STUDIA MATHEMATICA, T. XCIII. (1989)

Applications de dualité dans les espaces de Köthe

par

BERNARD BRU et HENRI HEINICH (Paris)

Abstract. We study such properties of duality maps in Köthe spaces as measurability, rearrangement invariance, differentiability. We deduce a theorem of a.s. convergence for the iterates of duality maps, an extension of Ando's theorem for contractive projections and a theorem of a.s. convergence for best approximants. In the second part, we study the case of Orlicz spaces where the preceding results can be made more precise. In particular, we show that the sequence of best approximants following a given filtration satisfies Doob's inequalities. We conclude by a detailed study of the monotonicity of Orlicz spaces.

Introduction. Soit E un espace de Banach, de dual topologique E^*; les applications de dualité, introduites dans [4], [5], fournissent un procédé naturel de passage de la sphère de E à la sphère de E^*. Utilisées dans l'étude des opérateurs des espaces L^p [1], [3], elles permettent une fois mises explicitement en oeuvre d'étendre certains résultats à des espaces de Banach de variables aléatoires réelles plus généraux, les espaces de Köthe. C'est ce que l'on se propose de montrer ici.

Nous commençons par étudier les propriétés des applications de dualité dans les espaces de Köthe; nous montrons en particulier que, sous des hypothèses très générales, elles préservent la mesurabilité et sont invariantes par réarrangement. Nous en déduisons un théorème de convergence p.s. des itérées successives des applications de dualité (§ I). Nous donnons ensuite deux applications des propriétés ainsi établies, l'une liée à la caractérisation des opérateurs espérances conditionnelles qui généralise aux espaces de Köthe le théorème d'Ando des espaces L^p [2] et des espaces d'Orlicz [7] [11], la seconde à la convergence p.s. des meilleurs approximants.

Nous concluons cette etude en étudiant le cas particulier des espaces d'Orlicz pour lesquels les énoncés peuvent être précisés davantage. Nous montrons par exemple que les suites de meilleurs approximants le long d'une filtration satisfont aux inégalités de Doob et convergent p.s. Nous présentons enfin une étude détaillée des propriétés de monotonie des normes classiques des espaces d'Orlicz.

1980 *Mathematics Subject Classification*: 41A65, 46E30, 60G48.
Key words and phrases: duality maps, Köthe spaces, Orlicz spaces, best approximants.

Un certain nombre de résultats établis ici ont été annoncés dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [7], [8], [11].

Cadre de l'étude. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Un espace de Banach réticulé E formé de variables aléatoires réelles, v.a.r., définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un *espace de Köthe* si:

(i) $L^\infty \subseteq E \subseteq L^1$, les injections étant continues.

(ii) Si X et Y sont des v.a.r. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vérifiant $|X| \leqslant Y$, $Y \in E$, alors $X \in E$ et $\|X\| = \||X|\| \leqslant \|Y\|$.

Le théorème 1.b.14 de [19] montre que tout espace de Banach réticulé à norme continue pour l'ordre, n.c.o., et à unité faible peut se représenter comme un espace de Köthe de v.a.r., ce qui nous assure du degré de généralité d'un tel cadre, qui inclut les espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et les espaces d'Orlicz.

Nous adoptons pour les espaces de Köthe les notations de [19], en particulier nous notons E^* le dual topologique de E et E' son *dual de Köthe*, $E' = \{Y \in L^1 \colon XY \in L^1 \text{ pour tout } X \in E\}$.

Rappelons que $E' = E^*$ si et seulement si E a sa norme continue pour l'ordre, c'est-à-dire si $X_\alpha \in E_+$ et X_α décroît vers 0 impliquent $\|X_\alpha\|$ décroît vers 0; et $E = E''$ si et seulement si E possède la *propriété de Fatou*, c'est-à-dire si X_n croît vers X p.s., $X_n \in E$, et $\|X_n\| \leqslant 1$ impliquent $X \in E$ et $\lim \|X_n\| = \|X\|$.

Enfin, nous notons $\|\cdot\|_*$ la norme duale de la norme $\|\cdot\|$; nous écrirons $\langle u, x\rangle = u(x)$ pour $u \in E^*$ et $x \in E$, et si $X \in L^1$, $E(X) = \int X\,dP$.

I. Applications de dualité dans les espaces de Köthe

Soit E un espace de Köthe; pour $X \in S(E)$, sphère de E ($\|X\| = 1$), notons $\mathcal{D}_X = \{D \in S(E^*) \colon \langle D, X\rangle = 1\}$. On remarque que $\mathcal{D}_X$ est non vide et que si E est lisse en X [12], $\mathcal{D}_X$ se réduit à un seul point. Enfin, si $X \in E_+$ et $D \in \mathcal{D}_X$, alors $|D| \in \mathcal{D}_X$.

Définition 1. Une application D de $S(E)$ dans $S(E^*)$ est une *application de dualité* si pour tout $X \in S(E)$, $\langle D(X), X\rangle = 1$.

Exemple. Si $E = L^p$, $1 < p < \infty$, l'application de dualité est unique et est donnée par $D(X) = \operatorname{sgn}(X)|X|^{p-1}$ pour $\|X\|_p = 1$.

Commençons par une propriété simple:

Proposition 2. *Si E est un espace de Köthe lisse, pour tout $X \in S(E)$*

$$D(X) = \operatorname{sgn}(X) D(|X|), \qquad \operatorname{sgn}(D(X)) = \operatorname{sgn}(X).$$

Démonstration. La relation $E(XD(X)) = \|X\| = \||X|\| = E(|X|D(|X|))$ montre que $E(XD(X)) = E(X\operatorname{sgn}(X)D(|X|))$ et comme $|\operatorname{sgn}(X)D(|X|)| \leqslant D(|X|)$, il vient $\|\operatorname{sgn}(X)D(|X|)\|_* = 1$, ce qui achève notre preuve. ■

Si E est un espace de Köthe n.c.o. réflexif et tel que E et E^* soient lisses, si on note D (resp. D^*) l'application de dualité de $S(E)$ dans $S(E^*)$ (resp. de $S(E^*)$ dans $S(E)$), on vérifie aisément que

$$\forall X \in S(E), \quad D^*(D(X)) = X,$$
$$\forall X \in S(E^*), \quad D(D^*(X)) = X.$$

1. Applications de dualité et conditionnement. Lorsque $E' = E^*$, $\mathcal{D}_X$ est formé de variables aléatoires pour tout $X \in S(E)$, on peut se demander si les variables de $\mathcal{D}_X$ sont mesurables par rapport à la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X. Nous examinons ici cette question qui est intimement liée aux propriétés de l'opérateur espérance conditionnelle dans l'espace E. C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante [7]:

Définition 3. Un espace de Köthe E sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dit *invariant par conditionnement* – i.c. – si, pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{B}}$ est une contraction de E.

