

THÉORÈME 2. *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et G un ouvert non borné de $\mathbf{C}$ et tel que $G_\varepsilon = \{z\in G\colon \operatorname{dist}(z, \partial G) > \varepsilon\}$ est non borné pour ε assez petit. Supposons que φ est bornée et que la fonction de deux variables*

$$u(\lambda, z) = \log|\varphi(\lambda)-z|$$

est plurisousharmonique sur $D\times G$. Alors φ est holomorphe sur D.

Démonstration. Soit $m > 0$ tel que $|\varphi| \leqslant m$. On peut, quitte à restreindre G, supposer que $|z| \geqslant M > m$ pour tout $z\in G$.

On approxime u par une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques indéfiniment différentiables de la façon suivante. Soit $\alpha(t)\geqslant 0$ une fonction de classe C^∞ à support dans $(0, 1)$ et telle que $\int_0^1 t\alpha(t)\,dt = 1/(2\pi)$. On définit pour $\lambda\in D_\varepsilon = \{\lambda\in D\colon \operatorname{dist}(\lambda, \partial D) > \varepsilon\}$ et $z\in G_\varepsilon$

$$u_\varepsilon(\lambda, z) = \frac{i^2}{4\varepsilon^4}\int\limits_{\substack{|\lambda'|<\varepsilon\\ |z'|<\varepsilon}} \log|\varphi(\lambda+\lambda')-(z+z')|\alpha(|\lambda'|/\varepsilon)\alpha(|z'|/\varepsilon)\,d\lambda'\wedge d\bar\lambda'\wedge dz'\wedge d\bar z'$$

(où $(i/2)^2\,dz\wedge d\bar z\wedge d\lambda\wedge d\bar\lambda$ représente l'élément de volume dans $\mathbf{C}^2$). En posant $\lambda' = re^{i\theta}$ et $z' = se^{i\tau}$ cette expression devient

$$u_\varepsilon(\lambda, z) = \frac{1}{\varepsilon^4}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi} \log|\varphi(\lambda+re^{i\theta})-(z+se^{i\tau})|\alpha(r/\varepsilon)\alpha(s/\varepsilon)rs\,dr\,d\theta\,ds\,d\tau.$$

Maintenant, pour $\lambda+re^{i\theta}$ fixé, la fonction $\log|\varphi(\lambda+re^{i\theta})-z|$ est harmonique en z sur G. En utilisant la propriété de moyenne on a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\log|\varphi(\lambda+re^{i\theta})-(z+se^{i\tau})|\alpha(s/\varepsilon)s\,ds\,d\tau &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon 2\pi\log|\varphi(\lambda+re^{i\theta})-z|\alpha(s/\varepsilon)s\,ds\\ &= \log|\varphi(\lambda+re^{i\theta})-z|.\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$u_\varepsilon(\lambda, z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\log|\varphi(\lambda+re^{i\theta})-z|\alpha(r/\varepsilon)r\,dr\,d\theta.$$

Puisque $|\varphi(\lambda+re^{i\theta})| \leqslant m < M \leqslant |z|$ on peut écrire

$$\begin{aligned}u_\varepsilon(\lambda, z) &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\left(\log|z|+\log\left|1-\frac{\varphi(\lambda+re^{i\theta})}{z}\right|\right)\alpha\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r\,dr\,d\theta\\ &= \log|z|+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\log\left(1-\frac{\varphi(\lambda+re^{i\theta})}{z}\right)\alpha\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r\,dr\,d\theta\\ &= \log|z|+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}-\operatorname{Re}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k}\left(\frac{\varphi(\lambda+re^{i\theta})}{z}\right)^k\alpha\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)r\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

où la série est uniformément convergente. Donc

$$u_\varepsilon(\lambda, z) = \log|z|+\operatorname{Re}\sum_{k=1}^\infty f_k(\lambda)/z^k$$

où on a posé

$$f_k(\lambda) = -\frac{1}{k\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}(\varphi(\lambda+re^{i\theta}))^k\alpha(r/\varepsilon)r\,dr\,d\theta.$$

(C'est une fonction de classe C^∞ satisfaisant $|f_k(\lambda)|\leqslant m^k/k$.)

