Contents of volume XCIV, number 3

STUDIA MATHEMATICA

Managing Editors: **Z. Ciesielski, W. Orlicz** (*Editor-in-Chief*), **A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal publishes original papers in English, French, German and Russian, mainly in functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and probability theory. Usually 3 issues constitute a volume.

Manuscripts and correspondence concerning editoral work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA

Krakowskie Przedmieście, 7, 00-068 Warszawa, Poland

ISBN 83-01-09253-X ISSN 0039-3223

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Les systèmes de représentation absolue dans les espaces des fonctions holomorphes

par

CHAN-PORN (Hanoi)

Résumé. Le but de cet article est l'étude des systèmes de représentation absolue, en particulier des systèmes de représentation absolue d'exponentielles dans les espaces des fonctions holomorphes sur les domaines convexes de C^m. La stabilité des systèmes de représentation absolue par passage au produit et par passage à la limite, ainsi que l'existence des systèmes de représentation absolue d'exponentielles sont démontrées.

Introduction. A. F. Leont'ev (voir [10]) a montré en 1960 environ que pour un domaine convexe plan borné G arbitraire, on peut trouver une suite $\{\lambda_k\}$ de nombres complexes telle que toute fonction holomorphe $f(z)$ dans G puisse être développée en série de Dirichlet

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\lambda_k z}$$

qui converge uniformément et absolument dans G.

La suite $\{\lambda_k\}$ construite par Leont'ev dépend de G et les éléments λ_k sont des zéros d'une fonction entière de type d'exponentielle complètement régulière.

Plus tard, environ en 1970 Yu. F. Korobeinik, en appliquant la théorie des espaces duals aux espaces vectoriels topologiques, a aussi donné une méthode générale pour construire une suite $\{\lambda_k\}$ permettant de développer f [9]. Dans cette méthode la suite $\{\lambda_k\}$, en général, n'est pas la suite des zéros d'une fonction entière de type d'exponentielle complètement régulière, mais cette suite convient pour chaque domaine aG avec $a > 0$.

Les recherches de Leont'ev et Korobeinik ont naturellement conduit aux notions de système de représentation et système de représentation absolue (en abrégé SRA). Ces notions ont été introduites et étudiées par Korobeinik dans [7] et [8].

Une suite $\{u_k\}$ d'un espace localement convexe H est appelée un *système de représentation* (respectivement un *système de représentation absolue*) si chaque élément $x \in H$ peut être représenté sous la forme d'une série

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

convergente (respectivement absolument convergente) dans H.

Les propriétés des systèmes de représentation, en particulier des systèmes de représentation absolue dans les espaces des fonctions holomorphes dans les domaines convexes plans ont été étudiées par plusieurs auteurs.

Dans les années plus récentes on s'est efforcé de considérer ces problèmes dans les espaces des fonctions holomorphes de plusieurs variables. Mais les résultats obtenus se limitent aux seuls domaines produits.

Dans cet article, nous étudions les systèmes de représentation absolue dans une classe d'espaces localement convexes, en particulier les systèmes de représentation absolue d'exponentielles dans les espaces des fonctions holomorphes sur les domaines convexes de plusieurs variables. Une partie de nos résultats répondent à des problèmes posés par Yu. F. Korobeinik.

Dans le § 1 nous montrons la stabilité des systèmes de représentation absolue par passage au produit tensoriel projectif d'une classe d'espaces localement convexes. En appliquant ces résultats généraux, nous montrons que si $\{u_k\}$ et $\{v_l\}$ sont des systèmes de représentation absolue dans les espaces $H(K)$ et $H(L)$ respectivement, alors $\{u_k v_l\}$ est un système de représentation absolue dans $H(K\times L)$.

La stabilité des systèmes de représentation absolue par passage à la limite sera étudiée dans le § 2. En appliquant les résultats géneraux obtenus nous montrons la stabilité des systèmes $\{e^{\langle\lambda^k, z\rangle}\}$ par passage à la limite avec la condition $|\lambda^k|\to\infty$, où

$$\langle\lambda^k, z\rangle = \lambda_1^k z_1 + \ldots + \lambda_m^k z_m, \quad \lambda^k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k),$$

$$z = (z_1, \ldots, z_m), \quad |\lambda^k| = \max(|\lambda_1^k|, \ldots, |\lambda_m^k|).$$

Nous remarquons que ce problème est posé et résolu dans un cas très particulier par Korobeinik [6].

Dans le § 3 nous étudions le prolongement des systèmes de représentation absolue. Le théorème 3.1 a été démontré indépendamment par L. H. Khoi [4]. En appliquant encore une fois la stabilité des systèmes de représentation absolue par passage à la limite projective des DFN-espaces, nous montrons que si $\{e^{\langle\lambda^k, z\rangle}\}$ est un système de représentation absolue dans $H(\overline{G})$ avec G un domaine convexe borné, alors $\{e^{\langle\lambda^k, z\rangle}\}$ est un système de représentation absolue dans $H(G)$.

Dans le § 4, nous trouvons une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un système de représentation absolue d'exponentielles dans l'espace $H(G)$, où G est un ensemble ouvert (ou compact) dans C^m. Nous montrons que pour l'existence d'un tel système il faut et il suffit que le spectre $SH(G)$ de algèbre $H(G)$ soit convexe dans C^m.

Cet article est une partie de la thèse de doctorat de l'auteur écrite à Hanoi suivant une suggestion du Dr. N. V. Khue. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à N. V. Khue pour l'aide qu'il m'a apportée.

§ 1. La stabilité des SRA par passage au produit tensoriel. Nous montrons la stabilité des SRA par passage au produit tensoriel des DFN-espaces.

Rappelons qu'un *FN-espace* est un espace de Fréchet nucléaire, et un *DFN-espace* est un espace dual de Fréchet nucléaire.

Ainsi chaque FN-espace E peut être écrit sous la forme

$$E = \operatorname*{lim\,proj}_n B_n,$$

où les B_n sont des espaces de Banach et les applications canoniques de B_{n+1} dans B_n sont nucléaires. Cela entraîne que chaque DFN-espace F peut être écrit sous la forme

$$F = \operatorname*{lim\,ind}_n B_n,$$

où les B_n sont des espaces de Banach et les applications canoniques de B_n dans B_{n+1} sont injectives et nucléaires.

Dans le cas où les applications canoniques de B_{n+1} dans B_n (resp. de B_n dans B_{n+1}) sont compactes, E (resp. F) est appelé un *FS-espace* (resp. un *DFS-espace*).

THÉORÈME 1.1. *Soient $\{u_k\}$ et $\{v_l\}$ des SRA dans des DFN-espaces E et F respectivement. Alors $\{u_k\otimes v_l\}$ est un SRA dans $E\hat{\otimes}_\pi F$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous rappelons ci-dessous quelques notions et lemmes qui nous seront utiles.

Soit $E = \operatorname{lim\,ind} B_n$, où les B_n sont des espaces de Banach. Un système $\{u_k\}$ dans E est dit un *système de représentation absolument fort* (en abrégé SRAF) si pour tout $x\in E$, il existe un nombre n_0 tel que $x\in B_{n_0}$ et

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,\|u_k\|_{n_0} < \infty.$$

LEMME 1.1. *Dans un DFN-espace, tout SRA est un SRAF.*

Démonstration. Soient $E = \operatorname{lim\,ind} E_n$ un DFN-espace et $\{u_k\}$ un SRA dans E. Alors pour tout $x\in E$, on a

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,p_U(u_k) < \infty, \quad \forall\, U\in\mathscr{U}(E),$$

où $\mathscr{U}(E)$ est l'ensemble de tous les voisinages de zéro absolument convexes de E et p_U la seminorme induite par U.

Désignons par $\mathscr{B}(N)$ l'ensemble des bijections de N sur N. Considérons l'ensemble

$$A = \{S_n(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)} u_{\sigma(k)}\colon\ \sigma \in \mathscr{B}(N),\ n \in N\}.$$

Puisque

$$p_U(S_n(\sigma)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p_U(u_k) < \infty, \qquad \forall U \in \mathscr{U}(E),\ \sigma \in \mathscr{B}(N),\ n \in N,$$

on voit que A est borné. Donc il existe un n_0 tel que $A \subset E_{n_0}$ et A est relativement compact dans E_{n_0}. Nous montrons que la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ converge commutativement dans E_{n_0}.

Soit $\sigma \in \mathscr{B}(N)$ et supposons que $S_{n_j}(\sigma) \to x'$, $S_{m_j}(\sigma) \to x''$ dans E_{n_0}. Puisque l'application canonique de E_{n_0} dans E est injective, $x' = x = x''$. Ainsi $\sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ converge commutativement vers x dans E_{n_0}. Puisque l'application canonique de E_{n_0} dans E_{n_0+1} est nucléaire, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \, \|u_k\|_{n_0+1} < \infty.$$

Donc $\{u_k\}$ est un SRAF dans E.

Le lemme est démontré.

Soient $E = \operatorname{lim\,ind} B_n$ un DFN-espace et $\{u_k\}$ une suite dans E. Pour chaque n posons

$$A_n^E = \{\{c_k\} \subset C\colon\ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \, \|u_k\|_n < \infty\}.$$

Soit $\theta_U\colon \bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n^E \to E$ l'application canonique définie par

$$\theta_U(\{c_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k.$$

Le lemme suivant est une conséquence immediate du lemme 1.1.

