STUDIA MATHEMATICA, T. XCV (1989)

Algèbres duales uniformes d'opérateurs sur l'espace de Hilbert

par

GILLES CASSIER (Paris)

Abstract. We give some properties of singly generated dual algebras on the Hilbert space and use them to study the case of uniform dual algebras. Let $\mathscr{A}_T$ be a uniform dual algebra generated by an operator T. We give a decomposition of $\mathscr{A}_T$ and obtain as corollary the existence of hyper-invariant or invariant subspaces for T. When the set $\{\chi(T);\ \chi\in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_T)\}$ is finitely connected we show that T admits a normal dilatation.

Une *algèbre duale* sur un espace de Hilbert H est une sous-algèbre de l'algèbre $L(H)$ des opérateurs bornés sur H qui est fermée pour la topologie ultrafaible définie par dualité avec l'espace τc des opérateurs à trace. Une algèbre duale est *uniforme* si la transformée de Gelfand est une isométrie. Deux exemples typiques de cette situation sont:

1° L'algèbre duale $\mathscr{A}_T$ engendrée par un opérateur T sous-normal [12; chap. 3, p. 207–208], pour lequel le problème des sous-espaces invariants a été résolu par S. Brown [6].

2° L'algèbre duale $\mathscr{A}_T$ engendrée par une contraction T dont le calcul fonctionnel de Nagy–Foiaş est isométrique et pour laquelle l'existence de sous-espaces invariants non triviaux (s.i.n.t.) a été récemment prouvée par S. Brown, B. Chevreau et C. Pearcy [7, 11].

L'étude de ces algèbres a permis de nombreux progrès ces dix dernières années en théorie des opérateurs, notamment pour le problème des sous-espaces invariants, donnant non seulement l'existence de s.i.n.t., mais aussi des résultats précis sur le treillis des s.i.n.t. [4, 10, 13]. Au moyen de ces algèbres on peut aussi définir et étudier une classification fine des opérateurs sur l'espace de Hilbert [5, 8].

Au cours de la première partie on associe à un opérateur T sur H une partie de $\mathbf{C}$ que l'on utilisera ensuite pour décrire l'algèbre duale engendrée par T et on établit des propriétés générales concernant cette construction.

La seconde est consacrée aux algèbres duales uniformes $\mathscr{A}_T$ engendrées par un seul opérateur T. On donne une décomposition de ces algèbres; il en découle que si l'opérateur qui à S dans $\mathscr{A}_T$ fait correspondre une fonction $\tilde{S}$ analytique sur l'intérieur de l'ensemble $\alpha^*(T) = \{\alpha\in\mathbf{C};\ \overline{(T-\alpha I)\mathscr{A}_T}^{w^*} \neq \mathscr{A}_T\}$

n'est pas isométrique, T admet un sous-espace hyper-invariant non trivial et dans le cas où cet opérateur est isométrique, on a toujours un sous-espace invariant non trivial. On termine par la construction d'une dilatation normale pour les opérateurs engendrant une algèbre duale uniforme dans laquelle leur spectre de Gelfand est finiment connexe.

I. Quelques remarques sur les algèbres duales engendrées par un seul opérateur. Pour un opérateur T sur l'espace de Hilbert H, on désigne par $\mathscr{A}_T$ l'algèbre duale engendrée par T et on introduit le spectre faible $\sigma^*(T)$ de T très lié à la structure de l'algèbre $\mathscr{A}_T$ et qui possède des propriétés intéressantes.

DÉFINITION. On appelle *spectre faible* d'un opérateur T sur H l'ensemble des nombres complexes λ tels que l'idéal ultrafaiblement fermé engendré par $T-\lambda I$ soit un idéal propre de $\mathscr{A}_T$.

On note, en suivant [5], ${}^{\perp}\mathscr{A}_T$ le prépolaire de $\mathscr{A}_T$ dans τc et Q_T le quotient $\tau c/{}^{\perp}\mathscr{A}_T$ qui s'identifie au prédual de $\mathscr{A}_T$.

Si $\lambda\in\sigma^*(T)$, l'idéal $\mathscr{I}_\lambda=\overline{(T-\lambda I)\mathscr{A}_T}^{w^*}$ est distinct de $\mathscr{A}_T$, il existe donc $[C_\lambda]$ ($C_\lambda\in\tau c$) dans le prédual Q_T de $\mathscr{A}_T$ tel que $\langle[C_\lambda], I\rangle=1$ et $\langle[C_\lambda], S\rangle=0$ pour tout S de $\mathscr{I}_\lambda$. De là on peut voir que $\sigma^*(T)$ coïncide avec le spectre ponctuel de l'opérateur $\tilde{T}$ sur Q_T défini par

$$\tilde{T}[A]=[TA] \qquad \text{pour } A\in\tau c.$$

$\sigma^*(T)$ peut être vide, cela correspond à un type particulier d'algèbre duales pour $\mathscr{A}_T$, en effet pour tout nombre complexe λ l'opérateur $T-\lambda I$ possède alors des quasi-inverses approchés dans $\mathbf{C}[T]$ pour la topologie ultrafaible (on pourra déjà remarquer au cours du paragraphe II que cette situation est très restrictive dans le cas où $\mathscr{A}_T$ est uniforme). Il n'est pas fermé en général pour la topologie usuelle de $\mathbf{C}$, mais possède une structure d'espace métrique complet pour la distance naturelle vis-à-vis de l'opérateur T (et de l'algèbre $\mathscr{A}_T$) définie par

$$d(\alpha,\beta)=\|[C_\alpha]-[C_\beta]\| \qquad \text{pour } \alpha,\beta\in\sigma^*(T).$$

Dans le cas d'une contraction complètement non unitaire dont le calcul fonctionnel de Nagy–Foiaş est isométrique on a $\sigma^*(T)=\mathbf{D}$.

Pour S appartenant à $\mathscr{A}_T$ on définit sur $\sigma^*(T)$ la fonction d'une variable complexe $\tilde{S}$ utile pour l'étude de $\mathscr{A}_T$ par

$$\tilde{S}(\lambda)=\operatorname{Tr}(C_\lambda S).$$

THÉORÈME 1. *L'intérieur U_T du spectre faible de T est un ouvert simplement connexe de $\mathbf{C}$. Pour tout opérateur S de l'algèbre $\mathscr{A}_T$, $\tilde{S}$ est une fonction holomorphe et bornée sur U_T. Pour λ appartenant à $\sigma^*(T)$, on peut trouver un opérateur à trace positif J_λ tel que $[J_\lambda]=[C_\lambda]$ (en particulier $\|J_\lambda\|_1=\|[C_\lambda]\|=1$). De plus si $\lambda\in U_T$ et $S\in\mathscr{A}_T$ tel que $\tilde{S}$ soit non constante au voisinage de λ, il existe un vecteur unitaire x de H vérifiant*

$$\tilde{S}(\lambda)=\langle Sx\,|\,x\rangle.$$

Preuve. Soient γ un lacet contenu dans U_T et α un nombre complexe n'appartenant pas à $\sigma^*(T)$. Il existe pour $u\in\Gamma=\operatorname{Im}\gamma$ un unique point $[C_u]$ dans Q_T tel que $\langle[C_u], I\rangle=1$ et $\langle[C_u], R\rangle=0$ pour tout R se trouvant dans l'idéal $\mathscr{I}_u$. Dans un premier temps, nous allons montrer que l'ensemble $[\Gamma]=\{[C_u];\ u\in\Gamma\}$ est compact dans le prédual Q_T.

