Comme dans le théorème 4.1, pour chaque n, il existe une suite $\{\lambda_j^{(l,n)}\}_{l\geqslant n}\subset C^m$ telle que $H_{G_n}(\lambda_j^{(l,n)})=l/\alpha_n$ et $\{e^{\langle\lambda_j^{(l,n)},z\rangle}\}_{l\geqslant n}$ est un SRA dans $H(aG_n)$ pour tous $a>0$ et $n\geqslant 1$. Comme dans le théorème 4.1 nous pouvons écrire $\{\lambda_j^{(l,n)}\}_{l\geqslant n}=\{\mu^k\}$ avec $|\mu^k|\to\infty$ quand $k\to\infty$. D'autre part, évidemment $\{e^{\langle\mu^k,z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(aK)$ pour tout $a>0$.

Le théorème est démontré.

Références

[1] L. Bungart, *Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas*, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 317–344.

[2] R. Edwards, *Functional Analysis. Theory and Applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1965.

[3] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, van Nostrand, Princeton 1966.

[4] L. H. Khoi, *Produit tensoriel des systèmes de représentation absolue*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1985, no. 1, 63–65 (en russe).

[5] L. H. Khoi et Yu. F. Korobeinik, *Les systèmes de représentation absolue d'exponentielles dans les domaines polycylindriques*, Mat. Sb. 122 (164)(4)(1983), 458–474 (en russe).

[6] Yu. F. Korobeinik, *Les systèmes de représentation*, Uspekhi Mat. Nauk 36 (1) (1981), 73–126 (en russe).

[7] —, *Sur un problème dual. I. Résultats généraux. Applications aux espaces de Fréchet*, Mat. Sb. 97 (139) (2) (1975), 193–229 (en russe).

[8] —, *Sur un problème dual. II. Applications aux LN*-espaces et autres problèmes*, ibid. 98 (140) (1) (1975), 3–26 (en russe).

[9] —, *Les systèmes de représentation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 42 (2) (1978), 325–355 (en russe).

[10] A. F. Leont'ev, *Les Séries d'Exponentielles*, Nauka, Moscou 1976 (en russe).

[11] —, *Sur la représentation des fonctions analytiques en séries d'exponentielles dans les domaines polycylindriques*, Mat. Sb. 100 (142) (3) (1976), 364–383 (en russe).

[12] V. V. Morzhakov, *Sur les équations de convolution dans les espaces des fonctions holomorphes dans les domaines convexes et sur les compacts convexes de C^n*, Mat. Zametki 16 (3) (1974), 431–440 (en russe).

[13] V. V. Napalkov, *Équations de Convolution dans les Espaces à Plusieurs Dimensions*, Nauka, Moscou 1982 (en russe).

[14] A. Pietsch, *Nuclear Locally Convex Spaces*, Akademie-Verlag, Berlin 1972.

[15] R. Sigurdsson, *Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order*, Doctoral dissertation, Lund 1984.

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
INSTITUT DE PÉDAGOGIE No. 1
Hanoi, Vietnam

Received November 11, 1986
Revised version December 9, 1987
(2241)

STUDIA MATHEMATICA, T. XCIV (1989)

Ensembles suffisants pour quelques espaces de fonctions

par

CHAN-PORN (Hanoi)

Résumé. On étudie les ensembles suffisants dans certains espaces de fonctions. Les résultats obtenus sont appliqués aux espaces des fonctions holomorphes sur les ouverts (ou compacts) convexes de C^l. On établit des relations entre ensembles suffisants et systèmes de représentation absolue d'exponentielles.

Les ensembles suffisants pour les espaces de fonctions entières jouent un rôle important dans la recherche de développements des fonctions holomorphes en somme infinie de fonctions exponentielles. Ces ensembles ont été étudiés par plusieurs auteurs, en particulier par A. V. Abanin [1] et par Yu. F. Korobeinik [2]. Cet article a également pour but d'étudier les ensembles suffisants pour quelques espaces de fonctions, et d'en tirer quelques applications.

Soit $\mathscr{B}$ un ensemble arbitraire et E un espace vectoriel de fonctions complexes sur $\mathscr{B}$. Pour chaque sous-ensemble $S\subset\mathscr{B}$ et chaque fonction positive φ sur $\mathscr{B}$, on pose

$$E^S(\varphi)=\{g\in E\colon\ \|g\|_\varphi^{\infty,S}:=\sup_S|g(x)|/\varphi(x)<\infty\}.$$

Supposons maintenant que $\{\mathscr{B}_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de sous-ensembles de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^\infty\mathscr{B}_n$, et $\Phi=\{f_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de fonctions positives sur $\mathscr{B}$ telle que

$$\sup_{\mathscr{B}_k}f_n(x)<\infty,\qquad \inf_{\mathscr{B}_k}f_n(x)>0$$

pour tout $n,k\geqslant 1$. Nous écrivons

$$\|\cdot\|_n^{\infty,S}=\|\cdot\|_{f_n}^{\infty,S}$$

pour tout $n\geqslant 1$.

Posons

$$(E^S(\Phi),\ \mu^{\infty,S}(\Phi))=\lim\operatorname{ind}(E^S(f_n),\ \|\cdot\|_n^{\infty,S}),$$

où $\mu^{\infty,S}(\Phi)$ désigne la topologie limite inductive.

L'ensemble S est dit *faiblement suffisant* pour Φ si $\mu^{\infty,S}(\Phi) = \mu^{\infty}(\Phi)$, où $\mu^{\infty}(\Phi) = \mu^{\infty,\mathscr{B}}(\Phi)$. Posons

$$K(\Phi) = \{\varphi > 0\colon \sup_{\mathscr{B}} f_n(x)/\varphi(x) < \infty,\ \forall n \geqslant 1\}.$$

Alors pour tout $g \in E^S(f_n)$ et $\varphi \in K(\Phi)$, nous avons

$$\|g\|_{\varphi}^{\infty,S} \leqslant \sup_{S} \frac{|g(x)|}{f_n(x)} \sup_{\mathscr{B}} \frac{f_n(x)}{\varphi(x)} = \sup_{\mathscr{B}} \frac{f_n(x)}{\varphi(x)} \cdot \|g\|_n^{\infty,S}.$$

Ainsi $\mu^{\infty,S}(\Phi) \geqslant \nu^{\infty,S}(\Phi)$, où $\nu^{\infty,S}(\Phi)$ désigne la topologie sur $E^S(\Phi)$ définie par la famille des seminormes $\{\|\cdot\|_{\varphi}^{\infty,S}\colon \varphi \in K(\Phi)\}$. Nous disons que S est *suffisant* si $\nu^{\infty,S}(\Phi) = \nu^{\infty}(\Phi)$, où $\nu^{\infty}(\Phi) = \nu^{\infty,\mathscr{B}}(\Phi)$.