Les fonctions $u_\varepsilon(\lambda, z)$ sont plurisousharmoniques et de classe C^∞ sur $D_\varepsilon \times G_\varepsilon$ et convergent en décroissant vers u quand $\varepsilon \downarrow 0$ (voir par exemple [7], p. 77). Par conséquent la matrice hessienne associée à u_ε est semi-définie positive. Or

$$H(u_\varepsilon) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial\lambda\partial\bar\lambda} & \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z\partial\bar\lambda} \\ \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial\bar z\partial\lambda} & \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z\partial\bar z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial\lambda\partial\bar\lambda} & \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z\partial\bar\lambda} \\ \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial\bar z\partial\lambda} & 0 \end{bmatrix}$$

et comme dans le Lemme 1, on obtient

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z\partial\bar\lambda} = 0.$$

Ainsi la fonction

$$g(\lambda, z) = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{2z} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k f_k(\lambda)}{z^{k+1}}$$

satisfait $g_{\bar\lambda} = 0$, et donc est une fonction holomorphe en λ sur D_ε pour tout $z \in G_\varepsilon$ fixé. Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de G_ε tendant vers l'infini. On a

$$f_1(\lambda) = \lim_{n\to\infty} -2z_n^2 g(\lambda, z_n)$$

et la convergence est localement uniforme sur D_ε. Par conséquent la fonction $f_1(\lambda)$ est holomorphe sur D_ε. On obtient de la même façon, par induction, que toutes les f_k sont holomorphes sur D_ε. Ainsi la fonction $\mathrm{Re}\sum_1^\infty f_k(\lambda)/z^k$ est une fonction harmonique de λ sur D_ε pour tout $z \in G_\varepsilon$ fixé. Puisque $u(\lambda, z)$ est la limite décroissante, quand ε décroît vers 0, des $u_\varepsilon(\lambda, z)$, le théorème de Harnack implique que $u(\lambda, z) = \log|\varphi(\lambda) - z|$ est harmonique en $\lambda \in D$, pour tout $z \in G$ fixé. En appliquant le raisonnement de [5], p. 59, à la fonction $\varphi - z_0$, où z_0 est un point intérieur fixé de G, on conclut que φ est de classe C^∞. Il suffit maintenant d'appliquer le Lemme 1. ∎

3. Application aux multifonctions analytiques polygonales. Nous considérons maintenant une multifonction K qui est analytique, continue, et prend pour valeurs des polygones convexes. Comme toujours, la continuité est celle définie par la distance de Hausdorff pour les compacts:

$$\Delta(K, L) = \max\left(\max_{z\in K} \mathrm{dist}(z, L), \max_{\zeta\in L} \mathrm{dist}(\zeta, K)\right).$$

Si le nombre de sommets $n = 2$, on sait déjà que K est l'enveloppe convexe d'une fonction algébroïde. L'exemple qui suit montre que le cas $n \geq 3$ est différent.

Exemple 1. Soit $D = \{\lambda \in \mathbf{C}\colon \mathrm{Im}\lambda > 0\}$ et considérons la fonction multiforme K définie sur D par

$$K(\lambda) = \begin{cases} [0, 1] & \text{si } |\lambda| \leq 1, \\ \mathrm{co}\{0, 1, -(i/\pi)\log\lambda\} & \text{si } |\lambda| > 1, \end{cases}$$

où $\mathrm{co}\,E$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble E et $\log\lambda = \log|\lambda| + i\arg\lambda$ avec $0 < \arg\lambda < \pi$.

Alors $K(\lambda)$ est continue et possède des sélections holomorphes. Par conséquent elle est analytique (voir par exemple [6]). K prend pour valeurs des triangles mais dégénère en un segment sur le "gros" ensemble $D \cap \{\lambda\colon |\lambda| \leq 1\}$. On peut bien exprimer $K(\lambda)$ comme $\mathrm{co}\{0, 1, \varphi(\lambda)\}$ pour une fonction continue φ, mais on ne peut le faire pour une fonction φ holomorphe. Cependant, hors de l'ensemble exceptionnel où K dégénère, ses sommets varient holomorphiquement. Ceci n'est pas une coïncidence, comme le montrera le Théorème 3.

Lemme 2. *Soit K un polygone convexe à n sommets. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout polygone convexe L satisfaisant $\Delta(K, L) < \varepsilon$ a au moins n sommets.*

Démonstration. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les sommets de K. Pour chaque $i = 1, \ldots, n$, il existe une fonctionnelle linéaire l_i telle que

$$\mathrm{Re}\, l_i(z_i) > \max_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j\neq i}} \mathrm{Re}\, l_i(z_j).$$

Pour $r > 0$, posons $K_r = \{z \in \mathbf{C}\colon \mathrm{dist}(z, K) < r\}$ et $E_i(r) = \{z \in \mathbf{C}\colon \mathrm{Re}\, l_i(z) > \mathrm{Re}\, l_i(z_i) - r\}$.