On prend un lacet γ_1 contenu dans U_T qui entoure γ. Si $u\in\Gamma$, on définit la forme linéaire L_u sur Q_T par

$$L_u(S)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\langle[C_z], S\rangle}{z-u}dz \qquad \text{où } \Gamma_1=\operatorname{Im}\gamma_1.$$

L_u est évidemment continue pour la norme puisque

$$|L_u(S)|\leqslant\frac{l(\Gamma_1)\|S\|}{d(u,\Gamma_1)} \qquad \text{avec } l(\Gamma_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}d|z|.$$

Pour montrer qu'elle est faiblement continue il suffit d'après le théorème de Krein–Shmul'yan de prouver qu'elle est faiblement séquentiellement continue.

Si $(S_n)_{n\geqslant0}$ est une suite dans $\mathscr{A}_T$ qui converge faiblement vers zéro, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant0}$, $f_n(z)=\operatorname{Tr}(C_zS_n)$, définie sur Γ_1 converge simplement vers zéro et est uniformément bornée d'après le théorème de Banach–Steinhaus. Le théorème de Lebesgue assure que $L_u(S_n)$ converge vers zéro. D'autre part $L_u(I)=1$ et $L_u((T-uI)P(T))=0$ si P appartient à $\mathbf{C}[X]$; comme $\mathscr{I}_u=\overline{(T-uI)\mathbf{C}[T]}^{w^*}$, on obtient finalement l'égalité $L_u=[C_u]$ par unicité de l'élément $[C_u]$ dans Q_T.

Si u et v sont deux points de Γ et S un opérateur se trouvant dans $\mathscr{A}_T$, on a

$$\langle[C_u]-[C_v], S\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\operatorname{Tr}(C_zS)(u-v)}{(z-u)(z-v)}dz,$$

d'où

$$\|[C_u]-[C_v]\|\leqslant\frac{l(\Gamma_1)}{d(\Gamma,\Gamma_1)^2}|u-v|.$$

L'application qui à u dans Γ associe l'élément $[C_u]$ dans Q_T est donc continue (et même holomorphe de int $\sigma^*(T)$ dans Q_T) et par conséquent son image $[\Gamma]$ est compacte dans Q_T.

D'après le théorème de Krein–Shmul'yan $\mathscr{I}_\alpha=\overline{(T-\alpha I)\mathbf{C}[T]}^{w^*}$ est aussi l'adhérence de l'espace vectoriel $(T-\alpha I)\mathbf{C}[T]$ pour la topologie sur $\mathscr{A}_T$ dont les ouverts sont les ensembles qui ont une trace relativement ouverte pour la topologie faible dans toute boule de $\mathscr{A}_T$ centrée en zéro.

Si S se trouve dans $\mathscr{A}_T$ et si n est un entier strictement positif, on pose

$$[\Gamma]_n=\{R\in\mathscr{A}_T;\ \forall\, z\in\Gamma\ |\tilde{S}(z)-\tilde{R}(z)|<1/n\}.$$

Nous allons montrer que $[\Gamma]_n$ est un voisinage de S pour la topologie définie ci-dessus. Si r est un réel strictement positif, on considère un recouvrement fini du compact $[\Gamma]$ par des boules $B\big([C_{z_i}], 1/(2n(r+\|S\|))\big[$, i variant de 1 à p ($p\in\mathbf{N}^*$). Soit $R\in\mathscr{A}_T$ tel que $\|R\|<r$ et $|\tilde S(z_k)-\tilde R(z_k)|<1/(2n)$ pour $k\in\{1,\ldots,p\}$. Si z appartient à Γ, il existe $j\in\{1,\ldots,p\}$ pour lequel

$$\|[C_z]-[C_{z_j}]\|<\frac{1}{2n(r+\|S\|)}.$$

Il vient

$$\begin{aligned}|\tilde R(z)-\tilde S(z)| &\leqslant |\langle [C_z]-[C_{z_j}],\, R-S\rangle|+|\langle C_{z_j},\, R-S\rangle|\\ &\leqslant \|[C_z]-[C_{z_j}]\|\;\|R-S\|+|\tilde R(z_j)-\tilde S(z_j)|\\ &<\frac{1}{2n(r+\|S\|)}(r+\|S\|)+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

On pose $V(S)=\{R;\ |\tilde S(z_k)-\tilde R(z_k)|<1/(2n)$ pour $k\in\{1,\ldots,p\}\}$. L'inégalité précédente donne $V(S)\cap B_{\mathscr{A}_T}(0,r[\subseteq[\Gamma]_n\cap B_{\mathscr{A}_T}(0,r[$ et prouve que $[\Gamma]_n\cap B_{\mathscr{A}_T}(0,r[$ est ouvert dans la boule $B_{\mathscr{A}_T}(0,r[$ munie de la topologie faible.

Comme α n'est pas un point du spectre faible de T, l'identité appartient à $\mathscr{I}_\alpha$ et on peut remplacer S par I dans ce qui précède. L'ensemble $[\Gamma]_n\cap(T-\alpha I)\mathbf{C}[T]$ est donc non vide; on choisit un opérateur $R_n=(T-\alpha I)P_n(T)$ dans ce dernier. Ainsi pour tout point z de Γ on a $|(z-\alpha)P_n(z)-1|<1/n$ et par suite

$$\begin{aligned}0=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma P_n(z)\,dz&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{(z-\alpha)P_n(z)}{z-\alpha}\,dz\\ &\to\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dz}{z-\alpha}=N(\alpha,\gamma)\qquad\text{lorsque } n\to\infty.\end{aligned}$$

Par continuité de l'indice $N(\cdot,\gamma)$ il vient $N(\alpha,\gamma)=0$ pour tout point α n'appartenant pas à U_T, ce qui prouve que U_T est simplement connexe. D'après ce qui précède, la fonction $\tilde S$ est bornée sur U_T et vérifie la formule de Cauchy; ceci entraîne l'holomorphie de $\tilde S$ sur U_T.

Soit λ un point du spectre faible de T. Il existe un opérateur à trace C_λ tel que $\mathrm{Tr}(C_\lambda T^n)=\lambda^n$ pour $n\geqslant 0$. C_λ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux opérateurs de Hilbert–Schmidt A et B^*. On désigne par E et F les sous-espaces fermés de l'espace $\mathscr{C}_2$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt engendrés respectivement par

$$\mathbf{C}[T]A=\{P(T)A;\ P\in\mathbf{C}[X]\}\quad\text{et}$$

$$\mathbf{C}[T](T-\lambda I)A=\{Q(T)(T-\lambda I)A;\ Q\in\mathbf{C}[X]\}.$$

On constate que $E=\mathbf{C}A+F$. Notons $\mathscr{P}$ la projection orthogonale de $\mathscr{C}_2$ sur le sous-espace E et posons $C=\mathscr{P}(B)$. C s'écrit sous la forme

$$C=\alpha A+C'\quad\text{avec } \alpha\in\mathbf{C} \text{ et } C'\in F.$$

Alors si $P\in\mathbf{C}[X]$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(P(T)CC^*)&=\alpha\mathrm{Tr}(P(T)AC^*)+\mathrm{Tr}(P(T)C'C^*)\\ &=\alpha\mathrm{Tr}(P(T)AB^*)+\mathrm{Tr}(P(T)C'B^*)\\ &=\alpha\mathrm{Tr}(P(T)C_\lambda)+\mathrm{Tr}(P(T)C'B^*)=\alpha P(\lambda)\end{aligned}$$

car $P(T)C'$ appartient à F et B est orthogonal à F par construction. De plus $\alpha=\mathrm{Tr}(CC^*)$ et il suffit de prendre pour J_λ l'opérateur à trace positif $CC^*/\mathrm{Tr}(CC^*)$.