Dans [2], Yu. F. Korobeinik a montré que tout ensemble suffisant est faiblement suffisant. De plus, si $(E(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))$ est un espace de Montel, c'est-à-dire si tout ensemble borné dans $(E(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))$ est relativement compact, alors tout ensemble faiblement suffisant est suffisant.

Dans le § 1 nous cherchons quelques conditions pour que $\mu^{\infty}(\Phi) = \nu^{\infty}(\Phi)$. Dans certains cas, des conditions de ce type ont été données récemment par Napalkov [4] et Korobeinik [2]. De même qu'Abanin le fait pour une suite croissante de fonctions positives sur $\mathscr{B}$, nous montrons dans le § 2 un théorème sur le prolongement des ensembles suffisants pour des suites décroissantes de fonctions positives sur $\mathscr{B}$. Ces résultats sont ensuite appliqués pour obtenir le prolongement des systèmes de représentation absolue d'exponentielles dans des espaces des fonctions holomorphes sur des domaines ouverts convexes et sur des ensembles compacts convexes. Finalement, dans le § 3 nous étudions les ensembles suffisants et les systèmes de représentation absolue d'exponentielles. Analogue à un théorème de Korobeinik [2], le théorème 3.2 donne une condition pour qu'une suite dans un espace dual de Fréchet–Schwartz soit un système de représentation absolue. Ce théorème combiné avec le théorème de Korobeinik et le théorème 3.4 donne le théorème 3.5 sur la relation entre ensembles suffisants et systèmes de représentation absolue dans les espaces des fonctions holomorphes sur des ensembles ouverts convexes et sur des ensembles compacts convexes.

Cet article a été écrit à Hanoi. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Dr. N. V. Khue pour ses conseils, sans lesquels ce travail n'aurait pu être achevé.

§ 1. Les topologies $\mu^{\infty}(\Phi)$ et $\nu^{\infty}(\Phi)$. Dans ce paragraphe nous cherchons des conditions pour que $\mu^{\infty}(\Phi) = \nu^{\infty}(\Phi)$. Ce problème a déjà été étudié par quelques auteurs.

Pour chaque n, posons

$$\mathscr{L}^{\infty}(f_n) = \{g\colon \mathscr{B} \to \boldsymbol{C}\colon \|g\|_n^{\infty} = \sup_{\mathscr{B}} |g(x)|/f_n(x) < \infty\},$$

$$(\mathscr{L}^{\infty}(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi)) = \lim\operatorname{ind}(\mathscr{L}^{\infty}(f_n), \|\cdot\|_n^{\infty}).$$

Considérons l'application canonique

$$(E(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi)) \to (\mathscr{L}^{\infty}(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi)).$$

On suppose que $E(f_n)$ est fermé dans $\mathscr{L}^{\infty}(f_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors l'application de restriction

$$R\colon (\mathscr{L}^{\infty}(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))' \to (E(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))'$$

est surjective.

1.1. THÉORÈME. *Supposons*

(1) $$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathscr{B}\setminus\mathscr{B}_n} f_k(x)/f_{k+1}(x) = 0, \quad \forall k \geqslant 1.$$

Pour que $\mu^{\infty}(\Phi) = \nu^{\infty}(\Phi)$ il faut et il suffit que pour chaque ensemble borné B dans $(E(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))'$ il existe un ensemble borné $\tilde{B}$ dans $(\mathscr{L}^{\infty}(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))'$ tel que $\overline{R(\tilde{B})} \supseteq B$.

Démonstration. Montrons d'abord que la condition ci-dessus est suffisante pour que $\mu^{\infty}(\Phi) = \nu^{\infty}(\Phi)$. Soit U un voisinage de zéro dans $(E(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))$. Alors il existe un ensemble borné B dans $(E(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))'$ tel que $U \supset \Pi(B)$, où $\Pi(B)$ désigne le polaire de B, $\Pi(B) = \{g \in E(\Phi)\colon |\langle F, g\rangle| \leqslant 1,\ \forall F \in B\}$. Posons

$$c_k = \sup\{|\langle \tilde{F}, g\rangle|\colon g \in \mathscr{L}^{\infty}(f_k),\ \|g\|_k^{\infty} \leqslant 1,\ \tilde{F} \in \tilde{B}\},$$

où $\tilde{B}$ est un ensemble borné dans $(\mathscr{L}^{\infty}(\Phi), \mu^{\infty}(\Phi))'$ tel que $\overline{R(\tilde{B})} \supseteq B$. D'après la condition (1) nous pouvons trouver une suite croissante $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ telle que

$$\sup_{\mathscr{B}\setminus\mathscr{B}_{n_k}} f_k(x)/f_{k+1}(x) < 1/(2^{k+1} c_k)$$

pour tout $k \geqslant 1$.

Définissons une fonction positive φ sur $\mathscr{B}$ par

$$\varphi|_{\mathscr{B}_{n_k} - \mathscr{B}_{n_{k-1}}} = f_k/(2^k c_k) \quad \text{pour tout } k \geqslant 1,$$

où $\mathscr{B}_0 = \emptyset$. Donc

$$\sup_{\mathscr{B}_{n_{k+1}}\setminus\mathscr{B}_{n_k}} \frac{f_j(x)}{\varphi(x)} = \sup_{\mathscr{B}_{n_{k+1}}\setminus\mathscr{B}_{n_k}} \frac{2^{k+1} c_{k+1} f_j(x)}{f_{k+1}(x)}$$
$$\leqslant \sup_{\mathscr{B}_{n_{k+1}}\setminus\mathscr{B}_{n_k}} \frac{f_k(x)}{f_{k+1}(x)} 2^{k+1} c_{k+1} \leqslant 1$$

pour tout $k \geqslant j$. Il en résulte que $\varphi \in K(\Phi)$. Posons

$$W = \{g \in E(\Phi)\colon \|g\|_{\varphi}^{\infty} \leqslant 1\}.$$

Nous allons vérifier que $W \subset \Pi(B)$. Par suite U sera un voisinage de zéro dans $(E(\Phi), \nu^{\infty}(\Phi))$.

D'après (1), nous avons $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$, où $g_k = g|_{\mathscr{B}_{n_{k+1}} \setminus \mathscr{B}_{n_k}}$ dans $E(f_{j+1})$ pour tout $g \in E(f_j)$. Ceci implique que

$$\langle \tilde{F}, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \tilde{F}, g_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \tilde{F}_k, g_k \rangle, \quad \forall \tilde{F} \in (\mathscr{L}^\infty(\Phi), \mu^\infty(\Phi)),$$

où $\tilde{F}_k = \tilde{F}|_{\mathscr{L}^\infty(f_k)}$.