LEMME 1.2. *Soient E un DFN-espace et $\{u_k\}$ une suite dans E. Pour que $\{u_k\}$ soit un SRA dans E, il faut et il suffit que l'application canonique θ_U soit surjective.*

LEMME 1.3. *Soient E_k et F_l des espaces de Fréchet, $k, l = 1, 2, \ldots$ Alors*

$$\bigoplus_{n,m=1}^{\infty} (E_n \hat{\otimes}_\pi F_m) \cong \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \hat{\otimes}_\pi \Big(\bigoplus_{m=1}^{\infty} F_m\Big).$$

Démonstration. Considérons l'application canonique

$$\gamma\colon \bigoplus_{n,m=1}^{\infty} (E_n \hat{\otimes}_\pi F_m) \to \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \hat{\otimes}_\pi \Big(\bigoplus_{m=1}^{\infty} F_m\Big).$$

Il est évident que γ est continue.

Montrons que γ est un isomorphisme. Soit β l'application bilinéaire canonique

$$\beta\colon \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n \times \bigoplus_{m=1}^{\infty} F_m \to \bigoplus_{n,m=1}^{\infty} (E_n \hat{\otimes}_\pi F_m).$$

Alors β est continue. En effet, la continuité de β se déduit des relations suivantes:

$$\bigoplus_{n,m=1}^{\infty} (E_n \times F_m) \cong \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \times \Big(\bigoplus_{m=1}^{\infty} F_m\Big), \qquad \beta = \bigoplus_{n,m=1}^{\infty} \beta_{n,m},$$

où $\beta_{n,m}$ est l'application canonique de $E_n \times F_m$ dans $E_n \hat{\otimes}_\pi F_m$, $\forall n, m$. Par suite, l'application

$$\hat{\beta}\colon \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \hat{\otimes}_\pi \Big(\bigoplus_{m=1}^{\infty} F_m\Big) \to \bigoplus_{n,m=1}^{\infty} (E_n \hat{\otimes}_\pi F_m)$$

induite par β est continue. Il est facile de vérifier que $\gamma\hat{\beta} = \mathrm{id}$ et $\hat{\beta}\gamma = \mathrm{id}$. Donc γ est un isomorphisme.

Le lemme est démontré.

LEMME 1.4. *Soient $E = \operatorname{lim\,ind} E_k$ et $F = \operatorname{lim\,ind} F_l$ des DFN-espaces. Alors $E \hat{\otimes}_\pi F$ est un DFN-espace et*

$$E \hat{\otimes}_\pi F \cong \operatorname*{lim\,ind}_{k,l} (E_k \hat{\otimes}_\pi F_l).$$

Démonstration. D'abord nous remarquons que le produit tensoriel d'applications nucléaires est une application nucléaire. Il en résulte que $\operatorname{lim\,ind}_{k,l} (E_k \hat{\otimes}_\pi F_l)$ est un DFN-espace. Il reste à montrer que $E \hat{\otimes}_\pi F \cong \operatorname{lim\,ind}_{k,l} (E_k \hat{\otimes}_\pi F_l)$.

Comme dans [1], pour deux espaces localement convexes P et Q nous désignons par $\mathrm{HOM}_\varepsilon(P'_c, Q)$ l'espace des applications linéaires continues de P'_c dans Q, muni de la topologie de convergence uniforme sur les équicontinus de P'_c, où P'_c est l'espace dual de P, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts de P.

Puisque E' est un espace de Fréchet et F un DFN-espace on a [2]

$$W(K, U) = W\Big(K, \bigcup_{l=1}^{\infty} U \cap F_l\Big) = \bigcup_{l=1}^{\infty} W(K, U \cap F_l)$$

pour tout $U \in \mathscr{U}(F)$ et tout ensemble borné K de E, où $W(K, U) = \{f \in \mathrm{HOM}_\varepsilon(E'_c, F)\colon f(K) \subset U\}$. Donc

$$\begin{aligned} E \hat{\otimes}_\pi F &\cong E \hat{\otimes}_\varepsilon F \ ([14]) \cong \mathrm{HOM}_\varepsilon(E', F) \ ([1]) \\ &\cong \operatorname*{lim\,ind}_{l} \mathrm{HOM}_\varepsilon(E', F_l) \cong \operatorname*{lim\,ind}_{l} \mathrm{HOM}_\varepsilon(F'_{l,c}, E) \\ &\cong \operatorname*{lim\,ind}_{l} \operatorname*{lim\,ind}_{k} \mathrm{HOM}_\varepsilon(F'_{l,c}, E_k) \cong \operatorname*{lim\,ind}_{l,k} (E_k \hat{\otimes}_\varepsilon F_l) \\ &\cong \operatorname*{lim\,ind}_{l,k} (E_k \hat{\otimes}_\pi F_l). \end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

LEMME 1.5. *Soient $E = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, où les B_n sont des espaces de Banach, et $F = \lim\operatorname{ind}_n D_n$ un DFN-espace. Soit R: $E \to F$ une application linéaire continue presque-ouverte telle que* $\operatorname{Im} R$ *est séquentiellement dense dans F. Alors $F' \cong \operatorname{Im} R'$ et R est ouverte.*

Démonstration. (i) D'abord nous montrons que $F' \cong \operatorname{Im} R'$. Considérons l'application R'': $E''_\tau \to F$, où E''_τ désigne l'espace E'' muni de la topologie de Mackey. Puisque tout ensemble borné dans F' est relativement compact, R'' est continue. D'après l'hypothèse R est presque-ouverte, d'où R'' est aussi presque-ouverte. Ainsi d'après le théorème de l'application ouverte pour les espaces totalement complets et les espaces tonnelés [2], R'': $E''_\tau \to F$ est ouverte.

Pour montrer que $F' \cong \operatorname{Im} R'$, il suffit de montrer que $\operatorname{Im} R'$ est fermé dans E'. Soit $R'g_k \to g$ dans E'. Considérons l'ensemble compact $K = \{R'g_k, g\}$ dans E'. Alors le polaire de K, $\Pi K = \{f \in E'': |\langle f, h\rangle| < 1, \ \forall h \in K\}$, est un voisinage de zéro dans E''_τ. Donc $R''(\Pi K)$ est un voisinage de zéro dans F. Puisque

$$1 \geqslant |\langle R''f, g_k\rangle| = |\langle R'f, g_k\rangle| \to |\langle R'f, g\rangle|$$

$\forall f \in \Pi K$, il en résulte que g est bornée sur $R''(\Pi K)$. Donc $g \in \operatorname{Im} R'$.

(ii)(a) Soit K un ensemble borné dans F. Puisque $F' \cong \operatorname{Im} R$, nous trouvons un ensemble borné, $\sigma(E'', E')$-fermé et absolument convexe $\tilde{K}$ dans E'' tel que $\Pi K \supset \Pi\tilde{K} \cap \operatorname{Im} R'$. D'après la $\sigma(E'', E')$-compacité de $\tilde{K}$ et la continuité de R'' pour les topologies $\sigma(E'', E')$ et $\sigma(F, F')$, $R''(\tilde{K})$ est fermé dans F. Supposons que $x \in K \setminus R''(\tilde{K})$. Prenons $g \in F'$ telle que

$$|g|\,|_{R''(\tilde{K})} \leqslant 1, \qquad g(x) > 1.$$

Alors $R'g \in \Pi\tilde{K} \cap \operatorname{Im} R' \setminus K$. C'est impossible.

(b) Posons $E_n = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j$, $R_n = R|_{E_n}$. Considérons l'espace $G = \lim\operatorname{ind} E_n/\operatorname{Ker} R_n$ and l'application $\tilde{R}$: $G \to F$ induite par R. Soit $T = \tilde{R}^{-1}$: $\operatorname{Im} R \to G$. Soit K un ensemble borné dans $\operatorname{Im} R$. D'après (a) nous trouvons un ensemble borné $\tilde{K}$ dans E'' tel que $R''(\tilde{K}) \supseteq K$. Soit $n_0 \in N$ tel que $\tilde{K}$ est contenu et borné dans E''_{n_0}. Puisque $T(K) \subset \tilde{K} \cap E_{n_0} + \operatorname{Ker} R_{n_0}$, $T(K)$ est borné dans G.

(c) Supposons que $\{g_k\} \subset \operatorname{Im} R$, $g_k \to 0$. Prenons $n_0 \in N$ tel que $\{g_k\} \subset D_{n_0}$ et $g_k \to 0$ dans D_{n_0}. Soit $\lambda_k \uparrow \infty$ tel que $\lambda_k g_k \to 0$ dans D_{n_0}. Alors $\{T(\lambda_k g_k) = \lambda_k T(g_k)\}$ est borné dans G et $T(g_k) \to 0$. Donc T est séquentiellement continue.