En décomposant J_λ sur une base orthonormée de son image formée de vecteurs propres on voit facilement que si $S\in\mathscr{A}_T$ le point $\tilde S(\lambda)=\mathrm{Tr}(SJ_\lambda)$ se trouve dans l'adhérence de l'image numérique $I(S)$ de S. Maintenant si on se donne λ dans U_T et S dans $\mathscr{A}_T$ tel que $\tilde S$ soit non constante au voisinage de λ, on en déduit par holomorphie de $\tilde S$ que $\tilde S(\lambda)\in(\overline{I(S)})^\circ$. Mais $(\overline{I(S)})^\circ=(I(S))^\circ$ par convexité de l'image numérique d'un opérateur. Finalement $\tilde S(\lambda)\in I(S)$ et il existe un vecteur unitaire x de H tel que $\tilde S(\lambda)=\langle Sx\,|\,x\rangle$, ce qui termine la preuve du théorème 1.

Remarques. Si on parvient à uniformiser cette dernière propriété, c'est-à-dire avoir $\tilde S(\lambda)=\langle Sx\,|\,x\rangle$ pour un vecteur unitaire x de H indépendant de S tel que $\tilde S$ soit non constante sur la composante connexe contenant λ, on obtient l'existence d'un sous-espace invariant non trivial pour T.

D'autre part, l'espace τc des opérateurs à trace est un dual séparable, l'ensemble Λ_α ($\alpha\in\sigma^*(T)$) des opérateurs à trace positifs A tels que $[A]=[C_\alpha]$ est non vide ($J_\alpha\in\Lambda_\alpha$), convexe, fermé, et borné, Λ_α admet donc des points extrémaux d'après le théorème de Bessaga–Pełczyński. Que peut-on dire de ces derniers? Un point extrémal de Λ_α qui est de rang un assure l'existence d'un sous-espace invariant non trivial pour T.

Si $\alpha\in\sigma^*(T)$, J_α n'est évidemment pas unique en général, par exemple si T admet un sous-espace propre E_α de dimension supérieure ou égale à deux pour α, deux vecteurs u, v unitaires et libres de E_α donneront deux éléments $u\otimes u$ et $v\otimes v$ distincts de Λ_α.

Il est clair aussi que l'intérieur U_T de $\sigma^*(T)$ n'est pas connexe en général. Pour le voir il suffit de considérer sur l'espace $H=l^2\oplus l^2$ l'opérateur $T=S\oplus(2I-S)$ (S est le shift usuel sur l^2) pour lequel $\sigma^*(T)=U_T=\mathbf{D}\cup(2-\mathbf{D})$.

II. Cas des algèbres duales uniformes. Nous considérons désormais une algèbre duale uniforme $\mathscr{A}_T$ engendrée par un opérateur T sur H. Si U est un ouvert de $\mathbf{C}$, on désignera par H_U^∞ l'espace des fonctions analytiques et bornées sur U. On pose

$$K=\{\chi(T);\ \chi\in\mathrm{sp}(\mathscr{A}_T)\}.$$

PROPOSITION 1. *L'intérieur de K coïncide avec l'intérieur du spectre faible de T. On a $K = \sigma(T) \cup \sigma^*(T)$, de plus tout point de K n'appartenant pas à $\sigma^*(T)$ est dans le spectre essentiel à gauche de T et si α n'est pas dans K, l'opérateur $(\alpha I - T)^{-1}$ se trouve dans l'algèbre $\mathcal{A}_T$.*

Preuve. Nous allons montrer que la transformée de Gelfand $\hat{S}$ d'un élément S de $\mathcal{A}_T$ se factorise sur l'intérieur U de K par une fonction h_S analytique et bornée sur U.

Pour cela on utilisera un théorème de S. Banach [3] qui nous dit que si on définit pour un ordinal d le sous-espace Y_d de $L(H)$ par

$$\begin{cases} Y_1 = \mathbf{C}[T], \\ Y_d = \{S \in L(H);\ \exists\ (S_n)_{n\geq 0} \subseteq Y_{d-1}\ S_n \xrightarrow{w^*} S\} \text{ si } d \text{ a un prédécesseur } d-1, \\ Y_d = \bigcup_{d'<d} Y_{d'} \quad \text{si } d \text{ est un ordinal limite,} \end{cases}$$

alors il existe un ordinal dénombrable d_0 tel que $\mathcal{A}_T = Y_{d_0}$.

On établit par récurrence transfinie la propriété suivante:

(1) $\quad \forall\ S \in Y_d,\ \exists\ h_S \in H_U^\infty,\ \forall \alpha \in U,\ \exists S_\alpha \in Y_d$ tels que

$$S = h_S(\alpha) I + (T - \alpha I) S_\alpha.$$

Il est clair que $Y_1 = \mathbf{C}[T]$ vérifie (1). Si d est un ordinal qui a un prédécesseur $d-1$ et S un opérateur se trouvant dans Y_d, il existe par définition de Y_d une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ contenue dans Y_{d-1} qui converge ultrafaiblement vers S. Comme Y_{d-1} vérifie (1) par hypothèse, S_n s'écrit $S_n = f_n(\alpha)I + (T-\alpha I)S_{\alpha,n}$ pour tout $\alpha \in U$ avec $f_n \in H_U^\infty$ et $S_{\alpha,n} \in Y_{d-1}$.

Si $\alpha \in U$, $|f_n(\alpha)| = |\mathrm{Tr}(J_\alpha S_n)| \leq \|S_n\|$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément bornée par $M = \sup_{n\geq 0} \|S_n\|$. Avec le théorème de Montel on peut se ramener au cas où f_n converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction f appartenant à H_U^∞. Fixons un point α dans U et choisissons un réel r strictement positif tel que le disque fermé $D(\alpha, r]$ soit contenu dans U. Il résulte du principe du maximum que tout opérateur R appartenant à Y_{d-1} vérifie la propriété suivante:

(2) $$\|R\| = \sup\{\chi(R);\ \chi \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_T) \text{ et } \chi(T) \in K \backslash D(\alpha, r]\}.$$

Si $\chi(T) \in K\backslash D(\alpha, r]$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$\chi(S_{\alpha,n}) = \frac{\chi(S_n) - f_n(\alpha)}{\chi(T) - \alpha},$$

d'où $|\chi(S_{\alpha,n})| \leq 2M/r$, et comme $S_{\alpha,n} \in Y_{d-1}$, il vient avec (2) $\|S_{\alpha,n}\| \leq 2M/r$. On considère une suite extraite (S_{α,n_k}) qui converge ultrafaiblement vers un opérateur S_α qui appartiendra nécessairement à Y_d. On obtient à la limite

$$S = h(\alpha) I + (T - \alpha I) S_\alpha,$$

ce qui prouve que Y_d vérifie (1).

La propriété (1) est immédiate lorsque d est un ordinal limite. Ainsi $\mathcal{A}_T = Y_{d_0}$ vérifie (1).

Soit $\alpha \in U$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une suite d'opérateurs se trouvant dans $\mathcal{A}_T$ telle que $(T-\alpha I)S_n$ converge ultrafaiblement vers S. $\mathcal{A}_T$ vérifie la propriété (1), d'où si $r > 0$ est tel que $D(\alpha, r] \subseteq U$,

$$\|(T-\alpha I)S_n\| = \sup\{|\chi(T) - \alpha||\chi(S_n)|;\ \chi \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_T) \text{ et } \chi(T) \in K\backslash D(\alpha, r]\}$$
$$\geq r\|S_n\| \quad \text{et}$$
$$\|S_n\| \leq \frac{1}{r} \sup_{p\geq 0} \|(T-\alpha I)S_p\|.$$

En prenant une suite extraite $(T-\alpha I)S_{n_k}$ qui converge ultrafaiblement vers un opérateur $S_\alpha \in \mathcal{A}_T$ on obtient $S = (T-\alpha I)S_\alpha$. On voit donc avec le théorème de Krein–Shmul'yan que l'idéal $(T-\alpha I)\mathcal{A}_T$ est ultrafaiblement fermé, il ne contient pas l'identité car $\alpha \in K$ et par conséquent $\alpha \in \sigma^*(T)$. Par suite $U \subseteq \sigma^*(T) \subseteq K$ et on a bien $U = \mathrm{int}\,\sigma^*(T)$.