Supposons que $\|g\|_\varphi^\infty \leqslant 1$. Alors

$$\sup_{\mathscr{B}_{n_k} \setminus \mathscr{B}_{n_{k-1}}} |g(x)|/f_k(x) \leqslant 1/(2^k c_k)$$

pour tout $k \geqslant 1$. Ainsi

$$|\langle \tilde{F}, g \rangle| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \tilde{F}_k, g_k \rangle| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{1}{2^k c^k} \leqslant 1$$

pour tout $\tilde{F} \in \tilde{B}$ et $g \in W$. Ceci implique que $W \subset \Pi(B)$.

Maintenant, supposons que $\mu^\infty(\Phi) = \nu^\infty(\Phi)$ et soit B un ensemble borné dans $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))'$. Puisque $\Pi(B)$ est un voisinage de zéro dans $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ il existe $\varphi \in K(\Phi)$ tel que $W \subset \Pi(B)$, où $W = \{g \in E(\Phi)\colon \|g\|_\varphi^\infty \leqslant 1\}$. Par suite nous avons $\overline{R(\Pi(W))} \supseteq B$.

Le théorème est démontré.

Remarque. Considérons le cas où $E = H(\boldsymbol{C}^l)$, l'espace des fonctions entières sur $\boldsymbol{C}^l$, $\mathscr{B} \subset \boldsymbol{C}^l$ et $\Phi = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait (1). Alors $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ est un espace de Montel, et $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))'$ est un espace de Fréchet–Montel. Il en résulte que tout ensemble borné dans $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))'$ est image d'un ensemble borné dans $(\mathscr{L}^\infty(\Phi), \mu^\infty(\Phi))'$. D'après le théorème 1.1 nous avons $\mu^\infty(\Phi) = \nu^\infty(\Phi)$. Ainsi tout ensemble faiblement suffisant pour Φ est suffisant pour Φ. Ce résultat a déjà été établi par Napalkov [4].

Soient

$$\mathscr{L}^1(f_n) = \{g\colon \mathscr{B} \to \boldsymbol{C}\colon \|g\|_n^1 := \sum_{\mathscr{B}} |g(x)| f_n(x) < \infty\},$$

$$(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi)) = \lim\operatorname{proj}(\mathscr{L}^1(f_n), \|\cdot\|_n^1).$$

Remarquons que $(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi))' = \mathscr{L}^\infty(\Phi)$.

1.2. Théorème. *Supposons que $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ soit réflexif. Pour que $\mu^\infty(\Phi) = \nu^\infty(\Phi)$ il faut et il suffit que pour chaque ensemble borné B dans $\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$ il existe un ensemble borné $\tilde{B}$ dans $(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi))$ tel que $\overline{\eta(\tilde{B})} \supset B$, où*

$$E(\Phi)_\perp = \{g \in \mathscr{L}^1(\Phi)\colon g|_{E(\Phi)} = 0\}$$

et $\eta\colon \mathscr{L}^1(\Phi) \to \mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$ est l'application canonique.

Nous avons besoin du

1.3. Lemme. *Supposons que $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ soit réflexif. Alors*

$$(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi)) \cong (\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp)'.$$

Démonstration. Évidemment $\mu^\infty(\Phi) \geqslant \beta(\mathscr{L}^\infty(\Phi), \mathscr{L}^1(\Phi))$, la topologie de convergence uniforme sur les bornés de $(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi))$. Puisque $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ est réflexif et $g|_{E(\Phi)} \in (E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))'$ pour tout $g \in \mathscr{L}^1(\Phi)$, $E(\Phi) \cap \Pi(U)$ est $\sigma(\mathscr{L}^\infty(\Phi), \mathscr{L}^1(\Phi))$-fermé pour tout voisinage U de zéro dans $(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi))$. De la B-complétude de $(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi))$ il résulte que $E(\Phi)$ est $\sigma(\mathscr{L}^\infty(\Phi), \mathscr{L}^1(\Phi))$-fermé. Donc

$$E(\Phi) = (\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp)'.$$

Considérons l'espace $G = \lim\operatorname{proj} \mathscr{L}^1(f_n)/E(f_n)_\perp$ et l'application canonique $\gamma\colon \mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp \to G$, qui est d'image dense. Puisque $E(f_k) \subset (\mathscr{L}^1(f_k)/E(f_k)_\perp)'$, $\forall k \geqslant 1$, il en résulte que $G' = E(\Phi)$. Il est clair que l'application identique id: $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi)) \to G'$ est continue. Donc id: $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi)) \to (\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp)'$ est continue.

Soit B un ensemble borné convexe dans $(\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp)'$. Alors pour un certain $n \geqslant 1$ nous avons

$$\sup_{h \in B, \|g\|_n^1 \leqslant 1} \sum_{\mathscr{B}} |g(x)||h(x)| < \infty.$$

Ainsi pour tout $\varphi \in K(\Phi)$

$$\sup_B \|h\|_\varphi^\infty = \sup_{B, \mathscr{B}} \frac{|h(x)|}{\varphi(x)} \leqslant \sup_{B, \mathscr{B}} \frac{|h(x)|}{f_n(x)} \cdot \sup_{\mathscr{B}} \frac{f_n(x)}{\varphi(x)} < \infty.$$

Donc B est borné dans $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ [2] et par suite B est relativement faiblement compact dans $(\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp)'$. Il en résulte que $\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$ est un espace de Fréchet réflexif.

Considérons l'application identique

$$\mathrm{id}\colon (E(\Phi), \mu^\infty(\Phi)) \to (\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp)'.$$

Puisque $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi)) \cong (E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))_\tau''$, où τ désigne la topologie de Mackey, $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ est B-complet [8]. D'autre part, puisque $\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$ est un espace de Fréchet réflexif, $(\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp)'$ est un espace tonnelé [8]. D'après le théorème de l'application ouverte nous avons

$$\mathrm{id}\colon (E(\Phi), \mu^\infty(\Phi)) \cong (\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi))'.$$

Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1.2. Soit U un voisinage de zéro dans $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$. D'après le lemme 1.3, $U \supset \Pi(B)$, où B est un ensemble borné dans $\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$. Prenons un ensemble borné $\tilde{B}$ dans $(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi))$ tel que $\overline{\eta(\tilde{B})} \supseteq B$. Comme dans [2] nous allons en déduire l'existence d'un $\varphi \in K(\Phi)$ tel que

$$W = \{g \in E(\Phi)\colon \|g\|_\varphi^\infty \leqslant 1\} \subset \Pi(B).$$

Posons $d_k = \sup_{\mathscr{B}} \|g\|_k^1$, $\beta_k = \sup\{f_k(x):\ x \in \mathscr{B}_k\}$. Prenons $\varepsilon_k \downarrow 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k d_k \leqslant 1, \qquad \lambda_k = \varepsilon_k \beta_k \to 0.$$

Soit $\varphi(x) = \sup_k\{\lambda_k f_k(x)\}$. On a évidemment $\varphi \in K(\Phi)$ et $\sup_{\mathscr{B}} \|g\|_\varphi^1 \leqslant 1$, d'où $W \subset \Pi(B)$. Donc $\mu^\infty(\Phi) = \nu^\infty(\Phi)$.