(d) Soit $\{g_k\}$ une suite de Cauchy dans G. Alors il existe n_0 tel que $\{\tilde{R}(g_k)\}$ soit une suite de Cauchy dans D_{n_0}. Prenons $\lambda_{k,j} \uparrow \infty$ tel que $\lambda_{k,j} R(g_k - g_j) \to 0$ dans D_{n_0}. Donc $\{\lambda_{k,j}(g_k - g_j) = TR(\lambda_{k,j}(g_k - g_j))\}$ est contenu et borné dans $E_m/\operatorname{Ker} R_m$ pour un certain $m \geqslant n_0$. Ceci implique que $g_k - g_j = \lambda_{k,j}(g_k - g_j)/\lambda_{k,j} \to 0$ dans $E_m/\operatorname{Ker} R_m$. Donc $g_k \to g$ dans $E_m/\operatorname{Ker} R_m$ et G est complet et séquentiellement complet.

(e) Puisque $\operatorname{Im} R$ est séquentiellement dense dans F, d'après (c) et (d) l'application T peut être prolongée en une application linéaire séquentiellement continue $\hat{T}$: $F \to G$. Puisque F est un espace bornologique $\hat{T}$ est continue. Donc R est ouverte.

Le lemme est démontré.

LEMME 1.6. *Soient E, F et G trois espaces localement convexes. Si η est une application linéaire continue ouverte de E sur F, alors l'application $\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta$ de $G\hat{\otimes}_\pi E$ dans $G\hat{\otimes}_\pi F$ est presque-ouverte.*

D'autre part, si E, F et G sont des espaces de Fréchet, alors $\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta$ est surjective.

Démonstration. Puisque pour tout $U \in \mathcal{U}(G)$ et $V \in \mathcal{U}(E)$, on a

$$\{z \in G\hat{\otimes}_\pi E: \ \pi_{(U,V)}(z) \leqslant 1\} = \overline{\operatorname{Conv}(U \otimes V)},$$

où

$$\pi_{(U,V)}(z) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} p_U(x_i)p_V(y_i): \ z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\Big\},$$

et que $(\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta)(\operatorname{Conv}(U \otimes V))$ est dense dans $\overline{(\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta)(\operatorname{Conv}(U \otimes V))}$ on a

$$\overline{(\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta)(\overline{\operatorname{Conv}(U \otimes V)})} = \overline{(\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta)(\operatorname{Conv}(U \otimes V))} = \overline{\operatorname{Conv}(U \otimes V)}.$$

Ainsi, l'application $\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta$ est presque-ouverte.

Donc si E, F et G sont des espaces de Fréchet, l'application $\mathrm{id}\hat{\otimes}_\pi\eta$ est surjective [2].

Le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1.1. Soient E et F des DFN-espaces et $\{u_k\}$ et $\{v_l\}$ des SRA dans E et F respectivement. Pour chaque couple (n, m), considérons A_n^E et A_m^F, les espaces définis par

$$A_n^E = \Big\{\{c_k\} \subset C: \ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\,\|u_k\|_n < \infty\Big\},$$

$$A_m^F = \Big\{\{d_l\} \subset C: \ \sum_{l=1}^{\infty} |d_l|\,\|v_l\|_m < \infty\Big\}.$$

D'après le lemme 1.2 et le théorème de l'application ouverte de Grothendieck [2] les applications θ_U de $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n^E$ dans E et θ_V de $\lim\operatorname{ind}_m A_m^F$ dans F sont ouvertes. Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{n,m=1}^{\infty} (A_n^E \hat{\otimes}_\pi A_m^F) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & (\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n^E) \hat{\otimes}_\pi (\bigoplus_{m=1}^{\infty} A_m^F) \arrow[d, "\theta_U \hat{\otimes}_\pi \theta_V"] \\
\lim\operatorname{ind}_{n,m} (E_n \hat{\otimes}_\pi F_m) \arrow[r, "\gamma"] & (\lim\operatorname{ind}_n E_n) \hat{\otimes}_\pi (\lim\operatorname{ind}_m F_m)
\end{tikzcd}$$

où β et γ sont des isomorphismes (en utilisant les lemmes 1.2 et 1.4) et l'application $\theta_U \hat{\otimes}_\pi \theta_V$ est presque-ouverte (d'après le lemme 1.6). Il en résulte que α est presque-ouverte. Évidemment $\operatorname{Im}\alpha$ est séquentiellement dense dans $\lim \operatorname{ind}_{n,m}(E_n \hat{\otimes}_\pi F_m)$. Par le lemme 1.5, α est ouverte. Par conséquent $\{u_k \otimes v_l\}$ est un SRA dans $\lim \operatorname{ind}_{n,m}(E_n \hat{\otimes}_\pi F_m) \cong E \hat{\otimes}_\pi F$ (d'après le lemme 1.4).

Le théorème est démontré.

Remarques. 1) Il est facile de voir que le produit tensoriel de bases absolues dans des espaces de Fréchet est aussi une base absolue dans le produit tensoriel projectif de ces espaces. Donc d'après le lemme 1.6, le théorème 1.1 est aussi vrai dans le cas où E et F sont des espaces de Fréchet. Ce résultat a été démontré par L. H. Khoi [4].

2) Le théorème 1.1 est aussi vrai si E est un espace de Fréchet et F un DFN-espace.

Maintenant nous appliquons le théorème à l'étude des systèmes de représentation absolue dans les espaces des fonctions holomorphes sur le produit des ensembles compacts et des ensembles ouverts dans les espaces euclidiens complexes.

Soit G un ensemble ouvert dans $\boldsymbol{C}^m$. Désignons par $H(G)$ l'espace des fonctions holomorphes sur G, muni de la topologie de convergence uniforme sur les compacts dans G.

Pour chaque ensemble compact $K \subset \boldsymbol{C}^m$, désignons par $H(K)$ l'espace des germes de fonctions holomorphes sur des voisinages de K, muni de la topologie inductive, c'est-à-dire

$$H(K) = \lim \operatorname{ind}\{H(U)\colon\ U \supset K\} \cong \lim \operatorname{ind}\{A(\bar{U})\colon\ U \supset K\},$$

où $A(\bar{U})$ est l'espace de Banach des fonctions continues sur $\bar{U}$ et holomorphes sur U.

Comme on le sait, $H(K)$ est un DFN-espace. Donc le théorème 1.1 peut être appliqué aux espaces $H(K)$.

Corollaire 1.1. *Soient K et L deux ensembles compacts (respectivement deux ensembles ouverts) dans $\boldsymbol{C}^m$ et $\boldsymbol{C}^n$ respectivement. Si $\{u_k\}$ et $\{v_l\}$ sont deux SRA dans $H(K)$ et $H(L)$ respectivement, alors $\{u_k v_l\}$ est un SRA dans $H(K \otimes L)$.*

§ 2. La stabilité des SRA par passage à la limite. Maintenant, nous étudions la stabilité des SRA par passage à la limite projective de FN- et DFN-espaces.

D'abord, considérons le cas des FN-espaces.

Soit $H = \lim \operatorname{proj} H_n$, où les H_n sont des FN-espaces. Alors H est aussi un FN-espace. Soit $\{p_j^1\}$ une famille croissante de seminormes définissant la topologie de H_1. Choisissons une seminorme continue p_1^2 sur H_2 telle que $p_1^2 \geqslant p_1^1$. Ensuite choisissons une seminorme p_2^2 sur H_2 telle que $p_2^2 \geqslant \max(p_1^2, p_2^1)$. Ainsi nous trouvons une famille croissante de seminormes $\{p_j^2\}$ définissant la topologie de H_2 telle que $p_l^2 \geqslant p_j^1$, $\forall j \leqslant l$. En continuant ce

procédé, on peut trouver une famille de seminormes $\{p_j^n\}_{n,j=1}^\infty$ définissant la topologie de H telle que $p_l^m \geqslant p_j^n$, $\forall m \geqslant n$, $\forall l \geqslant j$.

Soit $\{u_k\}$ une suite dans H satisfaisant à la condition suivante:

$$\lim_{k\to\infty} p_j^n(u_k)/p_{j+1}^n(u_k) = 0, \qquad \forall j, n \geqslant 1. \tag{2.1}$$

Il est facile de vérifier que:

(i) $\lim_{k\to\infty} p_j^n(u_k)/p_l^m(u_k) = 0$, $\forall m, n$ et $l > j$.

(ii) La relation (2.1) ne dépend pas du choix de $\{p_j^n\}$ définie comme plus haut.

Théorème 2.1. *Soient $H = \lim \operatorname{proj} H_n$, où les H_n sont des FN-espaces, et $\{p_j^n\}$ une famille de seminormes définie comme plus haut. Si $\{u_k\}$ est une suite dans H satisfaisant à la condition* (2.1) *et si $\{u_k\}$ est un SRA dans H_n pour tout $n \geqslant 1$, alors $\{u_k\}$ est un SRA dans H.*

Démonstration. Pour chaque couple (n, j), posons

$$A_j^n = \Big\{\{c_k\} \subset \boldsymbol{C}\colon \sum_{k=1}^\infty |c_k| p_j^n(u_k) < \infty\Big\}.$$

Nous remarquons que:

(i) Pour tout n, l'application canonique de A_{j+1}^n dans A_j^n est compacte et d'image dense.

(ii) L'application canonique de A_{j+1}^{n+1} dans A_j^n est d'image dense.