Maintenant si $\alpha \in K$ et $\alpha \notin \sigma^*(T)$, il existe une suite généralisée $((T-\alpha I)P_i(T))_{i\in I}$ qui converge ultrafaiblement vers l'identité. $\alpha I - T$ n'est pas inversible; sinon l'opérateur inverse $(\alpha I - T)^{-1} = \lim^{w^*} P_i(T)$ serait dans $\mathcal{A}_T$, ce qui contredirait l'appartenance de α à K. De plus les noyaux des opérateurs $T - \alpha I$ et $T^* - \bar{\alpha} I$ sont réduits à $\{0\}$ car $\alpha \notin \sigma^*(T)$. α appartient donc obligatoirement au spectre essentiel à gauche de T.

Soit α un nombre complexe ne se trouvant pas dans K. Il existe une suite d'opérateurs $(S_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{A}_T$ telle que la suite $((T-\alpha I)S_n)_{n\geq 0}$ converge pour la norme de $L(H)$ vers I. On a

$$\|(T-\alpha I)S_n\| = \sup\{|\chi(T) - \alpha||\chi(S_n)|;\ \chi \in \mathrm{sp}(\mathcal{A}_T)\}$$
$$\geq d(\alpha, K)\|S_n\|.$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est uniformément bornée et en considérant une suite extraite $(S_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge ultrafaiblement vers un opérateur S néessairement dans $\mathcal{A}_T$ on arrive à l'égalité $I = (T-\alpha I)S$, ce qui termine la preuve de la proposition.

On dit qu'une algèbre duale $\mathcal{A}$ est *décomposable* s'il existe deux idéaux non triviaux de $\mathcal{A}$, I_1 et I_2, ultrafaiblement fermés et d'intersection nulle tels que l'idéal $I = I_1 + I_2$ soit ultrafaiblement fermé (l'algèbre duale engendrée par I_1 et I_2 s'écrit alors $\mathbf{C}I + I_1 + I_2$). Nous supposerons que $\mathcal{A}_T$ vérifie la propriété suivante:

(3) Toute sous-algèbre duale de $\mathcal{A}_T$ décomposable contient un projecteur non trivial.

Une description de l'algèbre $\mathcal{A}_T$ est donnée par le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *L'algèbre $\mathscr{A}_T$ se décompose de la manière suivante:*

$$\mathscr{A}_T = \mathscr{A}_{T_0} \oplus \mathscr{A}_{T_0'} \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathscr{A}_{T_i}$$

où $I \subseteq \mathbf{N}^*$, avec:

— *$\mathscr{A}_{T_0}$ ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles.*

— *T_0' est diagonalisable et complètement normal ($\mathscr{A}_{T_0'}$ est une C^*-algèbre).*

— *Chaque $\mathscr{A}_{T_i}$ est isométrique à $H^\infty_{\mathrm{int}\sigma^*(T_i)}$ avec l'application qui à S dans $\mathscr{A}_{T_i}$ fait correspondre $\tilde{S}$.*

Preuve. On introduit l'ensemble $\boldsymbol{P}$ des projections contenues dans $\mathscr{A}_T$ que l'on ordonne de la manière suivante: si P, $Q \in \boldsymbol{P}$,

$$P \leqslant Q \quad \text{si et seulement si} \quad P(H) \subseteq Q(H).$$

On note $\boldsymbol{M}$ l'ensemble des éléments minimaux de $\boldsymbol{P}$. Si P et Q sont deux éléments distincts de $\boldsymbol{M}$, la projection PQ minore strictement P et Q, ce qui impose à P d'être nulle. On remarque ensuite qu'une projection non nulle se trouvant dans l'algèbre $\mathscr{A}_T$ est nécessairement de norme un, c'est donc un projecteur orthogonal. Ceci entraîne l'orthogonalité des sous-espaces $P(H)$ et $Q(H)$ et par conséquent que $\boldsymbol{M}$ est un ensemble dénombrable, $\boldsymbol{M} = \{P_n;\ n\in\Lambda\subseteq\mathbf{N}^*\}$. On pose

$$P_0 = I - \bigoplus_{n\in\Lambda} P_n \in \mathscr{A}_T, \qquad T_0 = P_0 T P_0.$$

Il est clair que $\mathscr{A}_{T_0}$ ne contient pas de projections orthogonales minimales non nulles. On subdivise ensuite l'ensemble Λ en considérant le sous-ensemble I des entiers j contenus dans Λ pour lesquels la transformée de Gelfand de l'opérateur $T_j = P_j T P_j$ est non constante, et son complémentaire J.

Si j appartient à J, il existe un nombre complexe a_j tel que $T_j = a_j P_j$. On définit alors l'opérateur

$$T_0' = \bigoplus_{j\in J} P_j T P_j = \bigoplus_{j\in J} a_j P_j$$

qui vérifie bien les propriétés annoncées. On se ramène donc au cas où l'algèbre ne contient pas de projecteurs non triviaux et la transformée de Gelfand de T n'est pas constante.

Si F est un compact de $\mathbf{C}$, on adopte les notations classiques, $C(F)$ pour l'algèbre des fonctions continues sur F à valeurs complexes et $R(F)$ pour l'algèbre constituée par la fermeture dans $C(F)$ des fractions rationnelles dont les pôles ne se trouvent pas dans F. Le théorème 1 et la proposition précédente montrent que l'intérieur de K est simplement connexe. Lorsque K est finiment connexe, c'est-à-dire que l'ouvert $\mathbf{C}\backslash K$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, le théorème d'Ahern et de Sarason [2] nous dit que $R(K)$ est une algèbre de Dirichlet. Nous allons prouver que ceci est encore vrai si $\mathbf{C}\backslash K$ a un nombre infini de composantes connexes.

On note $(C_i)_{i\geqslant 0}$ la suite des composantes connexes de $\mathbf{C}\backslash K$ où C_0 désigne la composante connexe non bornée de $\mathbf{C}\backslash K$.

On introduit l'ensemble

$$\boldsymbol{F} = \{K_I = \mathbf{C}\backslash \bigcup_{i\in I} C_i;\ I\subseteq\mathbf{N} \text{ et } R(K_I) \text{ est une algèbre de Dirichlet}\}.$$

$\boldsymbol{F}$ est non vide car il contient l'enveloppe polynomialement convexe $\hat{K} = \mathbf{C}\backslash C_0$ de K d'après le théorème de Walsh. On ordonne $\boldsymbol{F}$ de la manière suivante: $K_I \leqslant K_J$ $(I, J\subseteq\mathbf{N})$ si et seulement si $K_I \supseteq K_J$, c'est-à-dire $I\subseteq J$. Si $\boldsymbol{C} = (K_{I_\alpha})_{\alpha\in\Lambda}$ est une chaîne de $\boldsymbol{F}$, on pose $I = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$. Nous allons montrer que K_I majore cette chaîne. On peut déjà se restreindre au cas où I est infini et I_α est différent de I pour tout α appartenant à Λ. Soit $I = \{i_n\}_{n\geqslant 0}$. On construit par récurrence une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ contenue dans Λ telle que $i_n\in I_{\alpha_n}$ et $(I_{\alpha_n})_{n\geqslant 0}$ soit une suite croissante de parties de $\mathbf{N}$. Supposons que $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ soient construits. Si $i_{n+1}\in I_{\alpha_n}$, on pose $\alpha_{n+1} = \alpha_n$. Dans le cas contraire il existe $\beta\in\Lambda$ tel que $i_{n+1}\in I_\beta$; mais $\boldsymbol{C}$ étant une chaîne, on peut trouver $\gamma\in\Lambda$ pour lequel I_γ contienne I_{α_n} et I_β et il suffit de choisir pour α_{n+1} l'élément γ de Λ.