Inversement, supposons $\mu^\infty(\Phi) = \nu^\infty(\Phi)$, et soit B un ensemble borné dans $\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$. D'après le lemme 1.3, $\Pi(B)$ est un voisinage de zéro dans $(E(\Phi), \nu^\infty(\Phi))$. Donc il existe $\varphi \in K(\Phi)$ tel que $W = \{g \in E(\Phi):\ \|g\|_\varphi^\infty \leqslant 1\} \subset \Pi(B)$. Ceci implique que $\overline{\eta(\Pi(W))} \supset B$.

Le théorème est démontré.

Remarque. Considérons le cas où $(E(\Phi), \mu^\infty(\Phi))$ est un espace de Montel. Par le lemme 1.3, $\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$ est un espace de Fréchet–Montel. Donc tout ensemble borné dans $\mathscr{L}^1(\Phi)/E(\Phi)_\perp$ est image d'un ensemble borné dans $(\mathscr{L}^1(\Phi), \nu^1(\Phi))$. D'après le théorème 1.2, $\mu^\infty(\Phi) = \nu^\infty(\Phi)$. Ce résultat a déjà été établi par Korobeinik [2].

§ 2. Prolongement des ensembles suffisants et faiblement suffisants. Soient $\Phi_1 = \{f_n^1\}_{n=1}^\infty$ et $\Phi_2 = \{f_n^2\}_{n=1}^\infty$ deux suites croissantes de fonctions positives sur $\mathscr{B}$. Nous écrivons $\Phi_1 \overset{\mathrm{FS}}{\Rightarrow} \Phi_2$ si tout ensemble suffisant pour $(E(\Phi_1), \mu^\infty(\Phi_1))$ est faiblement suffisant pour $(E(\Phi_2), \mu^\infty(\Phi_2))$.

Posons

$$\mathscr{M}(\Phi_1, \Phi_2) = \{g \in E:\ gf \in E(\Phi_1),\ \forall f \in E(\Phi_2)\}.$$

Nous disons que Φ_1 et Φ_2 satisfont la *condition de prolongement inductif* si

(2) $\quad \forall n \geqslant 1,\ \forall \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathscr{B},\ \exists k \geqslant 1,\ \exists \{g_m\}_{m=1}^\infty \subset \mathscr{M}(\Phi_1, \Phi_2)$:

$$\liminf_m \left[\sup_{\mathscr{B}} |g_m(x)| \frac{f_n^2(x)}{f_k^1(x)}\right]\left[g_m(x_m) \frac{f_m^2(x_m)}{f_n^1(x_m)}\right]^{-1} < \infty.$$

Le théorème suivant est démontré par A. V. Abanin [1].

2.1. Théorème. *Soient Φ_1 et Φ_2 comme plus haut. Alors $\Phi_1 \overset{\mathrm{FS}}{\Rightarrow} \Phi_2$.*

Considérons maintenant deux suites décroissantes de fonctions positives sur $\mathscr{B}$, $\Phi_1 = \{f_n^1\}_{n=1}^\infty$ et $\Phi_2 = \{f_n^2\}_{n=1}^\infty$. Pour chaque $S \subset \mathscr{B}$, nous avons

$$(E^S(\Phi_i), \nu^{\infty,S}(\Phi_i)) = \lim \operatorname{proj}(E^S(f_n^i), \|\cdot\|_{n,i}^{\infty,S}),$$

où

$$\|g\|_{n,i}^{\infty,S} = \sup_S |g(x)|/f_n^i(x), \qquad i = 1, 2.$$

Nous écrivons $\Phi_1 \overset{\mathrm{S}}{\Rightarrow} \Phi_2$ si tout ensemble suffisant pour $E(\Phi_1)$ est suffisant pour $E(\Phi_2)$.

Comme plus haut nous disons que Φ_1, Φ_2 satisfont la *condition de prolongement projectif* si

(3) $\quad \forall m \geqslant 1,\ \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{B},\ \exists k \geqslant 1,\ \exists \{g_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{M}(\Phi_1, \Phi_2)$:

$$\liminf_n \left[\sup_{\mathscr{B}} |g_n(x)| \frac{f_n^2(x)}{f_k^1(x)}\right]\left[|g_n(x_n)| \frac{f_m^2(x_n)}{f_n^1(x_n)}\right]^{-1} < \infty.$$

2.2. Théorème. *Soient Φ_1 et Φ_2 comme plus haut. Alors $\Phi_1 \overset{\mathrm{S}}{\Rightarrow} \Phi_2$.*

Démonstration. D'abord, nous observons que S est suffisant pour Φ si et seulement si

(4) $\quad \forall m \geqslant 1,\ \exists n \geqslant 1,\ \exists 0 < c_m < \infty:\quad \|g\|_m^\infty \leqslant c_m \|g\|_n^{\infty,S}$

pour tout $g \in E(\Phi)$.

Maintenant supposons que $S \subset \mathscr{B}$ est suffisant pour Φ_1, mais n'est pas suffisant pour Φ_2. D'après (4), il existe $m \geqslant 1$ tel que

$$\forall n \geqslant 1,\ \exists g_n \in E(\Phi_2):\quad \|g_n\|_{n,2}^{\infty,S} < \varepsilon_n, \quad \|g_n\|_{m,2}^\infty \geqslant 1,$$

où $\varepsilon_n \downarrow 0$. Ainsi $|g_n(x)| \leqslant \varepsilon_n f_n^2(x)$, $\forall x \in S$, et $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{B}$ tel que $|g_n(x_n)| \geqslant f_m^2(x_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. D'après (3) nous trouvons une suite $\{h_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{M}(\Phi_1, \Phi_2)$ et k tels que

$$\liminf_n \left[\sup_{\mathscr{B}} |h_n(x)| \frac{f_n^2(x)}{f_k^1(x)}\right]\left[|h_n(x_n)| \frac{f_m^2(x_n)}{f_n^1(x_n)}\right]^{-1} < \infty.$$