Proposition 4. *Soit E un espace de Köthe i.c. lisse et n.c.o. Si X est $\mathcal{B}$-mesurable, pour une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, il en est de même de $D(X)$. En particulier, si $\|1\| = 1$, $D(1) = 1$.*

Démonstration. Si X est $\mathcal{B}$-mesurable, $\|X\| = E(XD(X)) = E(XE^{\mathcal{B}}(D(X)))$; or $\|E^{\mathcal{B}}(D(X))\|_* \leqslant \|D(X)\|_* = 1$, donc $\|E^{\mathcal{B}}(D(X))\|_* = 1$ et $E^{\mathcal{B}}(D(X)) = D(X)$. Par suite $D(1)$ est nécessairement constante et son espérance vaut 1; si $\|1\| = 1$, il en résulte que $D(1) = 1$. ■

Remarque. Donnons un contre-exemple à la proposition 4 lorsque les conditions ne sont pas toutes vérifiées.

Soit E un espace de Köthe n.c.o. sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit f_0 une v.a. de E de support Ω et d'espérance 1. Définissons E_0 comme l'espace des fonctions g mesurables telles que $gf_0 \in E$. Muni de la norme $\|g\|_0 = \|gf_0\|$, E_0 est un espace de Köthe sur $(\Omega, \mathcal{A}, f_0 P)$.

Supposons la norme de E différentiable; on a alors

$$\|g + \varepsilon h\|_0 = \|g\|_0 + \varepsilon E[D(fg_0) \cdot h] + o(\varepsilon).$$

La norme de E_0 est différentiable et sa dérivée en g est $D_0(g) = D(gf_0)$. En particulier, $D_0(1) = D(f_0)$, qui n'est constante que si f_0 est constante.

2. Applications de dualité et réarrangement. Lorsque l'espace de probabilité est diffus, les espaces invariants par conditionnement s'apparentent aux espaces invariants par réarrangement (r.i.), dont l'étude est classique [19].

Rappelons les définitions relatives à ces espaces:

On appelle *automorphisme* d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ toute application τ bijective, bimesurable de Ω dans Ω telle que $P\circ\tau = P$.

Un espace de Köthe E sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ possédant la propriété de Fatou est dit *r.i.* si:

(i) $\forall X\in E\ \forall\tau$ automorphisme, $X\circ\tau\in E$ et $\|X\| = \|X\circ\tau\|$.
(ii) $L^\infty\subseteq E\subseteq L^1$, les injections étant de norme $\leqslant 1$.

Le théorème 2.a.4 de [19], p. 122, assure que tout espace r.i. sur [0, 1] muni de la mesure de Lebesgue est i.c. Nous allons voir que, réciproquement, tout espace i.c. sur l'espace de Lebesgue peut être renormé en un espace r.i.

THÉORÈME 5. *Si E est i.c., alors E est r.i. pour une norme équivalente.*

Démonstration. Soit $X\in E$ i.c. et τ un automorphisme tel que τ^n = identité. Si $\mathscr{B}$ désigne la tribu des invariants de τ, alors

$$E^{\mathscr{B}}(X) = (1/n)(X+X\circ\tau+\ldots+X\circ\tau^{n-1})\in E$$

et l'inégalité $|X\circ\tau^p|\leqslant nE^{\mathscr{B}}(|X|)$ montre que $X\circ\tau^p\in E$.

Si maintenant $\tau = \tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3$ avec $(\tau_i)^{n_i}$ = identité, on montre de même que $X\in E$ implique $X\circ\tau\in E$.

On en déduit, à l'aide du théorème de [15], que $X\circ\tau\in E$ pour tout automorphisme τ. ∎

Remarque. Les résultats précédents sont faux si $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est atomique, par exemple: $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $P(0) = 1/2$, $P(1) = 1/8$, $P(2) = 3/8$. L'espace de toutes les v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ est un espace de Köthe i.c. pour la norme $\|X\| = E\big(\sup_{\mathscr{B}(\Omega)} E^{\mathscr{B}}(|X|)\big)$ et pourtant les variables $X = 1_{(0)}$ et $Y = 1 - X$ ont visiblement même loi et sont de normes différentes.

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, nous supposerons que $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est l'espace de Lebesgue, [0, 1], muni de la mesure de Lebesgue.

Les résultats précédents vont nous permettre d'affiner la proposition 4: l'application de dualité est une fonction croissante invariante par réarrangement.

Adoptons, pour la clarté de l'exposé, la convention suivante [22]: Soit $\boldsymbol{P}$ une propriété sur les suites. Nous dirons qu'une suite vérifie $*$-$\boldsymbol{P}$ si on peut extraire de toute sous-suite de la suite initiale, une nouvelle sous-suite vérifiant $\boldsymbol{P}$.

Par exemple, (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si (X_n) est $*$-convergente p.s. vers X.

Nous aurons besoin du lemme suivant [11]:

LEMME 6. *Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes de $\boldsymbol{R}_+$ dans $\bar{\boldsymbol{R}}_+$. Alors (f_n) est $*$-convergente simplement, sauf peut-être sur un ensemble dénombrable. De plus, si X est une v.a.r. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et si la suite $(f_n(X))$ converge en probabilité, elle converge presque sûrement.*

Démonstration. Soit (f_n) une sous-suite; il existe une sous-suite (n_i) telle que $f_{n_i}(r)$ converge pour $r\in\boldsymbol{Q}$; notons $g(r)$ sa limite. La fonction g est croissante de $\boldsymbol{Q}$ dans $\bar{\boldsymbol{R}}_+$; on la prolonge par continuité à gauche, par exemple. Il existe un ensemble dénombrable D en dehors duquel g est continue. Ainsi pour $x\in D^c$, $f_{n_i}(x)$ tend vers $g(x)$: c'est la preuve de la première partie du lemme.

Pour établir la seconde assertion il suffit de remarquer que si $\bar{f}$ et $\underline{f}$ désignent respectivement la limite supérieure et la limite inférieure de la suite (f_n), alors, comme précédemment, il existe deux sous-suites (n_i) et (n_j) et un ensemble dénombrable D tels que $P(X\in D) = 0$, et pour $x\in D^c$, $f_{n_i}(x)\to\bar{f}(x)$, $f_{n_j}(x)\to\underline{f}(x)$.

Or, pour la probabilité P_X, la suite f_n converge en probabilité, par conséquent $\bar{f} = \underline{f}$ P_X-p.s. ∎

PROPOSITION 7. *Soit E un espace de Köthe r.i., lisse et n.c.o. Si X, $Y\in S(E)$ ont même loi, il en est de même de $D(X)$ et $D(Y)$. De plus, $D(X) = f(X)$ où f est une fonction croissante ne dépendant que de la loi de X.*

Démonstration. Soient $X\in E$ et τ un automorphisme. Pour $D\in\mathscr{D}_X$ on a

$$1 = \langle D, X\rangle = \langle D\circ\tau, X\circ\tau\rangle.$$

Donc $D\circ\tau\in\mathscr{D}_{X\circ\tau}$, ce qui montre la première assertion.