Finalement $K_I = \bigcap_{n\geqslant 0} K_{I_n}$ avec $K_{I_{n+1}} \subseteq K_{I_n}$ et $R(K_I)$ de Dirichlet. Le théorème de T. Gamelin et J. Garnett [14, 15] nous dit que $R(K_I)$ est une algèbre de Dirichlet. Il en résulte que $\boldsymbol{F}$ est inductif et admet un élément maximal F. Nous allons maintenant prouver que F coïncide avec K.

(i) $\mathring{F} \neq \emptyset$. Supposons que F soit d'intérieur vide. $R(F)$ est une algèbre de Dirichlet, nous avons donc $R(F) = R(\partial F) = C(\partial F) = C(F)$. De plus si $f = P/Q$ est une fraction rationnelle dont les pôles sont hors de F, $f(T)$ appartient à l'algèbre $\mathscr{A}_T$ d'après la proposition précédente car $K\subseteq F$ et on peut calculer la norme de $f(T)$ selon la formule

$$\|f(T)\| = \sup_{\chi\in\mathrm{sp}(\mathscr{A}_T)} |\chi(f(T))| = \sup_{\chi\in\mathrm{sp}(\mathscr{A}_T)} \frac{|P(\chi(T))|}{|Q(\chi(T))|} = \sup_{z\in K} |f(z)| \leqslant \|f\|_F. \tag{4}$$

D'après la proposition 1, $\sigma(T)\subseteq K\subseteq F$. Ceci prouve avec l'inégalité ci-dessus que F est un ensemble spectral pour T. Un théorème de von Neumann [12, p. 302] assure alors que T est un opérateur normal. Comme $R(F) = C(F)$, on peut considérer une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fractions rationnelles dont les pôles sont hors de F qui converge uniformément sur F (donc en particulier sur K) vers la fonction de conjugaison $z\to\bar{z}$. On déduit de l'inégalité (4) que la suite $(f_n(T))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy pour la norme de $L(H)$. Elle converge donc en norme vers un opérateur S de $\mathscr{A}_T$. Soit χ un caractère de l'algèbre $\overline{\mathbf{C}[T, T^*]}^{w^*}$. La restriction de χ à $\mathscr{A}_T$ fournit

$$\chi(S) = \lim_{n\to\infty} \chi(f_n(T)) = \lim_{n\to\infty} f_n(\chi(T)) = \overline{\chi(T)} = \chi(T^*).$$

Ainsi $T^* = S$ appartient à $\mathscr{A}_T$, d'où $\mathscr{A}_T = \overline{\mathbf{C}[T, T^*]}^{w^*}$. Or $\hat{T}$ n'est pas constante et par conséquent $\mathscr{A}_T$ contient un projecteur non trivial, ce qui est contradictoire. La démonstration de (i) est donc terminée.

LEMME. *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de $R(F)$ uniformément bornée qui converge simplement vers zéro sur $\mathring{F}$, la suite $(f_n(T))_{n\geq 0}$ converge ultrafaiblement vers zéro.*

Preuve du lemme. K étant contenu dans F, on voit avec la proposition 1 que les opérateurs $f_n(T)$ sont bien définis et appartiennent à $\mathscr{A}_T$. Supposons que $(f_n(T))_{n\geq 0}$ ne converge pas ultrafaiblement vers 0; en considérant au besoin une suite extraite, on se ramène au cas où $f_n(T)$ converge ultrafaiblement vers un opérateur S non nul se trouvant dans $\mathscr{A}_T$. Soit

$$L = \{X \in \mathscr{A}_T;\ \exists\ (f_n)_{n\geq 0} \subseteq R(F),\ \sup \|f_n\|_F < \infty \text{ et } f_n(T) \xrightarrow{w^*} X\}.$$

L est un sous-espace fermé pour la norme. Dans un premier temps, nous établissons la propriété suivante:

(ii) $\forall\ \alpha \in \mathring{F},\ \exists\ !\, S_\alpha \in L$ tel que $S = (T-\alpha I)S_\alpha$.

On écrit $f_n(z) = f_n(\alpha) + (z-\alpha)g_n(z)$ avec $g_n \in R(F)$ et

$$\|g_n\| \leqslant \frac{2}{d(\alpha, \partial F)} \sup_{n\geq 0} \|f_n\|_F.$$

On tire de là avec (4) que la suite $(g_n(T))_{n\geq 0}$ est uniformément bornée. Il existe donc une suite extraite $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que $g_{n_k}(T)$ converge ultrafaiblement vers un opérateur S_α appartenant à L. Mais $f_{n_k}(T) = f_{n_k}(\alpha)I + (T-\alpha I)g_{n_k}(T)$ et en passant à la limite on obtient $S = (T-\alpha I)S_\alpha$.

Pour prouver l'unicité de S_α il suffit de considérer que α se trouve dans $K \cap \mathring{F}$ (sinon $S_\alpha = S(T-\alpha I)^{-1}$). Si S_α n'est pas unique, il existe un opérateur R non nul dans L qui vérifie $(T-\alpha I)R = 0$. Puisque R appartient à L, il existe une suite $(g_n)_{n\geq 0}$ de $R(F)$ uniformément bornée telle que $g_n(T)$ converge ultrafaiblement vers R. On a $g_n(T) = g_n(\alpha)I + (T-\alpha I)h_n(T)$ avec $(h_n)_{n\geq 0} \subseteq R(F)$ et uniformément bornée. On peut choisir une suite extraite $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que $g_{n_k}(z) \to g(z)$ et $h_{n_k}(T) \xrightarrow{w^*} R_\alpha \in L$ lorsque $k \to \infty$. D'où $R = g(\alpha)I + (T-\alpha I)R_\alpha$.

Soit $\chi \in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_T)$. Si $\chi(T) \neq \alpha$, $(T-\alpha I)R = 0$ implique $\chi(R) = 0$, et si $\chi(T) = \alpha$, l'égalité précédente impose $\chi(R) = g(\alpha)$ ($g(\alpha) \neq 0$ car $R \neq 0$). L'opérateur $P = R/g(\alpha)$ est donc une projection orthogonale non nulle qui est nécessairement l'identité. Alors $T = \alpha I$, ce qui est impossible car $\hat{T}$ n'est pas constante. Ceci achève la preuve de (ii).

De l'unicité de S_α on déduit par compacité que la suite $g_n(T)$ converge elle-même ultrafaiblement vers S_α. Soit $\beta \in \mathring{K}$. On a

$$g_n(z) = g_n(\beta) + (z-\alpha)g_n^1(z) \quad \text{avec } \|g_n^1\|_F \leqslant 2\|g_n\|_F/d(\beta, \partial F),$$

$$\begin{aligned} f_n(z) &= f_n(\alpha) + (z-\alpha)g_n(z) \\ &= f_n(\alpha) + (\beta-\alpha)g_n(\beta) + (z-\beta)\big(g_n(z) + (\beta-\alpha)g_n^1(\beta)\big). \end{aligned}$$

Il en résulte que $(\beta-\alpha)g_n^1(T) \xrightarrow{w^*} S_\beta - S_\alpha$ et par suite

$$\|S_\beta - S_\alpha\| \leqslant \frac{|\beta-\alpha|}{d(\alpha, \partial F)d(\beta, \partial F)} \sup_{n\geq 0} \|f_n\|_F.$$

L'application $\alpha \to S_\alpha$ de $\mathring{F}$ dans $\mathscr{A}_T$ est donc continue et localement bornée. Pour $\alpha \in F^c \subseteq K^c$, la proposition 1 nous permet encore de définir S_α dans $\mathscr{A}_T$ par $S_\alpha = S(T-\alpha I)^{-1}$.