Pour r suffisamment petit, la droite $\mathrm{Re}\, l_i(z) = \mathrm{Re}\, l_i(z_i) - r$ sépare z_i des autres z_j, et les ouverts $U_i = E_i(r) \cap K_r$ sont mutuellement disjoints. Soit $\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,n} \mathrm{dist}(z_i, \partial U_i)$. Si $\Delta(K, L) < \varepsilon$, alors pour chaque i, $U_i \cap L$ est non vide. La fonctionnelle $\mathrm{Re}\, l_i$ est maximisée sur L en un point extrême η_i, et on a nécessairement $\eta_i \in U_i$. Puisque les U_i sont deux à deux disjoints, les points $\eta_1, \ldots, \eta_n$ constituent n sommets distincts de L. ∎

Théorème 3. *Soit K une multifonction analytique définie sur un domaine D de $\mathbf{C}$. Supposons de plus que K est continue et que $K(\lambda) \subseteq \mathbf{C}$ est toujours un polygone convexe à au plus n sommets. Soit E l'ensemble des points où $K(\lambda)$ a moins de n sommets. Alors $D\backslash E$ est ouvert et les sommets de K varient localement holomorphiquement sur $D\backslash E$.*

Démonstration. Le fait que $D\backslash E$ soit ouvert est une conséquence immédiate du lemme précédent. Soit $\lambda_0 \in D\backslash E$, et appelons $z_1, \ldots, z_n$ les sommets de $K(\lambda_0)$. Soient $U_1, \ldots, U_n$, $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ comme dans le Lemme 2. On peut également supposer que les $\bar U_i$ sont mutuellement disjoints. Par continuité de K, il existe $\delta > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ implique $\Delta(K(\lambda), K(\lambda_0)) < \varepsilon$. Soit $\varphi_i(\lambda)$ le sommet de $K(\lambda)$ qui se trouve dans U_i, pour $\lambda \in D = B(\lambda_0, \delta)$.

Contentons-nous de montrer le résultat pour φ_1; la démonstration est la même pour les autres φ_i. Quitte à faire une rotation et une translation, on peut supposer que $l_1(z) = -z$, et qu'il existe un $\beta > 0$ tel que

$$\bar{U}_1 \subseteq \{z\colon \operatorname{Re} z < -2\beta\}, \qquad \bar{U}_2 \cup \ldots \cup \bar{U}_n \subseteq \{z\colon \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Puisque les disques $B(x, x)(x > 0)$ forment une exhaustion du demi-plan droit, ou voit que pour $x \in \mathbf{R}$ assez grand, disons $x > x_0$, on a

$$\max_{\zeta \in \bar{U}_1 \cup \ldots \cup \bar{U}_n} |\zeta - x| = \max_{\zeta \in \bar{U}_1} |\zeta - x|.$$

Cette dernière égalité reste vraie si on remplace x par un $z \in \mathbf{C}$ satisfaisant $|z-x| < \beta$. Par ailleurs la fonction $f(\zeta) = |\zeta - z|$ est maximisée pour $\zeta \in K(\lambda)$ en un sommet de $K(\lambda)$. Par conséquent, si $\lambda \in B(\lambda_0, \delta)$ on a

$$\max_{\zeta \in K(\lambda)} |\zeta - z| = |\varphi_1(\lambda) - z|$$

pour tout $z \in G$ où on a posé $G = \{x + iy \in \mathbf{C}\colon x > x_0, |y| < \beta\}$.

Considérons maintenant la multifonction définie sur $D \times G$ par

$$\tilde{K}(\lambda, z) = K(\lambda) \times \{z\}.$$

D'après un théorème de Z. Słodkowski, qu'on peut trouver démontré dans [6] (Theorem 2.3), $\tilde{K}$ est analytique. La fonction de quatre variables

$$\psi(\lambda, z, \zeta, \xi) = \log|\zeta - \xi|$$

est plurisousharmonique sur $\mathbf{C}^4$. Donc par la Définition 1, la fonction

$$\Psi(\lambda, z) = \max\{\psi(\lambda, z, \zeta, \xi)\colon (\zeta, \xi) \in \tilde{K}(\lambda, z)\}$$

est plurisousharmonique sur $D \times G$. Mais

$$\Psi(\lambda, z) = \log|\varphi_i(\lambda) - z|.$$

En appliquant le Théorème 2 on voit que φ_1 est holomorphe sur $B(\lambda_0, \delta)$. ∎