Si X^* est la réarrangée décroissante de $X = \sum a_i 1_{A_i}$ pour des A_i, $1\leqslant i\leqslant n$, équiprobables et $D(X) = D = \sum x_i 1_{A_i}$, alors

$$1 = \langle D, X\rangle \leqslant \langle D^*, X^*\rangle \leqslant \|D^*\|_{E'}\|X^*\| = 1.$$

Donc $(D(X))^* = D(X^*) = (D(X^*))^*$. De plus, si f est la fonction qui à a_i^* associe x_i^*, on peut écrire $D^* = f(X^*)$, d'où $D = f(X)$.

Si maintenant (X_n) est une suite de v.a.r. étagées convergeant p.s. et dans $S(E)$ vers $X\in E$, il est clair que X_n^* tend vers X^*. Notons $D(X_n) = D_n = f_n(X_n)$. On peut supposer, pour une sous-suite notée encore (f_n), que f_n converge p.s. dans $\bar{\boldsymbol{R}}$ vers f, croissante (lemme 6). Or D_n converge vers $D = D(X)$. Il en résulte que $D = f(X)$. ∎

Remarque. Lorsque E est réflexif et vérifie les conditions de la proposition 7, la même théorie s'applique à E^*. L'application de dualité, D^*, de $S(E^*)$ dans $S(E)$ s'écrit $D^*(Y) = g(Y)$ et, comme $D^*\circ D$ = identité, on en déduit que f est strictement croissante P_X-p.s.

3. Applications de dualité différentiables. Soit E un espace de Köthe lisse et soit D l'application de dualité de $S(E)$ dans $S(E^*)$ que l'on prolonge à E par les formules: $D(X) = D(X/\|X\|)$ si $X \neq 0$ et $D(0) = 0$. On a alors $\langle D(X), X\rangle = \|X\|$ pour tout $X \in E$.

D est une application fortement continue de $E-0$ dans $S(E^*)$ [12] et pour tout $X, Y \in E$, $\|X+\varepsilon Y\| = \|X\| + \varepsilon\langle D(X), Y\rangle + o(\varepsilon)$ si ε tend vers 0. $D(X)$ apparaît ainsi comme la dérivée en X de la norme de E.

En particulier, si E est n.c.o., i.c. et si $\|1\| = 1$, on a $D(1) = 1$ et pour tout $X \in E$, $\|1+\varepsilon X\| = 1 + \varepsilon E(X) + o(\varepsilon)$ si ε tend vers 0.

On peut préciser cette égalité lorsque l'application D est elle-même différentiable en 1, c'est-à-dire si la norme de E est deux fois différentiable en 1 [13], [23].

PROPOSITION 8. *Soit E est un espace de Köthe n.c.o, i.c. à norme deux fois différentiable en 1 et tel que $\|1\| = 1$; alors $E \subseteq E^*$ et il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que, pour tout $X \in E$,*

$$(1/\varepsilon)\big(D(1+\varepsilon X)-1\big) \to k\big(X - E(X)\big) \quad \textit{dans } E^* \textit{ quand } \varepsilon \to 0.$$

En particulier,

$$\|1+\varepsilon X\| = 1 + \varepsilon E(X) + (\varepsilon^2/2)k \operatorname{var}(X) + o(\varepsilon^2)$$

où $\operatorname{var}(X) = E\big(X - E(X)\big)^2$ *désigne la variance de X.*

Démonstration. Par hypothèse D est différentiable en 1, c'est-à-dire qu'il existe une application linéaire continue D_1' de E dans E^* telle que $\|D(1+\varepsilon X) - 1 - \varepsilon D_1'(X)\|_* = o(\varepsilon)\|X\|$ pour tout $X \in E$ ([13], p. 151). Comme $D(1+\varepsilon X)$ est une v.a.r. mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X)$ engendrée par X, il en est de même de $D_1'(X)$.

De plus, l'application $(X, Y) \to \langle D_1'(X), Y\rangle$ de $E \times E$ dans R est bilinéaire, symétrique, positive et bornée ([13], p. 182 et [23]). En particulier, pour $Y = 1$, $E\big(D_1'(X)\big) = \langle D_1'(X), 1\rangle = \langle D_1'(1), X\rangle = 0$ puisque $D_1'(1) = 0$ $(D(1+\varepsilon) = D(1)$ pour tout $\varepsilon)$. La v.a.r. $D_1'(X)$ est donc $\sigma(X)$-mesurable et centrée pour tout $X \in E$.

Soit alors $A \in \mathscr{A}$; $D_1'(1_A) = \alpha 1_A + \beta 1_{A^c}$ avec $\alpha P(A) + \beta P(A^c) = (\alpha-\beta)P(A) + \beta = 0$, d'où $D_1'(1_A) = k_A\big(1_A - P(A)\big)$ avec $k_A = \alpha - \beta$.

Remarquons que k_A est indépendant du choix de A dans $\mathscr{A}$. En effet, si $B \in \mathscr{A}$, on a $D_1'(1_B) = k_B\big(1_B - P(B)\big)$ et comme $\langle D_1'(1_B), 1_A\rangle = \langle D_1'(1_A), 1_B\rangle$, il en résulte que

$$k_A\big(P(A\cap B) - P(A)P(B)\big) = k_B\big(P(A\cap B) - P(A)P(B)\big)$$

et donc que $k_A = k_B = k$ dès que A et B sont dépendants, en particulier pour tous les intervalles dyadiques de $[0, 1]$ et donc pour tous les boréliens p.s.

Enfin, comme D_1' est une application linéaire continue, on en déduit que $D_1'(X) = k\big(X - E(X)\big)$ pour toute v.a. étagée, puis pour tout $X \in E$. Il en résulte notamment que $X \in E^*$ et donc $E \subset E^*$.

En outre, $\langle D_1'(X), X\rangle \geqslant 0$ implique $k \geqslant 0$.

On obtient le développement de $\|1+\varepsilon X\|$ en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 à la fonction f: $\varepsilon \to \|1+\varepsilon X\|$, en remarquant que $f'(\varepsilon) = \langle D(1+\varepsilon X), X\rangle$ et donc que $f''(0) = kE\big((X-E(X))^2\big) = k\operatorname{var}(X)$. ∎

EXEMPLES. Si $E = L^p$, les conditions précédentes sont vérifiées si et seulement si $p \geqslant 2$, et la constante k vaut alors $p-1$. Pour les espaces d'Orlicz voir II.2.