A l'aide de tout ceci on construit pour une fonction analytique f au voisinage de ∂F l'opérateur $f_S(T)$ avec la formule

$$f_S(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(u) S_u\, du$$

où Γ est un contour quelconque de ∂F.

On constate que si χ est un caractère sur $\mathscr{A}_T$ tel que $\chi(T) \in \mathring{F}$, on a avec (ii) $\chi(S_u) = 0$ pour tout $u \in \Gamma$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \|f_S(T)\| &= \sup_{\chi \in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_T)} |\chi(f_S(T))| = \sup_{\substack{\chi \in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_T) \\ \chi(T) \in \partial F}} |\chi(f_S(T))| \\ &= \sup_{\substack{\chi \in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_T) \\ \chi(T) \in \partial F}} \left| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\chi(S) f(u)}{\chi(T)-u} du \right| = \sup_{\substack{\chi \in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_T) \\ \chi(T) \in \partial F}} |\chi(S) f(\chi(T))| \leqslant \|S\| \, \|f\|_{\partial F}. \end{aligned}$$

L'application $f \to f_S(T)$ se prolonge donc à $C(\partial F) = R(\partial F)$.

Nous allons montrer qu'il existe deux opérateurs non nuls X et Y dans $\mathscr{A}_T$ tels que le produit XY soit nul. Pour cela on peut considérer que l'on a:

$$\exists\ \alpha, \beta \in \partial F,\ \alpha \neq \beta,\ \exists\ \chi_1, \chi_2 \in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_T) \text{ tels que}$$
$$\alpha = \chi_1(T), \quad \beta = \chi_2(T) \quad \text{avec } \chi_1(S) \neq 0 \text{ et } \chi_2(S) \neq 0.$$

Sinon il existe z appartenant à ∂K pour lequel $\chi(S) = 0$ si $\chi(T) \neq z$ pour tout caractère χ sur $\mathscr{A}_T$. Alors $X = S$ et $Y = T - zI$ conviennent.

On prend deux fonctions f et g dans $C(\partial F)$ telles que $fg = 0$ et $f(\alpha) = g(\beta) = 1$. En utilisant la formule

$$\forall\ u, v \in (\partial F)^c \quad (u-v)S_u S_v = S(S_u - S_v)$$

on obtient $f_S(T)g_S(T) = S(fg)_S(T) = 0$. De plus

$$\chi_1(f_S(T)) = \chi_1(S) \neq 0, \qquad \chi_2(g_S(T)) = \chi_2(S) \neq 0.$$

Il suffit de poser $X = f_S(T)$ et $Y = g_S(T)$.

On définit les idéaux suivants:

$$I_1 = \overline{X\mathscr{A}_T}^{w^*}, \qquad I_2 = \{Z \in \mathscr{A}_T;\ ZX = 0\}.$$

Il est clair qu'ils sont ultrafaiblement fermés et non triviaux. Si $Z \in I_1 \cap I_2$, il existe une suite généralisée $(Z_i)_{i\in I}$ telle que $Z = \lim^{w^*} XZ_i$ et $ZX = 0$. Ceci entraîne que $Z^2 = \lim^{w^*} ZXZ_i = 0$. Soit $\chi \in \mathrm{sp}(\mathscr{A}_T)$; on a $\chi(Z)^2 = \chi(Z^2) = 0$ et par suite $Z = 0$. Par conséquent $I_1 \cap I_2 = 0$.

Pour prouver que l'idéal $I = I_1 + I_2$ est ultrafaiblement fermé, il suffit de prouver d'après le théorème de Krein–Shmul'yan qu'il est séquentiellement fermé pour la topologie ultrafaible. On considère donc deux suites $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ appartenant respectivement à I_1 et I_2 telles que leur somme $X_n + Y_n$ converge ultrafaiblement vers Z. Pour $\chi \in \mathrm{sp}(\mathscr{A}_T)$, $\chi(X_n) = 0$ ou $\chi(Y_n) = 0$ car $X_n Y_n = 0$. De là, il vient

$$\forall\ \chi \in \mathrm{sp}(\mathscr{A}_T) \qquad \chi(X_n + Y_n) = \chi(X_n) \text{ ou } \chi(Y_n).$$

Il en découle $\|X_n + Y_n\| = \max(\|X_n\| + \|Y_n\|)$. Les deux suites $(X_n)_{n\geqslant 0}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ sont donc uniformément bornées et on peut choisir une suite extraite $(n_k)_{k\geqslant 0}$ telle que X_{n_k} (respectivement Y_{n_k}) converge ultrafaiblement vers $X \in I_1$ (respectivement $Y \in I_2$).

Alors $Z = X + Y \in I_1 + I_2 = I$ et l'idéal I est bien ultrafaiblement fermé. D'après (3) il existe un projecteur non trivial dans $\mathscr{A}_T$, ce qui est impossible; le lemme est donc démontré.

Maintenant si f appartient à $H^\infty_{\hat{F}}$, il existe d'après un théorème de T. Gamelin et J. Garnett [14, 15] une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ dans $R(F)$ telle que

$$f_n(z) \to f(z) \quad \text{lorsque } n \to \infty, \qquad \|f_n\|_F \leqslant \|f\|_{\hat{F}}.$$

Si $(f_{n_k}(T))_{k\geqslant 0}$ et $(f_{m_k}(T))_{k\geqslant 0}$ sont deux suites extraites qui convergent ultrafaiblement vers S_1 et S_2 respectivement, la suite $(f_{n_k} - f_{m_k})_{k\geqslant 0}$ converge simplement vers 0 et est uniformément bornée. Avec le lemme on obtient

$$S_1 - S_2 = \lim (f_{n_k}(T) - f_{m_k}(T)) = 0.$$

Par conséquent la suite $(f_n(T))_{n\geqslant 0}$ converge vers un opérateur S se trouvant dans $\mathscr{A}_T$ et vérifiant $\|S\| \leqslant \|f\|_{\hat{F}}$. Si $(g_n)_{n\geqslant 0}$ est une autre suite uniformément bornée qui converge simplement vers f, on voit en appliquant à nouveau le lemme qu'elle converge aussi ultrafaiblement vers S. Ceci permet de définir pour toute fonction f de $H^\infty_{\hat{F}}$ l'opérateur $f(T)$ dans $\mathscr{A}_T$ avec $\|f(T)\| \leqslant \|f\|_{\hat{F}}$ et tel que $f(T)^\sim = f|_U$.

Supposons qu'il existe $\alpha \in \hat{F}$ tel que $|f(\alpha)| > \|f(T)\|$. Alors α n'appartient pas à K; en effet, dans le cas contraire il existe un caractère χ sur $\mathscr{A}_T$ tel que $\chi(T) = \alpha$, mais $f(T) = f(\alpha)I + (T - \alpha I)g(T)$ avec $g \in H^\infty_{\hat{F}}$, d'où $|f(\alpha)| = |\chi(f(T))| \leqslant \|f(T)\|$, ce qui est contradictoire. Il en résulte qu'il existe un entier $j \in J$ $(F = K_J = \mathbf{C} \setminus \bigcup_{l\in J} C_l)$ tel que α soit élément de C_j. L'intersection de $\overline{C}_j$ et de ∂F est non vide d'après le principe du maximum et par suite $R(K_{J\setminus\{j\}})$ est de Dirichlet [15], on aboutit donc à une contradiction avec la maximalité de F dans $\boldsymbol{F}$. Finalement on a obtenu une sous-algèbre de $\mathscr{A}_T$ contenant T et isométrique à $H^\infty_{\hat{F}}$, elle est ultrafaiblement fermée d'après le théorème de Krein–Shmul'yan, c'est donc l'algèbre $\mathscr{A}_T$ toute entière. Il en découle que $K = F$ et $\mathscr{A}_T$ est isométrique à $H^\infty_{\mathrm{int}\,\sigma^*(T)}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

R e m a r q u e s. 1° On peut se demander si la condition (3) est automatiquement vérifiée par $\mathscr{A}_T$.