(iii) L'application canonique de $\lim \operatorname{proj}_j A_j^{n+1}$ dans $\lim \operatorname{proj}_j A_j^n$ est d'image dense.

Puisque H_n est un FN-espace, il est de Montel et l'application adjointe $(\varphi^n)'$ de φ^n est un isomorphisme de H_n' dans $(\lim \operatorname{proj}_j A_j^n)' \cong \lim \operatorname{ind}_j (A_j^n)'$, où φ^n est l'application de $\lim \operatorname{proj}_j A_j^n$ sur H_n définie par

$$\varphi^n(\{c_k\}) = \sum_{k=1}^\infty c_k u_k.$$

Soit

$$R_j^n = \{y \in H_n'\colon \sup_k |y(u_k)|/p_j^n(u_k) < \infty\}.$$

Puisque $\{u_k\}$ est un SRA dans H_n, on a

$$H_n' \cong \lim_j \operatorname{ind} R_j^n \qquad [6].$$

Soit φ l'application canonique de $\lim \operatorname{proj}_n \lim \operatorname{proj}_j A_j^n$ dans $\lim \operatorname{proj}_n H_n$ induite par $\{\varphi^n\}$. Alors φ est d'image dense (d'après (iii)).

Pour montrer que $\{u_k\}$ est un SRA dans H, il suffit de montrer que φ est surjective. Considérons φ', l'application adjointe de φ,

$$\varphi'\colon\ H' \to (\lim_n \operatorname{proj} \lim_j \operatorname{proj} A_j^n)' \cong \lim_n \operatorname{ind} \lim_j \operatorname{ind} (A_j^n)'.$$

Il est évident que φ' est injective. Puisque H est un FN-espace, on a

$$H' \cong \lim \operatorname{ind} H_n' \cong \lim_n \operatorname{ind} \lim_j \operatorname{ind} R_j^n.$$

Nous allons maintenant montrer que $\varphi'(H')$ est fermé dans $\lim\operatorname{ind}_n \lim\operatorname{ind}_j (A_j^n)'$. Il suffit de montrer que $\varphi'(H') \cap (A_j^n)'$ est fermé dans $(A_j^n)'$ pour tous n, j. Soit $\{\varphi'(y_p)\}$ une suite dans $(A_j^n)'$ qui converge vers $z \in (A_j^n)'$. Nous remarquons d'abord que $y_p \in R_j^n$, $p \geqslant 1$. En effet, grâce à la relation $\varphi'(y_p) \in (A_j^n)'$ et la dualité l^1, l^∞, on a

$$\begin{aligned}
\infty &> \sup\Big\{|\langle \varphi'(y_p),\ \{c_k\}\rangle|\colon\ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p_j^n(u_k) \leqslant 1\Big\}\\
&= \sup\Big\{|\langle y_p,\ \varphi(\{c_k\})\rangle|\colon\ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p_j^n(u_k) \leqslant 1\Big\}\\
&= \sup\Big\{\Big|\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_p(u_k)\Big|\colon\ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p_j^n(u_k) \leqslant 1\Big\}\\
&= \sup_k \big\{|y_p(u_k)|/p_j^n(u_k)\big\}.
\end{aligned}$$

Donc $y_p \in R_j^n$ pour tout $p \geqslant 1$.

De ceci et de la relation $H_n' \cong \lim\operatorname{ind}_j R_j^n \subsetneq \lim\operatorname{ind}_j (A_j^n)'$, il résulte que $\{y_p\}$ converge vers y dans $\lim\operatorname{ind}_j R_j^n$ avec $\varphi'(y) = z$. Donc $\varphi'(H')$ est fermé dans $\lim\operatorname{ind}_n \lim\operatorname{ind}_j (A_j^n)'$. On voit facilement que

$$\lim_n \operatorname{ind} \lim_j \operatorname{ind} (A_j^n)' = \lim_{n,j} \operatorname{ind} (A_j^n)'.$$

Ainsi d'après (2.1), $\lim\operatorname{ind}_n \lim\operatorname{ind}_j (A_j^n)'$ est un DFS-espace. Par conséquent $\varphi'(H')$ l'est aussi, étant un sous-espace fermé d'un DFS-espace. Alors en appliquant le théorème de l'application ouverte pour l'application φ' de H' sur $\varphi'(H')$ [2], on a $\varphi'\colon H' \cong \varphi'(H')$. D'après le théorème de Banach,

$$\begin{aligned}
\varphi''\colon\ \big[\lim_n \operatorname{ind} \lim_j \operatorname{ind} (A_j^n)'\big]' &\cong \big[\lim_n \operatorname{proj} \lim_j \operatorname{proj} A_j^n\big]''\\
&\cong \lim_n \operatorname{proj} \lim_j \operatorname{proj} A_j^n \to H'' \cong H
\end{aligned}$$

est surjective. Donc φ est surjective.

Le théorème est démontré.

COROLLAIRE 2.1. *Soient G un domaine convexe dans $\mathbf{C}^m$ et $\{G_n\}$ une suite croissante de sous-domaines convexes tendant vers G. Si $\{e^{\langle \lambda^k, z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(G_n)$ pour tout n et $\lim |\lambda^k| = \infty$, alors $\{e^{\langle \lambda^k, z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(G)$.*

Démonstration. Choisissons une suite de nombres $q_j > 0$, $q_j \uparrow 1$. Posons $G_{n,j} = \{z \in G_n\colon |z| < j\}$. Alors il est facile de voir que $G_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} q_j G_{n,j}$ pour tout n. Par conséquent, la famille de seminormes $\{p_j^n\}$, où

$$p_j^n(u) = \sup\{|u(z)|\colon\ z \in q_j G_{n,j}\}, \qquad u \in H(G_n),$$

définit la topologie de $H(G_n)$. Il est clair que $p_l^m \geqslant p_j^n$, $\forall\, m \geqslant n$, $l \geqslant j$. Puisque

$$p_j^n(u_k) = \exp q_j H_{G_{n,j}}(\lambda^k)$$

où $u_k(z) = e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$, $z \in \mathbf{C}^m$, et

$$H_{G_{n,j}}(\lambda) = \sup\{\operatorname{Re}\langle \lambda, z\rangle\colon\ z \in G_{n,j}\}$$

est la fonction de support de $G_{n,j}$, on a

$$p_j^n(u_k)/p_{j+1}^n(u_k) = \exp(q_j - q_{j+1}) H_{G_{n,j}}(\lambda^k) \to 0$$

quand $k \to \infty$. Donc le corollaire 2.1 est une conséquence immédiate du théorème 2.1.

Remarque. Dans le cas où $m = 1$, G est un domaine borné convexe et $G_n = q_n G$, $q_n \uparrow 1$, le corollaire 2.1 a été démontré par Korobeinik [6]. Et dans le cas général, ce corollaire répond à une question posée par Korobeinik [6].

Nous considérons maintenant la stabilité des SRA par pasage à la limite projective des DFN-espaces.

Soit $H = \lim\operatorname{proj} H_n$ un espace de Fréchet, où les $H_n = \lim\operatorname{ind}_j B_j^n$ sont des DFN-espaces pour tout n avec B_j^n des espaces de Banach, et où les applications canoniques de B_j^n dans B_{j+1}^n sont nucléaires. Alors H est un FN-espace.

Soit $\{u_k\}$ une suite dans H satisfaisant à la condition suivante:

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_j^j / \|u_k\|_l^l = 0, \qquad \forall\, l > j. \tag{2.2}$$

On a la théorème suivant:

THÉORÈME 2.2. *Soit $H = \lim\operatorname{proj} H_n$ un FN-espace défini comme plus haut. Si $\{u_k\}$ est une suite dans H satisfaisant à la condition (2.2) et si $\{u_k\}$ est un SRA dans H_n pour tout n, alors $\{u_k\}$ est un SRA dans H.*

Démonstration. Considérons l'application canonique

$$\omega_1\colon\ H \to H_1 = \lim_j \operatorname{ind} B_j^1.$$

Puisque H est un espace de Fréchet, il existe j_1 tel que $\omega_1(H) \subset B_{j_1}^1$ et $\omega_1\colon H \to B_{j_1}^1$ est continue [2]. Puisque $B_{j_1}^1$ est un espace de Banach, il est facile de voir qu'il existe une application linéaire continue $\tilde{\omega}_1$ de H_{p_1} dans $B_{j_1}^1$ telle que $\omega_1 = \tilde{\omega}_1 \omega_{p_1}$. Posons

$$\tilde{B}_1^1 = B_{j_1}^1, \qquad \tilde{B}_2^1 = B_{j_1+1}^1, \ \ldots,$$

Alors on a

$$H_1 = \lim_j \operatorname{ind} \tilde{B}_j^1, \qquad \tilde{\omega}_1(H_{p_1}) \subset \tilde{B}_1^1.$$

Posons $|||\cdot|||_j^1 = \|\cdot\|_j^1$, $\forall j \geqslant 1$. Ensuite pour chaque j, nous remplaçons la norme initiale $\|\cdot\|_j^{p_1}$ de $B_j^{p_1}$ par une norme équivalente, en posant

$$|||x|||_j^{p_1} = \max(\|x\|_j^{p_1}, \|\tilde{\omega}_1 x\|_1^1), \qquad x \in B_j^{p_1}.$$