4. Itération des applications de dualité. Nous supposerons toujours que E est lisse et n.c.o. de sorte que D est unique et $E^* = E'$. Comme nous venons de le voir, il existe des cas où E^* se plonge canoniquement dans E; il suffit pour cela que E soit réflexif et que E^* satisfasse aux hypothèses de la proposition précédente, par exemple lorsque $E = L^p$, $1 < p \leqslant 2$, ou que E est un espace d'Orlicz contenant L^2 (cf. II).

S'il en est ainsi, si donc $E^* \subseteq E$, l'injection étant continue, on peut considérer D comme une application de E dans E et l'itérer:

$$D_{n+1}(X) = D\big(D_n(X)\big).$$

Il est aisé de voir que $\big(\|D_{n+1}(X)\|\big)$ est une suite croissante bornée. Nous allons montrer que sous des hypothèses très générales la suite $\big(D_n(X)\big)$ converge p.s. et fortement vers le signe de X normalisé. D se comporte ainsi comme une "fonction concave impaire" sur E, ses itérées se concentrent de plus en plus autour de ses points fixes 0, 1 et -1.

Commençons par rappeler qu'une famille F de v.a. d'un espace de Köthe E est dite *E-équiintégrable* ([19], [9], p. 201–202) si

$$\sup_{X\in F}\|X1_{(|X|>c)}\| \to 0 \quad \text{lorsque } c \to \infty.$$

On vérifie que si $E = L^p$, $1 < p < 2$, la boule unité de $E^* = L^q$ est E-équiintégrable. Cette propriété s'étend aux espaces d'Orlicz (II.2); elle intervient ici de façon naturelle:

THÉORÈME 9. *Soit E un espace de Köthe n.c.o., lisse, r.i., tel que $E^* \subset E$ et que, pour l'injection canonique, la boule de E^* soit une partie E-équiintégrable. Alors la suite des itérées $\big(D_n(X)\big)$ est $*$-convergente dans E et, si Y est une valeur d'adhérence de cette suite, on a $D^2(Y) = Y$.*

Démonstration. Pour $X \in S(E_+)$ notons $a_n = \|D_n(X)\|$ et

$$D_{n+1} = D\big((1/a_n)D_n(X)\big) = f_n\big((1/a_n)D_n(X)\big) = g_n(X).$$

Dans ces conditions, avec le lemme 6, la suite (D_{n+1}) converge $*$-p.s. dans $\bar{R}_+$.

Supposons que la boule de E^* soit E-équiintégrable; alors le lemme 21 de [10] nous assure que la suite (D_n) est $*$-convergente dans E. Si maintenant Y est une valeur d'adhérence de cette suite, nous avons les relations $\|Y\| = \|D(Y)\|$ et $\|Y\|_{E^a} = \|D(Y)\|_{E^a} = 1$, ce qui montre que $D^2(Y) = Y$. ■

Remarque. Lorsque $E = L^p$, $1 < p < \infty$, $D(X) = \operatorname{sgn}(X)|X|^{p-1}$, et visiblement si $p \neq 2$,

$$D^2(X) = X \Leftrightarrow D(X) = X \Leftrightarrow X = \operatorname{sgn}(X)/\|\operatorname{sgn}(X)\|.$$

Cette propriété est vérifiée par certains espaces d'Orlicz (cf. II). Nous sommes ainsi conduits à introduire la définition suivante:

Définition 10. Un espace de Köthe E n.c.o., lisse et normalisé ($\|1\| = 1$) est dit *D-concave* si:

(i) $D^2(X) = X \Leftrightarrow X = \operatorname{sgn}(X)/\|\operatorname{sgn}(X)\|_*$.
(ii) $E^* \subset E$, l'injection étant continue et la boule unité de E^* étant E-équiintégrable.

E est dit *D-convexe* si E^* est D-concave.

Théorème 11. *Soit E un espace de Köthe D-concave et soit $X \in E$; la suite des itérées $(D_n(X))$ de l'application de dualité converge p.s. fortement dans E vers* $\operatorname{sgn}(X)/\|\operatorname{sgn}(X)\|_*$.

Démonstration. Si Y est une valeur d'adhérence de la suite $(D_n(X))$, Y est un signe normalisé. Or $\operatorname{sgn}(D_n(X)) = \operatorname{sgn}(X)$, donc $\operatorname{sgn}(Y) = \operatorname{sgn}(X)$ et, par conséquent, on a unicité de la limite; la convergence p.s. se montre à l'aide du lemme 6. ■

Remarque. Dans la 2ème partie nous étudions de façon plus précise les espaces d'Orlicz D-concaves.

5. Théorème d'Ando dans les espaces de Köthe. Le théorème d'Ando [2] caractérise les opérateurs espérances conditionnelles dans les espaces L^p, $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$:

"Toute projection-contraction de L^p, $1 \leqslant p < \infty$, $p \neq 2$, laissant les constantes invariantes est une espérance conditionnelle".

Nous allons étendre ce théorème aux espaces de Köthe D-concaves ou D-convexes. Commençons par un résultat préliminaire.

Soit E un espace de Köthe et soit T une contraction de E; nous notons T^* son adjoint et nous désignons par $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}^*$) les invariants de T (resp. de T^*).

Lemme 12. *Si T laisse les constantes invariantes et si $X \in \mathfrak{J} \Rightarrow \operatorname{sgn}(X) \in \mathfrak{J}$, alors $\mathfrak{J}$ est réticulé. De plus, si E est n.c.o., $\mathfrak{J} = E(\mathscr{B})$ où $E(\mathscr{B})$ désigne le sous-espace de E formé des v.a. mesurables par rapport à la sous-tribu $\mathscr{B}$ des invariants de T.*

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{J}$; il existe une suite (a_n) décroissant vers 0 telle que $P(X = a_n) = 0$ pour tout n. Posons $S_n = \operatorname{sgn}(X - a_n)$; alors

$$1 + S_n = 2 \cdot 1_{(X > a_n)} \in \mathfrak{J}.$$

Ainsi $1_{(X>0)} \in \mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J}$ est réticulé. Soit $\mathscr{B} = \{I \in \mathscr{A}: 1_I \in \mathfrak{J}\}$; on conclut comme dans [9], p. 208. ■

Théorème 13. *Soit E un espace de Köthe D-concave tel que la norme de E^* soit deux fois différentiable en 1. Soit T une projection-contraction vérifiant $T(1) = 1$. Alors T est une espérance conditionnelle.*

Démonstration. La relation $\langle T(X), D(X) \rangle = \langle X, T^*(D(X)) \rangle$ et l'unicité de D montrent que si $X \in \mathfrak{J}$, alors $D(X) = \mathfrak{J}^*$.