2° On peut aussi se demander si l'algèbre $\mathscr{A}_{T_0}$ est une C^*-algèbre. Nous montrerons que c'est le cas lorsque K est supposé finiment connexe.

COROLLAIRE. *Tout opérateur sur l'espace de Hilbert qui engendre une algèbre duale uniforme admet un sous-espace invariant non trivial. De plus si $\mathscr{A}_T$ n'est pas isométrique à un espace de fonctions analytiques et bornées sur un ouvert de* $\mathbf{C}$, *on peut trouver un sous-espace hyper-invariant non trivial pour T.*

P r e u v e. S'il existe deux idéaux non triviaux I_1 et I_2 de $\mathscr{A}_T$ tels que $I_1 \cap I_2 = 0$, on peut trouver X et Y non nuls qui appartiennent respectivement à I_1 et I_2, d'où $XY = 0$ et T admet un sous-espace hyper-invariant non trivial ($\mathrm{Ker}\,X$ par exemple).

Si on suppose que T est sans sous-espaces hyper-invariants non triviaux, on voit avec le théorème 2 que $\mathscr{A}_T$ est isométrique à $H^\infty_{\mathrm{int}\,\sigma^*(T)}$. L'ouvert $U = \mathrm{int}\,\sigma^*(T)$ est connexe car dans le cas contraire il contiendrait un projecteur non trivial qui fournirait un sous-espace hyper-invariant pour T.

D'autre part U est simplement connexe d'après le théorème 1. Il existe donc d'après le théorème de Riemann un isomorphisme analytique ψ de U dans le disque unité ouvert $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$. Soit $T_1 = \psi(T)$, $u \in \mathbf{D}$, on note $\alpha = \psi^{-1}(u)$, il vient $\mathrm{Tr}(T_1^p J_\alpha) = \psi(\alpha)^p = u^p$. On en déduit successivement que $\sigma^*(T_1) = \mathbf{D}$ et $\mathscr{A}_{T_1}$ est isométrique à $H^\infty_{\mathbf{D}}$. En appliquant le théorème de S. Brown, B. Chevreau et C. Pearcy [7, 11] on obtient un sous-espace invariant non trivial pour T_1 qui sera aussi invariant pour T car ψ étant un isomorphisme, on a $T \in \mathscr{A}_{T_1}$.

PROPOSITION 2. *Lorsque K est finiment connexe, l'algèbre $\mathscr{A}_{T_0}$ intervenant dans le théorème 2 est obligatoirement une C^*-algèbre.*

P r e u v e. Supposons que le spectre faible de T_0 est non vide. Si $\alpha \in \sigma^*(T_0)$, il existe d'après le théorème 1 un opérateur à trace positif J_α tel que $\mathrm{Tr}(J_\alpha T_0^n) = \alpha^n$ pour tout entier positif n. Il en résulte que $\mathrm{Tr}(J_\alpha P)$ ne prend que les valeurs zéro et un pour un projecteur P appartenant à $\mathscr{A}_{T_0}$. Considérons l'ensemble $\boldsymbol{P}_\alpha$ des projecteurs appartenant à $\mathscr{A}_{T_0}$ dont l'image est orthogonale à celle de J_α. On ordonne $\boldsymbol{P}_\alpha$ par l'inclusion des images des projecteurs. Soit $\boldsymbol{C} = (P_i)_{i\in I}$ une chaîne de $\boldsymbol{P}_\alpha$. On choisit une base orthonormée $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ du sous-espace $E = \bigcup_{i\in I} P_i(H)$. On construit par récurrence en utilisant le fait que $\boldsymbol{C}$ est une chaîne de $\boldsymbol{P}_\alpha$ une suite $(P_{i_n})_{n\geqslant 0} \subseteq \boldsymbol{C}$ telle que pour tout entier n, $\{\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n\} \subseteq P_{i_n}(H)$ et $P_{i_n}(H) \subseteq P_{i_{n+1}}(H)$. Cette suite converge ultrafaiblement vers la projection orthogonale sur $\bar{E}$ qui appartient donc à $\boldsymbol{P}_\alpha$ et majore $\boldsymbol{C}$.

$\boldsymbol{P}_\alpha$ est non vide $(0 \in \boldsymbol{P}_\alpha)$ et est inductif, il admet donc un élément maximal P. Montrons que P est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Im} J_\alpha)^\perp$. Si ce n'est pas le cas, le fait que $\mathscr{A}_{T_0}$ ne contient pas de projecteurs minimaux implique que $Q = I - P = Q_1 \oplus Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathscr{A}_{T_0}\backslash\{0\}$. Mais $1 = \operatorname{Tr}(J_\alpha Q) = \operatorname{Tr}(J_\alpha Q_1) + \operatorname{Tr}(J_\alpha Q_2)$ et il existe donc $i \in \{1, 2\}$ tel que $\operatorname{Tr}(J_\alpha Q_i) = 0$. Écrivons la décomposition de J_α sur une base orthonormée $(u_l)_{l\in L}$ de son image $(L \subseteq \mathbf{N})$:

$$J_\alpha = \sum_{l\in L} a_l u_l \otimes u_l \quad \text{avec } a_l > 0 \text{ et } \sum_{l\in L} a_l = 1.$$

Q_i étant un projecteur orthogonal, l'égalité $0 = \operatorname{Tr}(J_\alpha Q_i) = \sum_{l\in L} a_l \langle Q_i u_l \mid u_l\rangle$ entraîne $Qu_l = 0$ pour tout $l \in L$. Le projecteur $P \oplus Q_i$ se trouve donc dans $\boldsymbol{P}_\alpha$ et majore strictement P, ce qui est absurde.

Maintenant si R est un projecteur de $\mathscr{A}_{T_0}$ dont l'image contient strictement $P(H) = (\operatorname{Im} J_\alpha)^\perp$, on a nécessairement $1 = \operatorname{Tr}(J_\alpha R) = \sum_{l\in L} a_l \langle Ru_l \mid u_l\rangle$, ce qui impose $Ru_l = u_l$ et par suite $R = I$. Il en résulte que le projecteur orthogonal $I - P$ sur la fermeture de l'image de J_α est un projecteur minimal non trivial de $\mathscr{A}_{T_0}$, ce qui est impossible. On obtient finalement $\sigma^*(T_0) = \emptyset$. On en déduit avec la proposition 1 que $\sigma(T_0) = \{\chi(T_0);\ \chi \in \operatorname{sp}(\mathscr{A}_{T_0})\} \subseteq \partial K$ et que ∂K est spectral pour T_0. D'autre part, comme nous l'avons déjà remarqué, lorsque K est finiment connexe, $R(K)$ est un algèbre de Dirichlet, en particulier $R(\partial K) = C(\partial K)$. En utilisant ensuite un raisonnement analogue à celui de la preuve de (ii), on montre que $\mathscr{A}_{T_0} = \overline{\mathbf{C}[T_0, T_0^*]}^{w^*}$, ce qui termine la preuve de la proposition 2.