Comme plus haut, considérons l'application canonique ω_{p_1} de H dans H_{p_1}. Alors il existe une application linéaire continue $\tilde{\omega}_2$ de H_{p_2} dans $B_{j_2}^{p_1}$, $p_2 > p_1$, telle que $\omega_{p_1} = \tilde{\omega}_2 \omega_{p_2}$. En posant

$$\tilde{B}_1^{p_1} = B_{j_2}^{p_1}, \quad \tilde{B}_2^{p_1} = B_{j_2+1}^{p_1}, \ldots, \qquad \text{et}$$

$$|||x|||_j^{p_2} = \max(\|x\|_j^{p_1}, |||\tilde{\omega}_2 x|||_1^{p_1}), \qquad x \in \tilde{B}_j^{p_1},$$

on a

$$H_{p_1} = \lim_j \operatorname{ind}(\tilde{B}_j^{p_1}, |||\cdot|||_j^{p_1}), \qquad |||x|||_l^{p_2} \geqslant |||\tilde{\omega}_2 x|||_k^{p_1}, \qquad \forall k, l.$$

En continuant ce procédé, nous obtenons des normes $|||\cdot|||_j^{p_k}$ dans $\tilde{B}_j^{p_k}$ telles que

$$(2.3) \qquad \begin{cases} |||\cdot|||_l^{p_k} \geqslant |||\cdot|||_j^{p_m}, & \forall l, j \text{ et } k > m, \\ |||\cdot|||_l^{p_k} \sim \|\cdot\|_l^{p_k}, & \forall l, k \geqslant 1, \\ H_{p_k} = \lim_j \operatorname{ind}(B_j^{p_k}, |||\cdot|||_j^{p_k}), & \forall k \geqslant 1. \end{cases}$$

Pour chaque m, choisissons des constantes positives C_m et A_m telles que

$$A_m \|\cdot\|_{p_m}^{p_m} \leqslant |||\cdot|||_{p_m}^{p_m} \leqslant C_m \|\cdot\|_{p_m}^{p_m}.$$

Alors

$$|||u_k|||_{p_j}^{p_j} / |||u_k|||_{p_l}^{p_l} \leqslant (C_j/A_l) \|u_k\|_{p_j}^{p_j} / \|u_k\|_{p_l}^{p_l} \to 0$$

quand $k \to \infty$, $\forall l > j$. Donc la condition (2.2) est aussi vérifiée avec les normes $|||\cdot|||$.

Posons

$$A_j^{p_i} = \{\{c_k\} \subset \boldsymbol{C} \colon \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \, |||u_k|||_j^{p_i} < \infty\},$$

$$R_j^{p_i} = \{y \in H'_{p_i} \colon \sup_k |y(u_k)| / |||u_k|||_j^{p_i} < \infty\}.$$

On a les propriétés suivantes:

(2.4) Le plongement canonique de $A_{p_{i+1}}^{p_{i+1}}$ dans $A_{p_i}^{p_i}$ est compact pour tout i, puisque $\lim_k |||u_k|||_{p_i}^{p_i} / |||u_k|||_{p_{i+1}}^{p_{i+1}} = 0$.

$$(2.5) \qquad H'_{p_i} \cong \lim_j \operatorname{proj} R_j^{p_i},$$

puisque $\{u_k\}$ est un SRA dans H_{p_i} [6].

$$(2.6) \qquad H \cong \lim_i \operatorname{proj} H_{p_i}.$$

Considérons l'application canonique $\varphi_{p_i}\colon A_{p_i}^{p_i} \to H_{p_i}$. Soit φ l'application de $\lim \operatorname{proj}_i A_{p_i}^{p_i}$ dans H induite par $\{\varphi_{p_i}\}$. Pour montrer que $\{u_k\}$ est un SRA dans H, il suffit de montrer que φ est surjective.

D'abord nous montrons que φ est d'image dense. Soit $y = \{y_{p_i}\} \in \lim \operatorname{proj}_i H_{p_i}$. Fixons i. Puisque $\{u_k\}$ est un SRA dans $H_{p_{i+1}}$, il existe $x_{p_{i+1}} = \{c_k\} \in A_{j_0}^{p_{i+1}}$ pour un certain j_0, tel que $y_{p_{i+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$. D'après (2.3), on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \, |||u_k|||_{p_i}^{p_i} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \, |||u_k|||_{p_{i+1}}^{p_{i+1}} < \infty.$$

Donc $x_{p_{i+1}} \in A_{p_i}^{p_i}$. Il est évident que $\varphi_{p_i}(x_{p_{i+1}}) = y_{p_i}$. Ainsi l'image de l'application φ_{p_i} est dense dans $\omega_{p_i}(H)$. Cette image est donc dense dans H_{p_i}, car H contient la suite $\{u_k\}$ qui est dense par hypothèse dans chaque H_{p_i}.

Ensuite nous montrons que $\varphi'(H')$ est fermé dans $\lim \operatorname{ind}_i (A_{p_i}^{p_i})'$. Il suffit de montrer que pour tout p_i, $\varphi'(H') \cap (A_{p_i}^{p_i})'$ est fermé dans $(A_{p_i}^{p_i})'$.

Considérons une suite $\{\varphi'(y_n)\}$ convergeant vers z dans $(A_{p_i}^{p_i})'$. Comme dans le théorème 2.1, on a $y_n \in R_{p_i}^{p_i}$, pour tout n. Puisque $R_{p_i}^{p_i}$ est un sous-espace fermé de $(A_{p_i}^{p_i})'$, $\{y_n\}$ converge dans $R_{p_i}^{p_i}$. Pour tout $y \in R_{p_i}^{p_i}$, d'après (2.3), on a

$$\sup |\langle y, u_k / |||u_k|||_{p_i}^{p_i} \rangle| = \sup |\langle y, u_k / |||u_k|||_j^{p_{i+1}} \rangle| \, |||u_k|||_j^{p_{i+1}} / |||u_k|||_{p_i}^{p_i}$$
$$\geqslant \sup |\langle y, u_k / |||u_k|||_j^{p_{i+1}} \rangle|, \qquad \forall j \geqslant 1.$$

Il en résulte que l'application canonique de $R_{p_i}^{p_i}$ dans $R_j^{p_{i+1}}$ est continue, pour tout $j \geqslant 1$, ce qui entraîne que la suite $\{y_n\}$ converge dans $\lim \operatorname{proj}_j R_j^{p_{i+1}} \cong H'_{p_{i+1}}$ (d'après (2.5)).

Donc $\{y_n\}$ converge vers y dans H' et $\varphi'(y) = z$. Il en résulte que $\varphi'(H')$ est fermé dans $\lim \operatorname{ind}_i (A_{p_i}^{p_i})'$. Puisque la condition (2.2) est vérifiée avec les normes $|||\cdot|||$, $\lim \operatorname{ind}_i (A_{p_i}^{p_i})'$ est un DFS-espace. Donc $\varphi'(H')$ est aussi un DFS-espace. Ainsi, d'après le théorème de l'application ouverte [2], on a $\varphi'\colon H' \cong \varphi'(H')$. Donc $\varphi = \varphi''$ est surjective.

Le théorème est démontré.

Corollaire 2.2. *Soient G un domaine convexe dans $\boldsymbol{C}^m$ et $\{G_n\}$ une suite croissante de sous-domaines convexes tendant vers G telle que $G_n \Subset G_{n+1}$ pour tout n. Si $\{e^{\langle \lambda^k, z \rangle}\}$ est un SRA dans $H(\bar{G}_n)$ pour tout n et $\lim_{k\to\infty} |\lambda^k| = \infty$, alors $\{e^{\langle \lambda^k, z \rangle}\}$ est aussi un SRA dans $H(G)$.*

Démonstration. Puisque $G_1 \Subset G_2$ il existe $a_1 > 1$ tel que $a_1 G_1 \Subset G_2$. Ensuite choisissons $1 < a_2 < a_1$ tel que $a_2 G_2 \Subset G_3$. En continuant ce procédé, nous obtenons une suite $\{a_j\}$, $a_j > 1$, telle que

$$a_jG_j \Subset G_{j+1} \Subset a_{j+1}G_{j+1}, \quad \forall j \geqslant 1.$$

Donc il est facile de voir que $a_j\downarrow 1$ et grâce à l'homogénéité de la fonction de support d'un domaine convexe on a

$$\delta_{j,l} = \inf_k \{a_l H_{G_l}(\lambda^k/|\lambda^k|) - a_j H_{G_j}(\lambda^k/|\lambda^k|)\} > 0.$$

Puisque $a_j\downarrow 1$, on a $H(\bar{G}_n) = \liminf_j H(a_j\bar{G}_n)$ pour tout n. Par le théorème 2.2 il suffit de vérifier que $\{u_k = e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ satisfait à la condition (2.2).