Soit $Y \in \mathfrak{J}^*$; $(D^*(1+\varepsilon Y) - 1)/\varepsilon$ appartient à $\mathfrak{J}$ et converge, quand ε tend vers 0, dans E, vers $k(Y - E(Y))$ (proposition 8). Ainsi $\mathfrak{J}^* \subseteq \mathfrak{J}$ et si $X \in \mathfrak{J}$, alors $D(X) \in \mathfrak{J}$. En itérant, $D_n(X) \in \mathfrak{J}$ pour tout n dès que $X \in \mathfrak{J}$. Il en résulte que $\operatorname{sgn}(X) \in \mathfrak{J}$ (théorème 11). Le lemme 12 assure que $\mathfrak{J}$ est réticulé et que $\mathfrak{J} = E(\mathscr{B})$.

Soit $B \in \mathscr{B}$; la relation $E(T(X)1_B) = E(X1_B)$ montre que $T(X) = E^{\mathscr{B}}(X)$, ce qui achève notre preuve. ■

En appliquant ce théorème à T^* on obtient:

Corollaire. *Si E est D-convexe et si sa norme est deux fois différentiable en 1, toute projection-contraction T telle que $T(1) = 1$ est une espérance conditionnelle.*

Nous donnons en II une version plus complète de ce théorème pour les espaces d'Orlicz.

6. Restriction à L^∞ des applications de dualité. Les exemples classiques, espaces L^p et espaces d'Orlicz, montrent que si $X \in L^\infty \cap S(E)$, alors $D(X) \in L^\infty \cap S(E')$; ou, plus simplement, en considérant un prolongement de D, D applique L^∞ dans L^∞.

Nous ne savons pas caractériser géométriquement les espaces E vérifiant cette propriété. Néanmoins, nous avons:

Proposition 14. *Soit E un espace de Köthe r.i., lisse et faiblement séquentiellement complet. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sup\{\|D(X/\|X\|)\|_\infty : \|X\|_\infty \leqslant 1,\ P(X = \|X\|_\infty) \geqslant \varepsilon\} < +\infty.$$

Démonstration. (1) Soit $X \in S(L_+^\infty)$ et $P(X=1) \geqslant \varepsilon$; montrons que

$$D(X/\|X\|) \in L^\infty.$$

En effet, $D(X/\|X\|) = f(X/\|X\|)$ et $\|D(X/\|X\|)\|_\infty \leqslant f(\|X\|_\infty/\|X\|) < \infty$.

(2) Procédons par négation. Soit $(X_n) \subset S(L_+^\infty)$ une suite telle que $P(X_n = 1) \geqslant \varepsilon$ et

$$\|D(X_n/\|X_n\|)\|_\infty = f_n(\|X_n\|_\infty/\|X_n\|) \geqslant n.$$

Notons X_n^* la réarrangée décroissante de X_n et $a_n = 1/\|X_n^*\|_\infty = 1/\|X_n\|_\infty$. Comme $X_n^* \geqslant 1_{[0,\varepsilon]}$, il en résulte que $1 \leqslant a_n \leqslant \|1_{[0,\varepsilon]}\|$. De plus, le lemme 6 montre que la suite X_n^* est $*$-convergente p.p. et comme elle est E-équiintégrable, le lemme 21 de [10] montre qu'elle est, en outre, fortement compacte dans E.

Ainsi, pour une sous-suite convenable que nous indexerons par n, pour alléger les notations, nous pouvons supposer que $a_n X_n^*$ converge dans E et p.p. vers aX, avec

$$a = 1/\|X\|_\infty = \lim a_n, \qquad P(X = 1) \geqslant \varepsilon.$$

De la même manière on peut supposer la convergence p.p. et dans E^* de la suite $(D(X_n/\|X_n\|))$ vers $D(X/\|X\|) = f(X/\|X\|)$. Par conséquent $\|D(a_n X_n)\|_\infty$ converge vers $\|D(aX)\|_\infty$, ce qui est contradictoire avec (1). ■

PROPOSITION 15. *Pour un espace de Köthe, E, r.i., n.c.o., lisse, on a l'équivalence entre*:

(i) $D(X) \in L^\infty$ *pour tout* $X \in L^\infty \cap S(E)$.

(ii) $\forall X \in S(E_+)$, *si* $D(X) = f(X)$, f *est prolongeable en une fonction croissante de* R_+ *dans* R_+.

Si l'une de ces conditions est verifiée, alors on peut choisir, pour $X \in L^\infty \cap S(E)$ *et* $P(X = \|X\|_\infty) > 0$, *un prolongement* $\bar{f}$ *de* f *tel que* $\|\bar{f}\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty = 2f(\|X\|_\infty)$, *et de plus, on a l'équivalence entre*:

(a) $X_n \to X$ *dans* $S(E)$ *et* $\sup_n \|X_n\|_\infty \leqslant +\infty \Rightarrow \sup_n \bar{f}_n(x) < +\infty$ $\forall x \in R_+$.

(b) D *est* L^∞-*bornée, i.e.* $\sup_n \{\|D_n(X_n)\|_\infty : \|X_n\|_\infty \leqslant k\} < +\infty$.

Démonstration. (ii) $\Rightarrow$ (i). Pour $X \in L^\infty \cap S(E_+)$ on a $\|D(X)\|_\infty \leqslant f(\|X\|_\infty) < \infty$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si $X \in L^\infty \cap S(E_+)$, alors $\|D(X) = f(X)\|_\infty < K$, on peut donc prolonger f convenablement à tout R_+. Si maintenant $X \in S(E_+)$ et $\|X\|_\infty = \infty$, les relations $D(X) = f(X)$, f croissante, et $P(X > n) > 0$ pour tout n, montrent que f est finie sur tout R_+.

Pour la seconde partie le choix d'un "bon" prolongement est évident.

(b) $\Rightarrow$ (a). Pour la suite X_n considérée, nous avons

$$\|\bar{f}_n\|_\infty \leqslant 2\|f_n(X_n)\|_\infty \leqslant 2K;$$

c'est (a).