Le théorème de rareté permet de dire que si $K(\lambda)$ est une multifonction analytique finie définie sur un domaine D, alors il existe un entier n et un ensemble discret $E \subset D$ tel que K contient exactement n points sauf sur E où elle contient moins de n points. Si K prend pour valeurs des polygones convexes, existe-t-il un n tel que $K(\lambda)$ a toujours au plus n sommets? L'exemple qui suit montre que ce n'est pas toujours le cas.

Exemple 2. Soit $D = \{\lambda\colon |\lambda| < 1\}$ et

$$K(\lambda) = \{\lambda^n\colon n \in \mathbf{N}\} \cup \{0\}.$$

La fonction K est continue et possède des sélections holomorphes: elle est donc analytique. Posons

$$L(\lambda) = \operatorname{co} K(\lambda).$$

La fonction L est analytique (voir [3], p. 31) et prend pour valeurs des

polygones convexes. En effet, si λ est réel, $L(\lambda)$ se réduit à un segment. Sinon, alors 0 est un point intérieur de $L(\lambda)$: si ce n'était pas le cas, on aurait $0 \in \partial L(\lambda)$ et cela impliquerait l'existence d'une droite passant par l'origine et telle que λ^n est situé du même côté de cette droite pour tout n. Ceci est impossible. Puisque 0 est un point intérieur de $L(\lambda)$, il existe une boule $B(0, r) \subset L(\lambda)$. Or pour $n > n_0$, on a $\lambda^n \in B(0, r)$. Ceci implique que $L(\lambda)$ coïncide avec l'enveloppe convexe des points $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n_0}$.

Cependant, le nombre de sommets de $L(\lambda)$ n'est pas borné. En effet, considérons un point λ de la forme $\lambda = r\zeta$ où $0 < r < 1$ et $\zeta = e^{2i\pi/n}$ pour un entier $n > 0$. Alors on peut voir que $L(\lambda)$ est l'enveloppe convexe des points $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n$. Maintenant les ζ^k $(k = 1, \ldots, n)$ forment les sommets d'un polygone régulier et il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctionnelles linéaires l_k telles que $\operatorname{Re} l_k$ sépare $B(\zeta^k, \varepsilon)$ de $\bigcup_{j \neq k} B(\zeta^j, \varepsilon)$. Si r est choisi suffisamment près de 1, alors $\lambda^k \in B(\zeta^k, \varepsilon)$ pour tout $k = 1, \ldots, n$ et on voit alors que $\lambda, \ldots, \lambda^n$ sont tous des points extrêmes de $\operatorname{co}\{\lambda, \ldots, \lambda^n\}$. Ainsi dans ce cas $L(\lambda)$ a n sommets.

Il serait intéressant de connaître des conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre de sommets soit borné.

Bibliographie

[1] B. Aupetit, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes in Math. 735, Springer, Heidelberg 1979.

[2] —, *Analytic multivalued functions in Banach algebras and uniform algebras*, Adv. in Math. 44 (1982), 18–60.

[3] —, *Geometry of pseudoconvex open sets and distribution of values of analytic multivalued functions*, Contemp. Math. 32 (1984), 15–34.

[4] L. Baribeau, *Sur les fonctions analytiques multiformes dont les valeurs sont des segments*, Canad. Math. Bull., à paraître.

[5] R. Narasimhan, *Several Complex Variables*, Chicago Lectures in Math., Univ. of Chicago Press, 1971.

[6] T. J. Ransford, *Analytic Multivalued Functions*, doctoral thesis, Cambridge Univ., 1983.

[7] L. I. Ronkin, *Introduction to the Theory of Entire Functions of Several Variables*, A.M.S. Transl. Math. Monographs 44, Providence, R.I., 1974.

[8] Z. Słodkowski, *Analytic set-valued functions and spectra*, Math. Ann. 256 (1981), 363–386.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ LAVAL
Québec, Canada G1K 7P4

Adresse actuelle:

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL STATISTICS
CAMBRIDGE UNIVERSITY
16 Mill Lane, Cambridge CB2 1SB, U.K.

Received February 27, 1989
Revised version April 21, 1989

(2540)