Puisque

$$\|u_k\|_j^j = \exp a_j H_{G_j}(\lambda^k), \quad \forall k,j,$$

on a

$$\|u_k\|_j^j/\|u_k\|_l^l = \exp[a_jH_{G_j}(\lambda^k) - a_lH_{G_l}(\lambda^k)]$$

$$= \exp(-|\lambda^k|[a_lH_{G_l}(\lambda^k/|\lambda^k|) - a_jH_{G_j}(\lambda^k/|\lambda^k|)]) = \exp(-|\lambda^k|\delta_{j,l}) \to 0$$

quand $k\to\infty$ pour tout $l>j$.

Le corollaire est démontré.

Remarque. Dans le cas où $m=1$, G est borné et $G_n = \bigcup_{q_n} G$, $q_n\uparrow 1$, ce corollaire a été démontré par Korobeinik [6].

§ 3. Le prolongement des SRA d'exponentielles dans les espaces des fonctions holomorphes. Soient H et H_1 des espaces localement convexes; en plus, supposons qu'il existe une injection continue de H dans H_1. Supposons que $\{x_k\}$ est un SRA dans H. Si $\{x_k\}$ est aussi un SRA dans H_1, on dit que le système $\{x_k\}$ *se prolonge* dans H_1.

Nous nous intéressons au cas où $H = H(G+K)$, $H_1 = H(G)$, où G est un domaine convexe (ou un ensemble compact) dans C^m et K un ensemble compact dans C^m. Grâce à un résultat de Sigurdsson [15], il existe une fonction entière complètement régulière T telle que la régularisation h_T^* de l'indicatrice de T soit H_K, la fonction de support de K. Comme on le sait, une fonction entière φ sur C^m est dite *complètement régulière* si pour tout $z\in C^m$, la fonction $\varphi_z(\lambda) = \varphi(\lambda z)$ est complètement régulière par rapport à $\lambda\in C$.

Ainsi $T\in\lim\operatorname{proj}_n[1, H_{U_n})$, où $\{U_n\}$ est un système fondamental des voisinages convexes de K et $[1, H_{U_n})$ désigne l'espace des fonctions entières φ sur C^m pour lesquelles l'ordre de φ est inférieur à 1 ou l'ordre de φ est égal à 1 et $h_\varphi^*(z) < H_{U_n}(z)$, $\forall z\in C^m$. Puisque la transformation de Laplace donne un isomorphisme entre $H(U_n)'$ et $[1, H_{U_n})$ pour tout n, pour tout domaine convexe $V\supset G$ on peut définir une application linéaire continue $\hat{T}_{(V,n)}$ de $H(V+U_n)$ dans $H(V)$ par la formule

$$[\hat{T}_{(V,n)}\varphi](z) = \langle\varphi(z+\xi), T\rangle.$$

Il est évident que $\hat{T}_{(V,n)}$ commute avec les applications de restriction. Ainsi dans le cas où G est un domaine convexe, $\{\hat{T}_{(G,n)}\}$ induit une application linéaire continue $\hat{T}$ de $H(G+K)$ dans $H(G)$. Si G est un ensemble compact $\{\hat{T}_{(V,n)}\}$ nous donne une application linéaire continue $\tilde{T}$ de $H(G+K)$ dans $H(G)$. Alors $\hat{T}$ et $\tilde{T}$ sont des applications linéaires surjectives [13], et

$$\hat{T}(e^{\langle\lambda,z\rangle}) = \langle e^{\langle\lambda,z+\xi\rangle}, T\rangle = e^{\langle\lambda,z\rangle}\langle e^{\langle\lambda,\xi\rangle}, T\rangle$$

$$= T(\lambda)e^{\langle\lambda,z\rangle} = \tilde{T}(e^{\langle\lambda,z\rangle}), \quad \forall\lambda\in C^m.$$

On en déduit les théorèmes suivants.

THÉORÈME 3.1. *Soient G un domaine convexe dans C^m et K un ensemble compact convexe dans C^m. Si $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(G+K)$, alors $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est aussi un SRA dans $H(G)$.*

THÉORÈME 3.2. *Soient G et K deux ensembles convexes compacts dans C^m. Si $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(G+K)$, alors $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est aussi un SRA dans $H(G)$.*

Soit G un domaine convexe borné dans C^m. Puisque $\bar{G} = q\bar{G}+(1-q)\bar{G}$ pour tout $0<q<1$, en appliquant le théorème 3.2 et le corollaire 2.2 on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3.3. *Soit G un domaine convexe borné dans C^m et supposons que $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(\bar{G})$ avec $\lim|\lambda^k| = \infty$. Alors $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est aussi un SRA dans $H(G)$.*

Remarque. Dans le cas où $m=1$ les théorèmes 3.1–3.3 ont été démontrés par Korobeinik [6].

§ 4. L'existence des SRA d'exponentielles. Soit A une algèbre topologique. Désignons par $S(A)$ le spectre de A, c'est-à-dire l'espace des fonctionnelles linéaires multiplicatives continues différentes de zéro sur A, muni de la topologie faible.

D'abord nous considérons une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des SRA d'exponentielles dans les espaces des fonctions holomorphes sur les ensembles ouverts de C^m.

THÉORÈME 4.1. *Soit G un domaine dans C^m.*

(i) *S'il existe un SRA d'exponentielles dans $H(G)$, alors le spectre $SH(G)$ de l'algèbre $H(G)$ est contenu dans C^m et convexe.*

(ii) *Inversement, si $SH(G)$ est contenu dans C^m et convexe, alors il existe une suite $\{\lambda^k\}\subset C^m$ telle que $\lim|\lambda^k|\to\infty$ et $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(aG)$ pour tout $a>0$.*

Démonstration. (i) Supposons que $\{e^{\langle\lambda^k,z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(G)$. Alors pour chaque $f\in H(G)$ on a

$$\hat{f}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{\langle\lambda^k,z\rangle}$$

et la série converge absolument dans G.

Soit G_f le domaine de convergence absolue de $\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{\langle\lambda^k,z\rangle}$. Comme on le sait, pour $z^0,z^1\in \boldsymbol{C}^m$, le domaine de convergence absolue $M(z^0,z^1)$ de $\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{\langle\lambda^k,z^0\rangle+\langle\lambda^k,z^1\rangle\lambda}$ dans $\boldsymbol{C}$ est convexe [10]. Puisque $M(z^0,z^1)=G_f\cap(z^0+\boldsymbol{C}z^1)$, G_f est convexe. Donc $\hat{G}=\operatorname{Int}\bigcap\{G_f\colon f\in H(G)\}$ est convexe. D'après la convexité de $\hat{G}$ et puisque chaque fonction holomorphe sur G a un prolongement holomorphe sur $\hat{G}$, on voit que $\hat{G}$ est l'enveloppe d'holomorphie de G. Donc $SH(G)=\hat{G}$ est contenu dans $\boldsymbol{C}^m$ et convexe.

(ii) Puisque $H(SH(G))\cong H(G)$, sans restreindre la généralité on peut admettre que G est convexe et $0\in G$.

a) *Cas G borné.* Choisissons une suite $q_n>0$, $q_n\uparrow 1$. Posons $G_n=q_nG$. Alors $G_n\Subset G$ pour tout n, $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ et $H_{G_n}=q_nH_G$. Pour chaque $a>0$, posons

$$T_n^a=\{y\in H(aG)'\colon\ \|y\|_n^a=\sup|\hat{y}(z)|\exp(-aq_nH_G(z))<\infty\},$$

où $\hat{y}(z)=\langle y,e^{\langle\lambda,z\rangle}\rangle$. Comme on le sait, la transformation de Laplace $y\mapsto\hat{y}$ donne un isomorphisme entre $H(aG)'$ et $\lim\operatorname{ind}_n T_n^a$ [13]. Pour chaque $r>0$, comme dans [9] posons

$$C_r=\{z\in\boldsymbol{C}^m\colon\ H_G(z)=r\}.$$

D'après la convexité de H_G et le fait que $0\in G$, les domaines limités par C_r sont convexes et bornés. Soient $\alpha=\sup\{H_G(z)\colon |z|\leqslant 1\}$ et $\gamma=\inf\{H_G(z)\colon |z|=1\}>0$. Alors pour $z\in C_r$ et $z'\in C_{r+1}$, on a

$$1=H_G(z')-H_G(z)\leqslant H_G(z'-z)\leqslant\alpha|z'-z|.$$

On a donc $\operatorname{dist}(C_r,C_{r+1})\geqslant 1/\alpha$. Pour tout $\varepsilon>0$ posons

$$\tilde{v}(\varepsilon)=\inf\{n\colon \exists\varepsilon\text{-chaîne à } n \text{ éléments de } \{|z|=1\}.$$

Alors on a $\varepsilon\ln\tilde{v}(\varepsilon)\to 0$ quand $\varepsilon\to 0$. Posons $v(r)=\tilde{v}(1/r^2)$. Choisissons $\lambda_1^{(r)},\ldots,\tilde{\lambda}_{v(r)}^{(r)}$ tels que $\{\tilde{\lambda}_1^{(r)},\ldots,\tilde{\lambda}_{v(r)}^{(r)}\}$ soit une $1/r^2$-chaîne pour $\{|z\}=1\}$. Posons

$$\lambda_j^{(r)}=r\tilde{\lambda}_j^{(r)}/H_G(\tilde{\lambda}_j^{(r)})\qquad\text{pour } j=1,\ldots,v(r).$$

Alors on a

$$\begin{aligned}|\lambda_j^{(r)}-\lambda_i^{(r)}|&=r|\tilde{\lambda}_j^{(r)}/H_G(\tilde{\lambda}_j^{(r)})-\tilde{\lambda}_i^{(r)}/H_G(\tilde{\lambda}_i^{(r)})|\\&\leqslant(r/\gamma^2)[|\tilde{\lambda}_j^{(r)}-\tilde{\lambda}_i^{(r)}|\,H_G(\tilde{\lambda}_i^{(r)})+|\lambda_i^{(r)}|\,|H_G(\tilde{\lambda}_i^{(r)})-H_G(\tilde{\lambda}_j^{(r)})|]\\&\leqslant(r/\gamma^2)[\alpha/r^2+\alpha/r^2]=\delta/r,\end{aligned}$$

où $\delta=2\alpha/\gamma^2$ ne dépend pas de r.