(a) $\Rightarrow$ (b). Soit $\bar{f}$ le prolongement de f; alors $|f(X)| \leqslant \bar{f}(\|X\|_\infty)$, donc $\|f(X)\|_\infty \leqslant \bar{f}(\|X\|_\infty)$ et, pour une suite convenable,

$$\|f_n(X_n)\|_\infty \leqslant \bar{f}_n(k) \leqslant \sup \bar{f}_n(k) < +\infty;$$

c'est (b). ■

7. Applications de dualité et approximation

a. Nous avons montré dans [9] que si E est un espace de Köthe de v.a. sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ vérifiant l'une des deux propriétés suivantes:

(i) E possède la propriété de Fatou et ses parties bornées sont L^1-équiintégrables;

(ii) E est faiblement séquentiellement complet,

alors pour toute sous-tribu $\mathscr{B}$ et tout $X \in E$, il existe un meilleur approximant, $p_{\mathscr{B}}(X) \in E(\mathscr{B}) = \{Y \in E:\ Y\ \mathscr{B}\text{-mesurable}\}$, tel que

$$\|X - p_{\mathscr{B}}(X)\| \leqslant \|X - Y\|, \qquad Y \in E(\mathscr{B}).$$

Nous allons compléter cette étude pour des espaces de Köthe, f.s.c., r.i., lisses et tels que si $D(X) = f(X)$, f est strictement croissante (voir la remarque suivant la proposition 7), l'ensemble de ces hypothèses étant, parfois, surabondant.

La principale méthode de démonstration de cette partie est basée sur l'utilisation des médianes conditionnelles, introduites en [9], que nous rappelons brièvement.

Soit E un espace de Köthe vérifiant les conditions précédentes et soit $X \in E$. Si f est une fonction impaire strictement croissante de R dans R et si $\mathscr{B}$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$, on appelle *f-médiane conditionnelle de X suivant* $\mathscr{B}$ l'unique v.a. $\mathscr{B}$-mesurable Y telle que $E^{\mathscr{B}}(f(X-Y)) = 0$ P-p.s.

Si maintenant $p_{\mathscr{B}}(X)$ désigne le meilleur approximant de X suivant $\mathscr{B}$ on a pour tout $Y \in E$

$$\|X - p_{\mathscr{B}}(X) + \varepsilon Y\| = \|X - p_{\mathscr{B}}(X)\| + \varepsilon \langle D(X - p_{\mathscr{B}}(X)),\ Y\rangle + o(\varepsilon).$$

Si $Y \in E(\mathscr{B})$ la fonction $\varepsilon \to \|X - p_{\mathscr{B}}(X) + \varepsilon Y\|$ est minimum pour $\varepsilon = 0$, et donc sa dérivée $\langle D(X - p_{\mathscr{B}}(X)), Y\rangle = 0$, c'est-à-dire $E^{\mathscr{B}}(D(X - p_{\mathscr{B}}(X))) = 0$.

Sous les hypothèses de ce paragraphe, lorsque $\|X - p_{\mathscr{B}}(X)\| = 1$, $D(X - p_{\mathscr{B}}(X)) = f(X - p_{\mathscr{B}}(X))$ où f est une fonction strictement croissante ne dépendant que de la loi de $X - p_{\mathscr{B}}(X)$ (cf. I.2). Ainsi $p_{\mathscr{B}}(X)$ est la f-médiane conditionnelle de X suivant $\mathscr{B}$. On a:

PROPOSITION 16. *Soient $X \in E$ et $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Alors*

$$\|p_{\mathscr{B}}(X)\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty.$$

Démonstration. Il suffit d'établir la relation pour X positive. Or la f-médiane conditionnelle est une fonction croissante et elle vaut 1 en 1 [9]; la preuve s'en déduit directement. ∎

b. Lorsque $(\mathscr{B}_n)$ est une filtration croissante, on ne sait pas, en général, si la suite de meilleurs approximants converge p.s. Pour obtenir la convergence p.s. pour une v.a. de L^∞ nous sommes amenés à faire des conditions restrictives sur l'espace.

Nous supposerons que l'application de dualité D est bornée sur L^∞ (voir proposition 15) et, de plus, si X_n converge vers X dans $S(E)$, alors la suite de fonctions (f_n) définies par $f_n(X_n) = D(X_n)$ converge simplement vers f, $f(X) = D(X)$.

PROPOSITION 17. *Si E vérifie les conditions précédentes pour tout $X \in L^\infty$ et pour toute filtration $(\mathscr{B}_n)$ croissant vers $\mathscr{B}$ telle que X ne soit pas $\mathscr{B}$-mesurable, alors la suite des meilleurs approximants, $p_{\mathscr{B}_n}(X)$, converge p.s. et dans E vers $p_{\mathscr{B}}(X)$.*

Démonstration. Soit $1/a_n = \|X - p_{\mathscr{B}_n}(X)\|$; par hypothèse $1/a_n$ décroît vers $1/a$, $a > 0$. La proposition 14 nous assure que la suite $D[a_n(X - p_{\mathscr{B}_n}(X))] = f_n[a_n(X - p_{\mathscr{B}_n}(X))]$ est bornée dans L^∞. Les hypothèses sur l'espace montrent, en outre, que la suite $(f_n(X))$ est bornée dans L^∞ et qu'elle converge simplement vers $f(X)$.

Par suite, $E^{\mathscr{B}_n} f_n(X-q)$, $q \in Q$, converge p.s. et dans L^1 et, par les mêmes arguments que dans [9], théorème 5, on en déduit la convergence p.s. des f_n-médianes conditionnelles de $a_n X$ suivant les tribus $\mathscr{B}_n$; donc celle des $p_{\mathscr{B}_n}(X)$. La convergence forte est classique [9]. ∎

8. Applications de dualité et supports. Précisons maintenant les rapports entre le support de X et ceux des éléments de $\mathscr{D}_X$.

On appelle *support* d'une v.a.r. X l'ensemble $\{X \neq 0\}$. Pour $u \in E^*$, notons $u1_A$ l'élément de E^* défini par $\langle u1_A, X\rangle = \langle u, X1_A\rangle$.

L'ensemble des $A \in \mathscr{A}$ tels que $u1_A = 0$ est stable par réunion, ce qui permet de définir le *support* de u comme la plus petite partie $S \in \mathscr{A} - P(S)$ minimale — telle que si $A \in S^c$, alors $u1_A = 0$.

On remarque que si $X \in S(E)$ et $D \in \mathscr{D}_X$, si S (resp. S') est le support de X (resp. de D), on a $D1_S \in \mathscr{D}_X$ et $D \in \mathscr{D}_{X1_{S'}}$.

a. Le théorème suivant caractérise géométriquement les espaces de Köthe pour lesquels $\operatorname{supp}(D) \subseteq \operatorname{supp}(X)$, pour tout $X \in S(E)$ et tout $D \in \mathscr{D}_X$.

THÉORÈME 18. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\forall X, Y \in E_+$ *tels que* $XY = 0$, $\|X\| = 1 < \|Y\|$, $\exists \alpha \in]0, 1[$ *tel que* $\|\alpha X + (1-\alpha) Y\| = 0$.

(ii) $\forall X \in S(E)$ $\forall D \in \mathscr{D}_X$, $\operatorname{supp}(D) \subseteq \operatorname{supp}(X)$.