Considérons les fonctions $h_n g_n \in E(\Phi_1)$. Nous avons

$$\|h_n g_n\|_{k,1}^{\infty,S} = \sup_S \frac{|h_n(x)\, g_n(x)|}{f_k^1(x)} \leqslant \varepsilon_n \sup_S |h_n(x)| \frac{f_n^2(x)}{f_k^1(x)} \leqslant \varepsilon_n \sup_{\mathscr{B}} |h_n(x)| \frac{f_n^2(x)}{f_k^1(x)}$$

pour tout $n \geqslant 1$, et

$$\|h_n g_n\|_{n,1}^\infty = \sup_{\mathscr{B}} \frac{|h_n(x)||g_n(x)|}{f_n^1(x)} \geqslant \frac{|h_n(x_n)||g_n(x_n)|}{f_n^1(x_n)} \geqslant \frac{|h_n(x_n)| f_m^2(x_n)|}{f_n^1(x_n)}$$

pour tout $n \geqslant 1$. Ceci implique que

$$\liminf_n \|h_n g_n\|_{k,1}^{\infty,S} / \|h_n g_n\|_{n,1}^\infty \leqslant \liminf_n \varepsilon_n \sup_{\mathscr{B}} \left[|h_n(x)| \frac{f_n^2(x)}{f_k^1(x)}\right]\left[|h_n(x_n)| \frac{f_m^2(x_n)}{f_n^1(x_n)}\right]^{-1} = 0,$$

qui est impossible, parce que S est suffisant pour Φ_1.

Le théorème est démontré.

2.3. *Quelques exemples.* 1) Soient G_2 un domaine convexe dans C^l et $\{D_n\}$ une suite croissante de domaines convexes bornés tels que $D_n \Subset D_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ et $G_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

Posons $\Phi_2 = \{f_n^2\}_{n=1}^{\infty}$, où $f_n^2(z) = \exp h_n(z)$ et $h_n(z) = h_{D_n}(z)$ désigne la fonction de support de D_n. On sait que $H(G_2)' \cong (E(\Phi_2), \mu^{\infty}(\Phi_2))$ [8], où $H(G)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes sur G muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts. Supposons que K est un ensemble compact convexe dans C^l et notons $G_1 = G_2 + K$. Alors $H(G_1)' \cong (E(\Phi_1), \mu^{\infty}(\Phi_1))$, où $\Phi_1 = \{f_n^1\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n^1(z) = \exp[h_n(z) + h_K(z)]$ pour $n \geq 1$, et où $h_K(z)$ désigne la fonction de support de K. Dans [1] A. V. Abanin a démontré que Φ_1, Φ_2 satisfont la condition de prolongement inductif (2). Donc $\Phi_1 \overset{\mathrm{FS}}{\Rightarrow} \Phi_2$.

2) Soit K_2 un ensemble compact convexe dans C^l et $\{D_n\}$ une suite décroissante de domaines convexes bornés dans C^l telle que $K_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Alors $H(K_2)' \cong (E(\Phi_2), \nu^{\infty}(\Phi_2))$, où $\Phi_2 = \{f_n^2\}$, $f_n^2(z) = \exp h_n(z)$, $h_n(z) = h_{D_n}(z)$, $n \geq 1$.

Supposons maintenant que $K_1 = K_2 + K$, $\Phi_1 = \{f_n^1\}$, $f_n^1(z) = \exp[h_n(z) + h_n(z)]$. Alors $H(K_1)' \cong (E(\Phi_1), \nu^{\infty}(\Phi_1))$, où $H(K)$ désigne l'espace des germes de fonctions holomorphes sur K muni de la topologie inductive.

Montrons que Φ_1 et Φ_2 satisfont la condition de prolongement projectif (3). Soient $m \geq 1$ et $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^l$ une suite arbitraire. Pour chaque n, prenons $\xi_n \in K$ tel que $|\exp\langle z_n, \xi_n\rangle| = \exp h_K(z_n)$. Observons que

$$|\exp\langle z, \xi_n\rangle| \leq \exp h_K(z), \quad \forall z \in C^l.$$

Considérons la fonction

$$g_n(z) = \exp\langle z, \xi_n\rangle \in H(C^l).$$

Pour tous $p \geq 1$ et $f \in E(\Phi_2)$, il existe $c_p > 0$ tel que

$$|g_n(z)|\,|f(z)| = |\exp\langle z, \xi_n\rangle|\,|f(z)| \leq c_p \exp[h_p(z) + h_K(z)]$$
$$= c_p \exp h_{K+D_p}(z), \quad \forall z \in C^l.$$

Donc $g_n f \in E(\Phi_1)$ pour tout $f \in E(\Phi_2)$, et par suite $g_n \in \mathcal{M}(\Phi_1, \Phi_2)$ pour tout $n \geq 1$.

Maintenant nous avons

$$V_n := \sup_{C^l} |g_n(z)| \frac{f_n^2(z)}{f_k^1(z)} = \sup_{C^l} |\exp\langle z, \xi_n\rangle| \frac{\exp h_n(z)}{\exp[h_k(z) + h_K(z)]}$$
$$\leq \sup_{C^l} |\exp\langle z, \xi_n\rangle| \exp(-h_K(z)) \leq 1$$

pour tout $n \geq k$, et

$$W_n := |g_n(z_n)| \exp h_m(z_n) / \exp[h_n(z_n) + h_K(z_n)]$$
$$= |\exp\langle z_n, \xi_n\rangle| \exp(-h_K(z_n)) \exp[h_m(z_n) - h_n(z_n)]$$
$$= \exp[h_m(z_n) - h_n(z_n)]$$

pour tout $n \geq 1$. Ainsi

$$\liminf_n V_n W_n^{-1} \leq \liminf_n \exp[h_n(z_n) - h_m(z_n)] = 0$$

et la condition de prolongement projectif (3) est vérifiée. D'après le théorème 2.2 nous avons $\Phi_1 \overset{\mathrm{S}}{\Rightarrow} \Phi_2$.

§ 3. Ensembles suffisants et systèmes de représentation absolue d'exponentielles. Dans ce paragraphe nous cherchons la relation entre ensembles suffisants et systèmes de représentation absolue d'exponentielles.

Soient G (resp. K) un domaine convexe (resp. un ensemble compact convexe) dans C^l et $\{D_n\}$ une suite croissante (resp. décroissante) de domaines convexes bornés tels que

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \quad (\text{resp. } K = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n).$$

Comme dans le § 2, posons

$$\Phi = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad f_n(z) = \exp h_n(z), \quad \forall z \in C^l,$$

où $h_n(z) = h_{D_n}(z)$ est la fonction de support de D_n, $n \geq 1$. Nous disons que $S \subset C^l$ est *suffisant pour* $H(G)$ (resp. *pour* $H(K)$) si S est suffisant pour $E(\Phi)$, où E désigne l'espace des fonctions entières sur C^l. Évidemment la suffisance de S pour $H(G)$ (resp. pour $H(K)$) est indépendante du choix de Φ.