Ainsi pour chaque n, l'ensemble $\{\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_{v(n)}^{(n)}\}$ est une δ/n-chaîne pour C_n.

Soit $y\in T_p^a$. Posons $M_r(y)=\sup\{|\hat{y}(z)|\colon z\in C_r\}$. Pour chaque n, choisissons $t_n\in C_n$ et $\lambda_{j_0}^{(n)}\in\{\lambda_1^{(n)},\ldots,\lambda_{v(n)}^{(n)}\}$ tels que

$$M_n(y)=|\hat{y}(t_n)|,\qquad |t_n-\lambda_{j_0}^{(n)}|\leqslant\delta/n.$$

Alors on a

$$|\hat{y}(t_n)|-|\hat{y}(\lambda_{j_0}^{(n)})|\leqslant|\hat{y}(t_n)-\hat{y}(\lambda_{j_0}^{(n)})|=\Big|\int_{t_n}^{\lambda_{j_0}^{(n)}}y'(\tau)\,d\tau\Big|\leqslant\delta M_n(y')/n,$$

où

$$y'(\tau)=\lim_{h\to 0}\frac{\hat{y}(\tau+he)-\hat{y}(\tau)}{h}\qquad\text{avec}\qquad e=\frac{\lambda_{j_0}^{(n)}-t_n}{\|\lambda_{j_0}^{(n)}-t_n\|}$$

($\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans $\boldsymbol{C}^m$).

Pour chaque $\tau\in\tilde{C}_n=\{z\in\boldsymbol{C}^m\colon H_G(z)\leqslant n\}$, d'après la formule intégrale de Cauchy, on a

$$\left|\frac{\partial\hat{y}}{\partial z_j}(\tau)\right|\leqslant(2\pi)^{-m}\int_{\gamma_\tau}\frac{|\hat{y}(v)|\,dv}{|v_1-\tau_1|\ldots|v_j-\tau_j|^2\ldots|v_m-\tau_m|}\leqslant 2\alpha M_{n+1}(y),$$

où $\gamma_\tau=\{z\in\boldsymbol{C}^m\colon |z_1-\tau_1|=\ldots=|z_m-\tau_m|=\frac{1}{2}\alpha\}\subset\tilde{C}_{n+1}$. Alors $|\partial\hat{y}(\tau)/\partial e|\leqslant 2m\alpha M_{n+1}(y)$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}M_n(y)\exp(-aq_{p-1}n)-|y(\lambda_{j_0}^{(n)})|\exp(-aq_{p-1}n)\\&=(|y(t_n)|-|y(\lambda_{j_0}^{(n)})|)\exp(-aq_{p-1}n)\\&\leqslant(2m\delta\alpha/n)M_{n+1}(y)\exp(-aq_{p-1}(n+1))\exp aq_{p-1}\\&\leqslant\tfrac{1}{2}M_{n+1}(y)\exp(-aq_{p-1}(n+1)),\qquad\forall n>N,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$M_n(y)/\exp aq_{p-1}n\leqslant\tfrac{1}{2}M_{n+1}(y)/\exp aq_{p-1}(n+1)+|y(\lambda_{j_0}^{(n)})|/\exp aq_{p-1}n.$$

Cela entraîne

$$\begin{aligned}\sup_{n>N}M_n(y)/\exp aq_{p-1}n\leqslant\tfrac{1}{2}\sup_{n>N}M_{n+1}(y)/\exp aq_{p-1}(n+1)\\+\sup_{n,j\geqslant 1}|y(\lambda_j^{(n)})|/\exp aq_{p-1}n.\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{n>N}M_n(y)/\exp aq_{p-1}n\leqslant 2\sup_{n,j\geqslant 1}|y(\lambda_j^{(n)})|/\exp aq_{p-1}n. \tag{4.1}$$

D'autre part,

$$M_r(y)/\exp aq_pr\leqslant B_NM_N(y)/\exp aq_{p-1}N,\qquad\forall r\leqslant N, \tag{4.2}$$

où $B_N = \exp aN$, et

(4.3) $\quad M_r(y)/\exp aq_p r \leqslant K_p M_{n+1}(y)/\exp aq_{p-1}(n+1), \qquad \forall n \leqslant r \leqslant n+1,$

où

$$K_p = \sup_n \exp a[q_{p-1}(n+1) - q_p n] < \infty.$$

Finalement, de (4.1)–(4.3) nous avons

$$\begin{aligned}\|y\|_p^a &= \max\Big(\sup_{0<r\leqslant N} M_r(y)/\exp aq_p r, \sup_{r>N} M_r(y)/\exp aq_p r\Big)\\ &\leqslant \max\big(B_N M_N(y)/\exp aq_{p-1}N, K_p \sup_{n>N} M_n(y)/\exp aq_p n\big)\\ &\leqslant 2B_N K_p \sup_{n,j\geqslant 1} |\hat{y}(\lambda_j^{(n)})|/\exp aq_{p-1}n\\ &= 2B_N K_p \sup_{n,j\geqslant 1} |\langle y, e^{\langle \lambda_j^{(n)}, z\rangle}\rangle|/\|e^{\langle \lambda_j^{(n)}, z\rangle}\|_{aq_{p-1}G_n},\end{aligned}$$

ce qui entraîne $H(aG)' \cong \lim\operatorname{ind}_p T_p^a \cong \lim\operatorname{ind}_p R_p^a$, où

$$R_p^a = \{y \in H(aG)': \sup_{n,j\geqslant 1} |\langle y, e^{\langle \lambda_j^{(n)}, z\rangle}\rangle|/\|e^{\langle \lambda_j^{(n)}, z\rangle}\|_{aq_{p-1}G_n}\}.$$

Ainsi d'après [6], $\{e^{\langle \lambda_j^{(n)}, z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(aG)$ pour tout $a > 0$.

Le cas où G est borné est démontré.

(ii) *Cas général.* Posons $G_n = \{z \in G: |z| < n\}$. Alors G_n est convexe borné pour tout n et $H(aG) = \lim\operatorname{proj}_n H(aG_n)$ pour tout $a > 0$. Pour chaque n, choisissons α_n tel que

$$|z| \geqslant \alpha_n H_{G_n}(z), \qquad \forall z \in \boldsymbol{C}^m.$$

Nous pouvons supposer que $\alpha_n \downarrow 0$. D'après le cas (i), pour tout n, il existe une suite $\{\lambda_j^{(l,n)}\}_{l\geqslant n} \subset \boldsymbol{C}^m$ telle que $\{e^{\langle \lambda_j^{(l,n)}, z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(aG)$ pour tout $a > 0$. Puisque $\operatorname{Card}\{{}^{n,j}_{l}\} < \infty$ pour tous $l \geqslant n$, on a

$$|\lambda_j^{(l,n)}| \geqslant \alpha_n H_{G_n}(\lambda_j^{(l,n)}) = \alpha_n l/\alpha_n = l \to \infty$$

quand $\max(l, n, j) \to \infty$. Ainsi nous pouvons écrire $\{\lambda_j^{(l,n)}\}_{l\geqslant n} = \{\mu^k\}$ avec $|\mu^k| \to \infty$. Considérons la suite $\{e^{\langle \mu^k, z\rangle}\} \subset H(aG)$, $\forall a > 0$. D'après la relation

$$\|e^{\langle \mu^k, z\rangle}\|_{aq_k G_n}/\|e^{\langle \mu^k, z\rangle}\|_{aq_{k+1}G_n} = \exp(q_k - q_{k+1})aH_{G_n}(\mu^k) \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty$$

et le théorème 2.1, $\{e^{\langle \mu^k, z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(aG)$ pour tout $a > 0$.

Le théorème est démontré.

Remarque. La démonstration de la suffisance dans le cas borné est inspirée de la méthode de Korobeinik [9].

Ensuite, nous considérons une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des SRA d'exponentielles dans les espaces des germes de fonctions holomorphes sur des voisinages d'ensembles compacts.