(ii)* *Même assertion en remplaçant $S(E)$ par $S(E_+)$.*

(iii) *E est orthogonalement lisse (ou orthogonalement Gateaux différentiable), c'est-à-dire $\forall X, Y \in E$ tels que $XY = 0$, si $Z = aX + bY$, alors $(\|X + \alpha Z\| - \|X\|)/\alpha$ converge quand α tend vers* 0.

(iii*) *Même assertion en remplaçant "converge" par "converge uniformément", c'est-à-dire $\forall k$ $\forall \varepsilon$ $\exists \alpha(\varepsilon, k)$ tel que si $\alpha \leqslant \alpha(\varepsilon, k)$, alors*

$$\left|\frac{\|X + \alpha Z\| - \|X\|}{\alpha} - a\|X\|\right| < \varepsilon \quad \textit{pour } \|Z = aX + bY\| \leqslant k.$$

Démonstration. Vérifions tout d'abord que $\operatorname{supp}(D) = \operatorname{supp}(|D|)$. Si X est une v.a.r. étagée dont le support est inclu dans $(\operatorname{supp}(D))^c$, alors $\langle D, X\rangle = 0$ et, par conséquent, pour tout $X \in E$ tel que $\operatorname{supp}(X) \subseteq (\operatorname{supp}(D))^c$, $\langle D, X\rangle = 0$. De là on déduit $\langle |D|, X\rangle = 0$ et $\operatorname{supp}(|D|) \subseteq \operatorname{supp}(D)$. L'inclusion inverse est triviale. L'équivalence entre (ii) et (ii*) en résulte.

(i) ⇒ (ii). Supposons qu'il existe $A \subseteq (\operatorname{supp}(X) = S)^c$ tel que $\langle D, 1_A\rangle > 0$. Soit $1 > a > 0$; alors $D \geqslant D1_S + a(D1_A) = D'$. Posons

$$Y = 1_A \frac{1}{a\langle D, 1_A\rangle};$$

si a est suffisamment petit, alors $\|Y\| > 1$. On peut choisir α de sorte que $\|Z = \alpha X + (1-\alpha) Y\| = 1$. En écrivant $Z = \alpha X + \beta 1_A$, on obtient

$$1 \geqslant \langle D, Z\rangle \geqslant \langle D', Z\rangle = \alpha + a\beta \langle D1_A, 1_A\rangle = 1.$$

Or $\langle D, Z\rangle = \alpha + \beta\langle D, 1_A\rangle$, d'où $\langle D, 1_A\rangle = a\langle D, 1_A\rangle$, ce qui est contradictoire.

(ii*) ⇒ (iii). Remarquons que si $X_n \to X$ dans $S(E)$, alors toute valeur d'adhérence faible, D, de la suite (D_n), où $D_n \in \mathscr{D}_{X_n}$, appartient à $\mathscr{D}_X$. Soient $X, Y \in S(E)$ tels que $XY = 0$. Posons $Z = (aX + bY)/\|aX + bY\|$. L'inégalité (1), p. 21 de [12], assure, pour $\lambda > 0$, que

$$\langle D(X), Z\rangle \leqslant \frac{\|X + \lambda Z\| - 1}{\lambda} \leqslant \langle D((X + \lambda Z)/\|X + \lambda Z\|), Z\rangle.$$

La remarque précédente montre que le terme de droite de l'inégalité tend vers $\langle D, Z\rangle$ lorsque $\lambda \to 0$.

Or, avec (ii), $\langle D, Z\rangle = a/\|aX + bY\| = \langle D(X), Z\rangle$: le terme médian converge. Le cas $\lambda < 0$ s'obtient de même, en changeant Z en $-Z$.

(iii) ⇒ (iii*). Nous pouvons, pour simplifier, supposer que X et Y appartiennent à $S(E)$.

L'orthogonalité de X et de Y implique $|X + Y| = |X| + |Y|$. Par conséquent, si $Z(a, b) = aX+bY$, $\|X+Z(a, b)\| = \|X+Z(a, -b)\|$, donc

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \alpha^{-1}\left(\|X+Z(a, b)\|-1\right) = \langle D(X), aX+bY\rangle$$

est une fonction linéaire en a et b et paire en b, elle est donc indépendante de b. Il est alors aisé de voir, en prenant $b = 0$, que cette limite vaut a.

Nous sommes amenés à montrer que $\alpha^{-1}\left(\|X+Z(a, b)\|-1\right)$ converge vers a uniformément si $\|Z(a, b)\| \leqslant k$. Nous pouvons prendre $k = 1$.

L'inégalité $\|Z = aX+bY\| \leqslant 1$ implique $|a| \vee |b| \leqslant 1$. De méme $|1+\alpha a| \leqslant \|X(1+\alpha a)+\alpha bY\|$ conduit à

$$\frac{|1+\alpha a|-1}{\alpha}-a \leqslant \frac{\|X+\alpha Z(a, b)\|-1}{\alpha}-a.$$

Le terme de gauche est nul si $|\alpha| \leqslant 1$. Le terme de droite est inférieur à $(\|X+\alpha Z(a, 1)\|-1)/\alpha-a$, qui est lui-même inférieur à

$$\left|\frac{\|X(1+\alpha a)+\alpha Y\|-1}{\alpha a}-a\right|;$$

cette dernière expression est $\leqslant \varepsilon$ dès que α est assez petit, ce qui prouve l'implication.

(iii*) $\Rightarrow$ (i). Soient X, $Y_0 \in S(E_+)$ tels que $XY_0 = 0$. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, il te $\beta \in [1-\alpha, 1]$ tel que $\|\alpha Y_0+\beta X\| = 1$. Si nous posons

$$Z_\alpha = \alpha Y_0-\frac{1-\beta}{\alpha}X,$$

alors $\|Z_\alpha\| \leqslant 2$. Avec l'hypothèse (iii*),

$$\left|\frac{\|X+\alpha Z_\alpha\|-1}{\alpha}-\langle D(X), Z_\alpha\rangle\right| \to 0 \quad \text{quand } \alpha \to 0.$$

Donc $\langle D(X), Z_\alpha\rangle \to 0$. Or $\langle D(X), Z_\alpha\rangle = \langle D(X), \alpha Y_0\rangle-(1-\beta)/\alpha$ et, par conséquent, $\beta'(0_+) = 0$.

Pour achever notre preuve, prenons $Y_0 = Y/\|Y\|$, $\|Y\| > 1$, et supposons que pour tout $\eta \in]0, 1[$, on ait $\|\eta Y+(1-\eta)X\| > 1$. En posant $\alpha = \eta\|Y\|$, il vient

$$\left\|\alpha Y_0+(1-\alpha/\|Y\|)X\right\| > 1,$$

et si α est assez petit, on obtient $1-\alpha/\|Y\| > \beta$, ce qui est contradictoire avec $\beta'(0_+) = 0$. ∎

b. *Lien avec la stricte monotonie.* Rappelons quelques définitions relatives à la stricte monotonie des espaces de Köthe, notion liant la géométrie et l'ordre [6], [8].