Nous rappelons qu'un système $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ dans un espace localement convexe E est dit un *système de représentation absolue* dans E si tout élément $x \in E$ peut être écrit sous la forme

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \tag{5}$$

où la série (5) est absolument convergente. Le théorème suivant est dû à Korobeinik.

3.1. THÉORÈME [2]. *Soit $\{u_k\}$ une suite dans un espace de Fréchet E, la topologie de E étant définie par une suite croissante de seminormes $\{\|\cdot\|_n\}$. Alors $\{u_k\}$ est un système de représentation absolue dans E si et seulement si $\forall n \geq 1$, $\exists m \geq 1$, $\exists c_n > 0$:*

$$\sup_{\|x\|_n \leq 1} |\langle f, x\rangle| \leq c_n \sup_k |\langle f, u_k/\|u_k\|_m\rangle|, \quad \forall f \in E'.$$

Pour des espaces duaux de Fréchet–Schwartz $F = \lim\operatorname{ind} B_n$, où les B_n sont des espaces de Banach et où les applications $B_n \to B_{n+1}$ sont compactes, nous avons:

3.2. THÉORÈME. *Soient F un espace dual de Fréchet–Schwartz et $\{u_k\} \subset F$. Alors $\{u_k\}$ est un système de représentation absolue dans F si et seulement si $\forall n \geqslant 1$, $\exists m \geqslant 1$, $\exists c_n > 0$:*

$$\sup_{\|x\|_n \leqslant 1} |\langle f, x\rangle| \leqslant c_n \sup_k |\langle f, u_k/\|u_k\|_m\rangle|, \qquad \forall f \in F'.$$

Nous avons besoin du

3.3. LEMME. *Soient $E = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ et $F = \lim\operatorname{ind} D_n$ des limites régulières d'espaces de Banach, où $D_n \subsetneq D_{n+1}$ est compacte pour tout $n \geqslant 1$. Soit R: $E \to F$ une application linéaire continue telle que $\operatorname{Im} R' \cong F'$. Alors R est ouverte.*

Démonstration. (a) Soit B un ensemble borné dans F. Puisque $F' \cong \operatorname{Im} R'$ nous trouvons un ensemble $\tilde{B}$ borné, $\sigma(E'', E')$-fermé et absolument convexe dans E'' tel que $\Pi(B) \supset \Pi(\tilde{B}) \cap \operatorname{Im} R'$. D'après la $\sigma(E'', E')$-compacité de $\tilde{B}$ et la continuité de R'': $E'' \to F$ pour les topologies $\sigma(E'', E')$ et $\sigma(F, F')$, il en résulte que $R''(\tilde{B})$ est fermé dans F. Supposons qu'il existe $x \in B \setminus R''(\tilde{B})$. Prenons $g \in F'$ avec $|g|_{R''(B)}| \leqslant 1$ et $g(x) > 1$. Alors $R'g \in (\Pi(\tilde{B}) \cap \operatorname{Im} R') \setminus \Pi(B)$. C'est impossible par le choix de $\tilde{B}$.

(b) Posons $E_n = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j$, $R_n = R|_{E_n}$. Considérons l'espace $G = \lim\operatorname{ind} E_n/\operatorname{Ker} R_n$ et l'application $\tilde{R}$ de G dans F induite par R. Soient $T = \tilde{R}^{-1}$: $\operatorname{Im} R \to G$ et B un ensemble borné dans $\operatorname{Im} R$. D'après (a) nous trouvons un ensemble borné $\tilde{B}$ dans E'' tel que $\overline{R''(\tilde{B})} \supset B$. Prenons $n_0 \geqslant 1$ tel que $\tilde{B}$ soit contenu et borné dans E''_{n_0}. Puisque $T(B) \subset \tilde{B} \cap E_{n_0} + \operatorname{Ker} R_{n_0}$ il en résulte que $T(B)$ est borné dans G.

(c) Supposons que $\{g_k\} \subset \operatorname{Im} R$ et $g_k \to 0$. Prenons n_0 tel que $\{g_k\} \subset D_{n_0}$ et $g_k \to 0$ dans D_{n_0}. Soit $\lambda_k \uparrow \infty$ tel que $\lambda_k g_k \to 0$ dans D_{n_0}. Alors $\{T(\lambda_k g_k)\} = \{\lambda_k T g_k\}$ est borné dans G et donc $T(g_k) \to 0$. Par conséquent T est séquentiellement continue.

(d) Soit $\{g_k\}$ une suite de Cauchy dans G. Il existe n_0 tel que $\{\tilde{R} g_k\}$ est une suite de Cauchy dans D_{n_0}. Prenons $\lambda_{k_j} \uparrow \infty$ tel que $\lambda_{k_j}(g_k - g_j) \to 0$ dans D_{n_0}. Ainsi $\{\lambda_{k_j}(g_k - g_j) = T\tilde{R}(\lambda_{k_j}(g_k - g_j))\}$ est contenu et borné dans $E_{m_0}/\operatorname{Ker} R_{m_0}$ pour un certain $m_0 \geqslant n_0$, d'après (b). Ceci implique que

$$g_k - g_j = \lambda_{k_j}(g_k - g_j)/\lambda_{k_j} \to 0$$

dans $E_{m_0}/\operatorname{Ker} R_{m_0}$. Alors $g_k \to g$ dans $E_{m_0}/\operatorname{Ker} R_{m_0}$ et G est séquentiellement complet.

(e) Puisque $\operatorname{span}\{u_k\} \cap D_n$ est dense dans D_n pour tout n, il en résulte que T peut être prolongée en une application linéaire séquentiellement continue $\hat{T}$: $F \to G$. Donc R est ouverte.

Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 3.2. Pour chaque n posons

$$A_n = \{(c_k) \subset \boldsymbol{C}\colon \|(c_k)\|_n = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,\|u_k\|_n < \infty\}.$$

Considérons l'espace $E = \bigoplus A_n$ et l'application linéaire continue R: $E \to F$ donnée par $R(\{c_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ pour $\{c_k\} \in A_n$. D'après l'hypothèse $F' \cong \operatorname{Im} R'$ et la lemme 3.3, R est surjective, ce qui montre que $\{u_k\}$ est un système de représentation absolue dans F.

Le théorème est démontré.