Soit K un ensemble compact dans $\boldsymbol{C}^m$ et $\{U_n\}$ une base de voisinages de K. Alors $SH(K) = \lim\operatorname{proj} SH(U_n)$. Pour chaque n, notons α_n: $SH(U_n) \to \boldsymbol{C}^m$ l'application induite par $U_n \subsetneq \boldsymbol{C}^m$ et α_∞: $SH(K) \to \boldsymbol{C}^m$ celle induite par $\{\alpha_n\}$. Nous avons le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2. *Soit K un ensemble compact dans $\boldsymbol{C}^m$.*

(i) *S'il existe un SRA $\{e^{\langle \lambda^k, z\rangle}\}$ dans $H(K)$, alors α_∞ est un homéomorphisme sur l'image et $\alpha_\infty(SH(K))$ est convexe.*

(ii) *Inversement, si α_∞ est un homéomorphisme sur l'image et $\alpha_\infty(SH(K))$ est convexe, alors il existe un SRA $\{e^{\langle \lambda^k, z\rangle}\}$ dans $H(aK)$ pour tout $a > 0$, tel que $|\lambda^k| \to \infty$.*

Démonstration. (i) Supposons l'existence d'un SRA $\{e^{\langle \lambda^k, z\rangle}\}$ dans $H(K)$. Alors chaque $f \in H(K)$ s'écrit sous la forme

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$$

dans un voisinage de K.

Soit G_f le domaine de convergence absolue de la série ci-dessus. Comme dans le théorème 4.1, G_f est un voisinage convexe de K et f se prolonge à G_f. D'abord nous montrons que $\alpha_\infty(SH(K)) = \bigcap\{G_f: f \in H(K)\}$.

Puisque pour chaque $z \in \bigcap\{G_f: f \in H(K)\}$ la formule $\delta_z(f) = f(z)$ détermine $\delta_z \in SH(K)$ avec $\alpha_\infty(\delta_z) = z$, on a $\alpha_\infty(SH(K)) \supseteq \bigcap\{G_f: f \in H(K)\}$. D'autre part, puisque $SH(K) = \lim\operatorname{proj} SH(U_n)$ pour tout $f \in H(K)$, quand n est assez grand on a $\alpha_n(SH(U_n)) \subset G_f$, ce qui entraîne que $\alpha_\infty(SH(K)) \subseteq \bigcap\{G_f: f \in H(K)\}$. Donc $\alpha_\infty(SH(K)) = \bigcap\{G_f: f \in H(K)\}$.

Ainsi $\alpha_\infty(SH(K))$ est convexe et $\bigcap\{G_f: f \in H(K)\}$ est compact, ce qui entraîne

$$\alpha_\infty(SH(K)) \cong S\Big(H\big(\alpha_\infty(SH(K))\big)\Big) \cong SH(K).$$

Donc α_∞ est un homéomorphisme sur l'image.

(ii) Inversement, soit α_∞: $SH(K) \cong \alpha_\infty(SH(K))$ avec $\alpha_\infty(SH(K))$ convexe. Alors l'application canonique α_n: $SH(K) \to SH(U_n)$ est un homéomorphisme sur l'image pout tout n. Ainsi on peut voir que $SH(K) \subset SH(U_n)$ pour tout n. Puisque $\alpha_n|SH(K) = \alpha_\infty$ est un homéomorphisme sur l'image et α_n est un homéomorphisme local, $(\alpha_n|SH(K))^{-1}$ peut être prolongée en une application σ sur un voisinage de $\alpha_\infty(SH(K))$ dans $\boldsymbol{C}^m$ telle que $\alpha_n\sigma = \mathrm{id}$. Cela entraîne que $H(K) \cong H(\alpha_\infty SH(K))$.

Donc pour montrer (ii) on peut supposer que K est convexe.

Pour chaque n, posons

$$G_n = \{z \in \boldsymbol{C}^m: \operatorname{dist}(z, K) < 1/n\}.$$

Alors les G_n sont convexes et $aK = \bigcap_{n=1}^\infty aG_n$ pour tout $a > 0$. Choisissons une suite $\alpha_n > 0$ telle que

$$|z| \geqslant \alpha_n H_{G_n}(z), \qquad \forall z \in \boldsymbol{C}^m.$$

Comme dans le théorème 4.1, pour chaque n, il existe une suite $\{\lambda_j^{(l,n)}\}_{l\geqslant n}\subset C^m$ telle que $H_{G_n}(\lambda_j^{(l,n)})=l/\alpha_n$ et $\{e^{\langle\lambda_j^{(l,n)},z\rangle}\}_{l\geqslant n}$ est un SRA dans $H(aG_n)$ pour tous $a>0$ et $n\geqslant 1$. Comme dans le théorème 4.1 nous pouvons écrire $\{\lambda_j^{(l,n)}\}_{l\geqslant n}=\{\mu^k\}$ avec $|\mu^k|\to\infty$ quand $k\to\infty$. D'autre part, évidemment $\{e^{\langle\mu^k,z\rangle}\}$ est un SRA dans $H(aK)$ pour tout $a>0$.

Le théorème est démontré.

Références

[1] L. Bungart, *Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas*, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 317–344.

[2] R. Edwards, *Functional Analysis. Theory and Applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1965.

[3] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, van Nostrand, Princeton 1966.

[4] L. H. Khoi, *Produit tensoriel des systèmes de représentation absolue*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1985, no. 1, 63–65 (en russe).

[5] L. H. Khoi et Yu. F. Korobeinik, *Les systèmes de représentation absolue d'exponentielles dans les domaines polycylindriques*, Mat. Sb. 122 (164)(4)(1983), 458–474 (en russe).

[6] Yu. F. Korobeinik, *Les systèmes de représentation*, Uspekhi Mat. Nauk 36 (1) (1981), 73–126 (en russe).

[7] —, *Sur un problème dual. I. Résultats généraux. Applications aux espaces de Fréchet*, Mat. Sb. 97 (139) (2) (1975), 193–229 (en russe).

[8] —, *Sur un problème dual. II. Applications aux LN*-espaces et autres problèmes*, ibid. 98 (140) (1) (1975), 3–26 (en russe).

[9] —, *Les systèmes de représentation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 42 (2) (1978), 325–355 (en russe).

[10] A. F. Leont'ev, *Les Séries d'Exponentielles*, Nauka, Moscou 1976 (en russe).

[11] —, *Sur la représentation des fonctions analytiques en séries d'exponentielles dans les domaines polycylindriques*, Mat. Sb. 100 (142) (3) (1976), 364–383 (en russe).

[12] V. V. Morzhakov, *Sur les équations de convolution dans les espaces des fonctions holomorphes dans les domaines convexes et sur les compacts convexes de C^n*, Mat. Zametki 16 (3) (1974), 431–440 (en russe).

[13] V. V. Napalkov, *Équations de Convolution dans les Espaces à Plusieurs Dimensions*, Nauka, Moscou 1982 (en russe).

[14] A. Pietsch, *Nuclear Locally Convex Spaces*, Akademie-Verlag, Berlin 1972.

[15] R. Sigurdsson, *Growth properties of analytic and plurisubharmonic functions of finite order*, Doctoral dissertation, Lund 1984.

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
INSTITUT DE PÉDAGOGIE No. 1
Hanoi, Vietnam

Received November 11, 1986
Revised version December 9, 1987
(2241)

STUDIA MATHEMATICA, T. XCIV (1989)

Ensembles suffisants pour quelques espaces de fonctions

par

CHAN-PORN (Hanoi)

Résumé. On étudie les ensembles suffisants dans certains espaces de fonctions. Les résultats obtenus sont appliqués aux espaces des fonctions holomorphes sur les ouverts (ou compacts) convexes de C^l. On établit des relations entre ensembles suffisants et systèmes de représentation absolue d'exponentielles.

Les ensembles suffisants pour les espaces de fonctions entières jouent un rôle important dans la recherche de développements des fonctions holomorphes en somme infinie de fonctions exponentielles. Ces ensembles ont été étudiés par plusieurs auteurs, en particulier par A. V. Abanin [1] et par Yu. F. Korobeinik [2]. Cet article a également pour but d'étudier les ensembles suffisants pour quelques espaces de fonctions, et d'en tirer quelques applications.

Soit $\mathscr{B}$ un ensemble arbitraire et E un espace vectoriel de fonctions complexes sur $\mathscr{B}$. Pour chaque sous-ensemble $S\subset\mathscr{B}$ et chaque fonction positive φ sur $\mathscr{B}$, on pose

$$E^S(\varphi)=\{g\in E\colon\ \|g\|_\varphi^{\infty,S}:=\sup_S|g(x)|/\varphi(x)<\infty\}.$$

Supposons maintenant que $\{\mathscr{B}_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de sous-ensembles de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^\infty\mathscr{B}_n$, et $\Phi=\{f_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de fonctions positives sur $\mathscr{B}$ telle que

$$\sup_{\mathscr{B}_k}f_n(x)<\infty,\qquad \inf_{\mathscr{B}_k}f_n(x)>0$$

pour tout $n,k\geqslant 1$. Nous écrivons

$$\|\cdot\|_n^{\infty,S}=\|\cdot\|_{f_n}^{\infty,S}$$

pour tout $n\geqslant 1$.

Posons

$$(E^S(\Phi),\ \mu^{\infty,S}(\Phi))=\operatorname{lim\,ind}(E^S(f_n),\ \|\cdot\|_n^{\infty,S}),$$

où $\mu^{\infty,S}(\Phi)$ désigne la topologie limite inductive.