PROPOSITION 3. *Lorsque K est finiment connexe, T admet une dilatation normale dont le spectre est contenu dans la frontière de K.*

Preuve. La proposition 1 nous permet de construire l'opérateur $f(T)$ pour toute fonction f se trouvant dans $R(K)$ avec $\|f(T)\| = \|f\|_{\partial K}$. Si $x \in H$, on définit la forme linéaire $L_{x,x}$ sur $R(K)$ par $L_{x,x}(f) = \langle f(T)x \mid x\rangle$. On a vu que lorsque K est finiment connexe, $R(K)$ est une algèbre de Dirichlet. Il en résulte que $L_{x,x}$ se prolonge en une unique mesure positive $\nu_{x,x}$ portée par la frontière de K. Pour deux vecteurs x et y de H on définit la mesure $\nu_{x,y}$ sur ∂K par

$$\nu_{x,y} = \tfrac{1}{4}[(\nu_{x+y,x+y} - \nu_{x-y,x-y}) + i(\nu_{x+iy,x+iy} + \nu_{x-iy,x-iy})].$$

Si Ω est un ensemble appartenant à la tribu borélienne $\boldsymbol{B}(\partial K)$, on peut alors définir l'opérateur $F(\Omega)$ par $\langle F(\Omega)x \mid y\rangle = \nu_{x,y}(\Omega)$. $F(\Omega)$ est un opérateur positif, $F(\emptyset) = 0$ et $F(\partial K) = I$. Soit $(\Omega_n)_{n\geqslant 0}$ une suite disjointe de boréliens de ∂K. On voit facilement que pour tout entier m

$$F\Big(\bigcup_{n=0}^{m} \Omega_n\Big) = \sum_{n=0}^{m} F(\Omega_n).$$

On tire de là

$$\Big\|\sum_{n=0}^{m} F(\Omega_m)x - F\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n\Big)x\Big\|^2 = \Big\|F\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \Omega_n\Big)x\Big\|^2$$
$$\leqslant \Big\langle F\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \Omega_n\Big)x \,\Big|\, x\Big\rangle = \nu_{x,x}\Big(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} \Omega_n\Big).$$

Il en découle que pour tout vecteur x de H la série $\sum_{n=0}^{\infty} F(\Omega_n)x$ converge pour la norme de H vers $F(\bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n)x$. F est donc une mesure quasi-spectrale. Le théorème de Naimark [1, p. 390] assure l'existence d'une mesure spectrale E sur $\boldsymbol{B}(\partial K)$ et à valeurs dans $L(\tilde{H})$, où $\tilde{H}$ est un espace de Hilbert contenant H, telle que

$$\forall\ \Omega \in \boldsymbol{B}(\partial K) \qquad F(\Omega) = PE(\Omega)P,$$

où P désigne la projection orthogonale sur H. On considère l'opérateur normal $N = \int z\, dE$; on vérifie facilement que $T^n = PN^nP$ pour tout entier n positif. Ceci prouve que N est une dilatation normale de T dont le spectre est contenu dans la frontière de K.

Bibliographie

[1] N. I. Achiezer and I. M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Vol. 2, Scottish Academic Press, Edinburgh 1981.

[2] P. R. Ahern and D. Sarason, *On some hypo-Dirichlet algebras of analytic functions*, Amer. J. Math. 89 (1967), 932–941.

[3] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea, New York 1955.

[4] H. Bercovici, C. Foiaş, J. Langsam and C. Pearcy, *(BCP)-operators are reflexive*, Michigan Math. J. 29 (1982), 371–379.

[5] H. Bercovici, C. Foiaş and C. Pearcy, *Dual Algebras with Applications to Invariant Subspaces and Dilation Theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 56, Amer. Math. Soc., 1985.

[6] S. Brown, *Some invariant subspaces for subnormal operators*, Integral Equations Operator Theory 1 (1978), 310–333.

[7] S. Brown, B. Chevreau and C. Pearcy, *On the structure of contraction operators. II*, J. Funct. Anal. 76 (1988), 30–55.

[8] G. Cassier, *Sur la classification de H. Bercovici, C. Foiaş et C. Pearcy concernant les algèbres duales*, ibid. 80 (1988), 371–382.

[9] —, *Image numérique simultanée d'une famille d'opérateurs sur l'espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 305 (1987), 681–684.

[10] B. Chevreau, G. Exner et C. Pearcy, *Sur la réflexivité des contractions de l'espace hilbertien*, ibid. 305 (1987), 117–120.
[11] B. Chevreau and C. Pearcy, *On the structure of contraction operators. I*, J. Funct. Anal. 76 (1988), 1–29.
[12] J. B. Conway, *Subnormal Operators*, Res. Notes in Math. 51, Pitman, 1981.
[13] C. Foiaş and C. Pearcy, *(BCP)-operators and enrichment of invariant subspace lattices*, J. Operator Theory 9 (1983), 187–202.
[14] T. Gamelin, *Uniform Algebras*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
[15] T. Gamelin and J. Garnett, *Pointwise bounded approximation and Dirichlet algebras*, J. Funct. Anal. 8 (1971), 360–404.

ÉQUIPE D'ANALYSE
U.A. No. 754 au C.N.R.S.
UNIVERSITÉ PARIS VI
Tour 46, 4ème étage
4, Pl. Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

Received February 29, 1988
Revised version October 17, 1988 (2412)

STUDIA MATHEMATICA, T. XCV (1989)

A new look on Hankel forms over Fock space

by

SVANTE JANSON (Uppsala), JAAK PEETRE (Stockholm) and
ROBERT WALLSTÉN (Uppsala)

Abstract. By a generalized Hankel form over Fock space $F^{\alpha,2}(C)$ we mean a bilinear form of the type

$$\Gamma_{b,h}(f_1, f_2) = \iint_{C^2} \bar{h}\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\bar{b}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) f_1(z_1) f_2(z_2)\, d\lambda_\alpha(z_1)\, d\lambda_\alpha(z_2).$$

Here $d\lambda_\alpha$ is the Gaussian measure in C with density $(\alpha/\pi)e^{-\alpha|z|^2}$ $(\alpha > 0)$ and an entire function $f = f(z)$ belongs to $F^{\alpha,2}(C)$ iff it is square integrable with respect to it. A trace ideal criterion is proved for such forms which generalizes the corresponding results for ordinary Hankel forms, the case $h \equiv 1$ ([JPR], [W]).

0. Introduction. In [JP] the following new point of view in the theory of Hankel forms (operators) was advocated. Let V be a Hilbert space of analytic functions over a "homogeneous" domain Ω in C^d on which the corresponding symmetry group G acts via unitary operators. Identifying Hilbert–Schmidt forms over V with elements of $V \otimes V$, one has also an action of G on bilinear forms. Defining a Hankel form as a bilinear form Γ such that the value $\Gamma(f, g)$ for $f, g \in V$ depends only on the combination $f \cdot g$, we may identify the space of all Hankel forms as a special irreducible component of $V \otimes V$ under the above action.

Consider, for instance, the weighted Bergman case ($d = 1$, $\Omega = \Delta$ = unit disk in C, $G = \mathrm{SU}(1, 1)/\pm 1$, $V = A^{\alpha,2}(\Delta)$). Then $V \otimes V$ comes as a discrete sum of irreducible G-modules, one of which then consists of Hankel forms, and the elements of the other components are termed Hankel forms of higher weight. This case was studied at length in [JP].

The situation of the Fock space ($d = 1$, $\Omega = C$, $G = \mathscr{H}$ = Heisenberg group, $V = F^{\alpha,2}(C)$ = Fock space), actually a limiting case of the previous and briefly alluded to in [JP], is somewhat special, in the respect that now all

1980 *Mathematics Subject Classification*: 47B35, 47B10.
Key words and phrases: Hankel form, Fock space, Heisenberg group, Hilbert–Schmidt class, trace class.