3.4. THÉORÈME. *Soit G (resp. K) un domaine convexe (resp. un ensemble compact convexe) dans $\boldsymbol{C}^l$. Alors $S \subset \boldsymbol{C}^l$ est suffisant pour $H(G)$ (resp. $H(K)$) si et seulement s'il existe une suite $\{\lambda^k\} \subset S$ telle que $\{e^{\langle\lambda^k, z\rangle}\}$ soit un système de représentation absolue dans $H(G)$ (resp. $H(K)$), où $\langle\lambda^k, z\rangle = \lambda_1^k z_1 + \ldots + \lambda_l^k z_l$.*

Démonstration. Soit $\{\lambda^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ une suite dense dans S. D'après l'hypothèse, $\forall n \geqslant 1$, $\exists m \geqslant 1$, $\exists c_n > 0$:

$$\sup_{C^l} \frac{|g(z)|}{\exp h_m(z)} \leqslant c_n \sup_S \frac{|g(z)|}{\exp h_n(z)} = c_n \sup_k \frac{|g(\lambda^k)|}{\exp h_n(\lambda^k)}, \qquad \forall g \in H(G)',$$

$$\left(\text{resp. } \sup_{C^l} \frac{|g(z)|}{\exp h_n(z)} \leqslant c_n \sup_S \frac{|g(z)|}{\exp h_m(z)} = c_n \sup_k \frac{|g(\lambda^k)|}{\exp h_m(\lambda^k)}, \quad \forall g \in H(K)'\right).$$

Donc d'après les théorèmes 3.1 et 3.2 nous déduisons que $\{e^{\langle\lambda^k, z\rangle}\}$ est un système de représentation absolue dans $H(G)$ (resp. $H(K)$).

Le théorème est démontré.

3.5. THÉORÈME. *Soient G un domaine convexe (resp. un ensemble compact convexe K) dans $\boldsymbol{C}^l$ et $S \subset \boldsymbol{C}^l$. Alors S est suffisant pour $H(G)$ (resp. pour $H(K)$) si et seulement si tout $f \in H(G)$ (resp. $f \in H(K)$) peut être écrit sous la forme*

$$f(z) = \int_S e^{\langle\lambda, z\rangle} \frac{d\mu(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$$

dans $H(G)$ (resp. dans $H(K)$), où $\varphi \in K(\Phi)$ et μ est une mesure bornée sur S.

Démonstration. (i) D'abord considérons le cas où G est un domaine convexe dans $\boldsymbol{C}^l$. Ce cas, pour des ensembles fermés S, est déjà démontré par Napalkov [4]. D'après le théorème 3.1 il existe une suite $\{\lambda^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ telle que $\{e^{\langle\lambda^k, z\rangle}\}_{k=1}^{\infty}$ est un système de représentation absolue dans $H(G)$. Donc tout $f \in H(G)$ peut être écrit sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\langle\lambda^k, z\rangle}, \qquad \forall z \in G,$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp h_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,\|e^{\langle\lambda^k, z\rangle}\|_n < \infty$$

pour tout $n \geqslant 1$.

Pour chaque $j \geq 1$ prenons n_j tel que

$$\sum_{|\lambda^k| > n_j} |c_k| \exp h_{j+1}(\lambda^k) < 1/2^j.$$

Posons

$$\varphi(\lambda) = \exp h_j(\lambda) \quad \text{pour } n_{j-1} \leq |\lambda| < n_j,$$
$$\mu(A) = \sum_{\lambda^k \in A} c_k \varphi(\lambda^k).$$

Alors pour $j \geq k$, nous avons

$$\sup_{n_{j-1} \leq |\lambda| < n_j} \frac{\exp h_k(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \sup_{n_{j-1} \leq |\lambda| < n_j} \frac{\exp h_k(\lambda)}{\exp h_j(\lambda)} \leq 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(\lambda^k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| |\varphi(\lambda^k)| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n_{j-1} \leq |\lambda^k| < n_j} |c_k| \exp h_j(\lambda^k)$$
$$= \sum_{|\lambda^k| \leq n_1} |c_k| \exp h_1(\lambda^k) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots < \infty.$$

Ainsi $\varphi \in K(\Phi)$ et μ est bornée sur S. Nous avons

$$\int_S e^{\langle \lambda, z \rangle} \frac{d\mu(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\langle \lambda^k, z \rangle} \frac{\mu(\lambda^k)}{\varphi(\lambda^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle} = f(z), \quad \forall z \in G.$$

Supposons maintenant que toute $f \in H(G)$ peut être représentée sous la forme (6). Posons

$\mathscr{L}^S_{1,n} = \{\mu$: μ est une mesure sur S telle que

$$\|\mu\|_n^S = \int_S \exp h_n(z)\, dv(\mu, z) < \infty\},$$

où $v(\mu, z)$ désigne la mesure variation totale de μ. D'après l'hypothèse, l'application

$$R\colon \mathscr{L}^S_1(\Phi) = \operatorname{lim\,proj}(\mathscr{L}^S_{1,n}, \|\cdot\|_n^S) \to H(G)$$

donnée par

$$(R\mu)(z) = \int_S e^{\langle \lambda, z \rangle} d\mu(\lambda), \quad \forall z \in G,$$

est surjective. D'après le théorème de l'application ouverte, R est ouverte. Ainsi $\forall n \geq 1$, $\exists c_n > 0$, $\exists m \geq n$:

$$c_n R(\{\mu\colon \|\mu\|_n^S \leq 1\}) \supset \{g\colon \|g\|_m \leq 1\}.$$

Ceci implique que pour chaque $F \in H(G)'$, nous avons

$$\sup_{\|g\|_m \leq 1} |\langle F, g \rangle| \leq c_n \sup_{\|\mu\|_m^S \leq 1} |\langle R'F, \mu \rangle|$$
$$\leq c_n \sup_{\|\mu\|_m^S \leq 1} \int_S \frac{|F(\lambda)|}{\exp h_m(\lambda)} \exp h_m(\lambda)\, dv(\mu, \lambda) \leq c_n \|F\|_m^S.$$

Donc S est suffisant pour $H(G)$.

(ii) Supposons maintenant que K est un ensemble compact convexe et que S est suffisant pour $H(K)$. Par le théorème 3.2 il existe une suite $\{\lambda^k\} \subset S$ telle que $\{e^{\langle \lambda^k, z \rangle}\}_{k=1}^{\infty}$ soit un système de représentation absolue dans $H(K)$. Ainsi pour tout $f \in H(K)$ il existe $\{c_k\}$ telle que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$$

pour z dans un certain voisinage D_{n_0} de K et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \exp h_j(\lambda^k) < \infty, \quad \forall j \geq n_0.$$

Définissons une fonction positive φ sur C^l et une mesure μ sur C^l par

$$\varphi(z) = \exp h_{j+n_0}(z) \quad \text{pour } j-1 \leq |z| < j,$$
$$\mu(A) = \sum_{\lambda^k \in A} c_k \exp h_{k+n_0}(\lambda^k).$$

Alors μ est une mesure complexe bornée sur C^l,

$$\sup_{C^l} \varphi(z)/f_n(z) < \infty, \quad \forall n \geq 1,$$

$$\int_S e^{\langle \lambda, z \rangle} \frac{d\mu(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\langle \lambda^k, z \rangle} \frac{\mu(\lambda^k)}{\varphi(\lambda^k)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle} = f(z), \quad \forall z \in D_{n_0}.$$

Inversement, supposons que tout élément appartenant à $H(K)$ peut s'écrire sous la forme (6). Posons

$\mathscr{L}^S_{1,n} = \{\mu$: μ est une mesure complexe S telle que

$$\|\mu\|_n^S = \int_S \exp h_n(z)\, dv(\mu, z) < \infty\},$$

où $v(\mu, z)$ désigne la variation totale de μ. Considérons l'espace $E = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathscr{L}^S_{1,n}$ et l'application linéaire continue $R\colon E \to H(K)$ donnée par

$$(R\mu)(z) = \int_S e^{\langle \lambda, z \rangle} d\mu(\lambda) \quad \text{pour } \mu \in \mathscr{L}^S_{1,n}.$$

D'après l'hypothèse R est surjective. Par le théorème de l'application ouverte de Grothendieck R est ouverte.

Montrons que $R'\colon H(K)' \cong \operatorname{Im} R'$. Il suffit de montrer que $\operatorname{Im} R'$ est fermé dans E', parce que $H(K)'$ et E' sont des espaces de Fréchet. Supposons que $R'g_k \to g$ dans E'. Posons $B = \{R'g_k, g\}$. Alors le polaire $\Pi(B)$ est un voisinage de zéro dans E. Puisque R est ouverte, $R(\Pi(B))$ est un voisinage de zéro dans $H(K)$. En combinant ceci avec les relations

$$\sup_{f \in \Pi(B)} |\langle f, g \rangle| \leq \sup_{f \in \Pi(B)} |\langle Rf, g_k \rangle| \leq 1,$$

il en résulte que $g \in \operatorname{Im} R'$. Donc $\operatorname{Im} R'$ est fermé dans E' et $H(K)' \cong \operatorname{Im} R'$.

Ceci implique que $\forall n \geqslant 1$, $\exists m \geqslant 1$, $\exists c_n > 0$:

$$\sup_{\mathbf{C}^l} \frac{|g(z)|}{\exp h_n(z)} \leqslant c_n \sup_{\|\mu\|_m^S \leqslant 1} |\langle g, R'\mu\rangle| = c_n \sup_{\|\mu\|_n^S \leqslant 1} \Big|\int_S g(\lambda)\, d\mu(\lambda)\Big|$$

$$\leqslant c_n \sup_S \frac{|g(\lambda)|}{\exp h_m(\lambda)},$$

donc S est suffisant.

Le théorème est démontré.

Références

[1] A. V. Abanin, *Propriétés des ensembles faiblement suffisants. Applications aux systèmes de représentation absolue d'exponentielles dans les domaines à plusieurs dimensions*, Université de Rostov, Rostov-Na-Donou 1984 (en russe).

[2] Yu. F. Korobeinik, *Topologies inductives et projectives. Ensembles suffisants et systèmes de représentation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 50 (3) (1986), 539–565 (en russe).

[3] —, *Systèmes de représentation*, Uspekhi Mat. Nauk 36 (1) (1981), 73–126 (en russe).

[4] V. V. Napalkov, *Sur la comparaison des topologies dans certains espaces de fonctions entières*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 264 (4) (1982), 827–830 (en russe).

[5] —, *Sur les ensembles suffisants discrets dans certains espaces de fonctions entières*, ibid. 250 (4) (1980), 809–812 (en russe).

[6] —, *Sur les ensembles faiblement suffisants discrets dans certains espaces de fonctions entières*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 45 (5) (1981), 1088–1099 (en russe).

[7] —, *Équations de Convolution dans les Espaces à Plusieurs Dimensions*, Nauka, Moscou 1982 (en russe).

[8] V. V. Napalkov et A. B. Sekerin, *Ensembles faiblement suffisants et représentation des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes en série de Dirichlet*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 260 (3) (1981), 535–539 (en russe).

[9] H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Macmillan, New York 1966.

[10] D. M. Schneider, *Sufficient sets for some spaces of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 197 (1974), 161–180.

[11] B. A. Taylor, *A seminorm topology for some (DF)-spaces of entire functions*, Duke Math. J. 38 (2) (1971), 379–385.

[12] —, *Discrete sufficient sets for some spaces of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972), 207–214.

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
INSTITUT DE PÉDAGOGIE No. 1
Hanoi, Vietnam

Received January 19, 1987
Revised version July 18, 1988 (2271)

STUDIA MATHEMATICA, T. XCIV (1989)

Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr

by

SEÁN DINEEN and RICHARD M. TIMONEY (Dublin)

Abstract. For E a locally convex Montel space with basis, we show that if the monomials form an absolute basis for the space of holomorphic functions on E, then E must be nuclear. Using related methods, we give an affirmative result for a special case of Grothendieck's conjecture on tensor products and nuclearity. We also relate our methods to a polydisc version of a theorem of Bohr on power series of bounded functions.

In [2] Boland and Dineen proved that the monomials on a fully nuclear space with basis form an absolute basis for the space of holomorphic functions (with the compact-open topology). We present here a result in the converse direction (solving a question posed by Meise and Vogt [14, p. 39]).

Using similar methods, we also obtain results on a conjecture of Grothendieck [5] concerning tensor products and on a generalisation of a theorem of H. Bohr [1] from one to several variables.

By monomials we mean finite products of coordinate evaluations (coordinates with respect to a specified basis). The class of fully nuclear spaces which was considered in [2] includes all Fréchet nuclear spaces and all DFN-spaces. Our converse (Theorem 1.7) is stated for Montel spaces (with basis).

The main problem, which we refer to as the *basis problem*, leads naturally to a particular case of a conjecture of Grothendieck [5] concerning equality of the projective (π) and injective (ε) tensor products on locally convex spaces. Grothendieck's conjecture is known to be true for many classes of Banach spaces (see [15] for details) and for certain locally convex spaces [8], but Pisier [16, 15] has given a Banach space counterexample to the conjecture. The basis problem leads to a case where Grothendieck's conjecture is true (we give an elementary proof which works for some of the earlier results), but which is not covered by the results in [8, 15, 16].

Our proofs ultimately depend on a classical matrix inequality (Proposition 1.6). In the course of the reduction of the basis problem to enable us to apply this result, it became clear that a suitable generalisation of an equality of H. Bohr [1] from discs to polydiscs of large dimension would solve the basis problem. In the end, we found that such a generalisation is possible, but via a generalisation of Proposition 1.6 due to Mantero and Tonge [13].