Définitions 19. Un espace de Köthe $\mathbf{E}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est dit:

– *Strictement monotone* – *s.m.* – si pour Y et $X \in \mathbf{E}_+$,

$$\|X+Y\| = \|X\| \quad \text{implique} \quad Y = 0.$$

– *Strictement monotone pour les constantes* – *s.m.c* – si pour $X \in \mathbf{E}_+$, et $a \in \mathbf{R}_+$,

$$\|X+a\| = \|X\| \quad \text{implique} \quad a = 0.$$

– *Strictement monotone orthogonal* – *s.m.o.* – si pour $X \in \mathbf{E}_+$, $a \in \mathbf{R}_+$ et $A \subseteq (\operatorname{supp}(X))^c$,

$$\|X+a1_A\| = \|X\| \quad \text{implique} \quad a1_A = 0.$$

– *Strictement monotone de même support* – *s.m.s.* – si pour $X \in \mathbf{E}_+$, $a \in \mathbf{R}_+$ et $A \subseteq \operatorname{supp}(X)$,

$$\|X+a1_A\| = \|X\| \quad \text{implique} \quad a1_A = 0.$$

Ces notions interviennent naturellement dans l'étude des isométries des espaces de Köthe.

Proposition 20. *Si $\mathbf{L}^\infty$ est dense dans $\mathbf{E}$, alors $\mathbf{E}$ est s.m.c.*

Démonstration. Soient $X \in S(\mathbf{E}_+)$ et $a \in \mathbf{R}_+$ tels que $\|X+a\| = \|X\|$. Prenons $D \in \mathscr{D}_X$; la remarque précédant la définition 1 nous autorise à choisir $D \geqslant 0$. On a $\langle D, X\rangle = \langle D, X+a\rangle$, donc $\langle D, a\rangle = 0$. Si $a > 0$, alors pour $\varphi \in \mathbf{L}^\infty$, $\langle D, \varphi\rangle = 0$ et, par densité, $D = 0$, ce qui contredit $\langle D, X\rangle = \|X\| = 1$. ∎

Proposition 21. *Si $\mathbf{E}$ est s.m.o., alors, pour tout $X \in S(\mathbf{E})$ et tout $D \in \mathscr{D}_X$,*

$$\operatorname{supp}(X) \subseteq \operatorname{supp}(D).$$

Démonstration. On peut supposer $D \geqslant 0$; notons $S = \operatorname{supp}(X)$ et $S' = \operatorname{supp}(D)$. Par négation, il existerait $A \subseteq S$ avec $P(A \cap S') = 0$ et $P(A) > 0$. Donc $D1_{A^c} = D$ et $\langle D, 1_{A^c}X\rangle = 1 = \langle D, X\rangle$. Par conséquent

$$\|X1_{A^c}\| = \|X\| = \|X1_A+X1_{A^c}\|,$$

et de là $X1_A = 0$: contradiction. ∎

Citons encore une propriété évidente:

Proposition 22. *Si $\mathbf{E}^*$ est s.m., $\mathbf{E}$ est orthogonalement lisse.*

Nous avons rassemblé à la fin de la partie II des propriétés plus fines sur la stricte monotonie des espaces d'Orlicz.

II. Cas des espaces d'Orlicz

1. Rappels et propriétés. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité non atomique et, soit U une *fonction d'Orlicz*, c'est-à-dire une fonction convexe croissante définie sur $[0, \infty[$ vérifiant $U(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} U(x) = \infty$.

Notons u la version continue à gauche de la densité de U, $U(x) = \int_0^x u(t)\,dt$. Pour simplifier nous supposerons $\lim_{x\to\infty} u(x) = \infty$. Nous notons v l'inverse continue à gauche de u et $V(x) = \int_0^x v(t)\,dt$ la conjuguée de U. Enfin, $\bar{u}$ et $\bar{v}$ désigneront les versions continues à droite de u et de v.

Soit $L_U = \{X: \exists \varrho,\ E[U(\varrho|X|)] < +\infty\}$ l'*espace d'Orlicz* associé à U et soit $H_U = \{X: E[U(\varrho|X|)] < +\infty$, pour tout $\varrho > 0\}$.

Sur L_U on définit la *norme de Luxemburg*:

$$\|X\|_{(U)} = \sup\{\varrho: E[U(\varrho|X|)] \leqslant 1\}$$

et la *norme d'Orlicz*:

$$\|X\|_U = \sup\{E(XY): E[V(|Y|)] \leqslant 1\}.$$

L'espace L_U muni de la norme de Luxemburg est un espace de Banach, noté $L^{(U)}$. Muni de la norme d'Orlicz, L_U est aussi un espace de Banach, noté L^U.

Sur L_U les deux normes sont équivalentes [18], plus précisement:

$$\|X\|_{(U)} \leqslant \|X\|_U \leqslant 2\|X\|_{(U)}.$$

Rappelons les principales définitions liées à la croissance de U.

U est *modérée* ou satisfait la *condition* Δ_2 si

$$\exists K \text{ et } x_0 \geqslant 0 \text{ tels que } U(2x) \leqslant KU(x) \text{ pour } x \geqslant x_0.$$

U est dite *comodérée* [6] si

$\exists x_0 \geqslant 0$ et un couple (a, q) de nombres > 1 tels que

$$\frac{u(ax)}{u(x)} \geqslant q \quad \text{pour } x \geqslant x_0.$$

Rappelons les propriétés classiques suivantes [18], [6], [19]:

1) Les espaces d'Orlicz possèdent la propriété de Fatou.
2) Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) U est modérée.
(ii) Les fonctions étagées sont denses dans L^U.
(iii) L^U est n.c.o.
(iv) L^U est faiblement séquentiellement complet.
(v) Le dual de $L^{(U)}$ est L^V.
(vi) $\forall X$, $E[U(X/\|X\|_{(U)})] = 1$.

(vii) Pour toute suite $X_n \geqslant 0$,

$$\|X_n\|_{(U)} \text{ décroît vers } 1 \Leftrightarrow E[U(X_n)] \text{ décroît vers } 1.$$

(viii) Pour tout couple $0 < a < b < +\infty$ il existe $0 < a^* < b^* < +\infty$ tels que

$$a \leqslant \|X\|_{(U)} \leqslant b \quad \text{implique} \quad a^* \leqslant E[U(X)] \leqslant b^*.$$

3) U et V sont modérées $\Leftrightarrow$ L^U est réflexif.
4) u est continue $\Leftrightarrow$ L^V est strictement convexe [20].
Si u est continue et U comodérée, alors $L^{(U)}$ est lisse.
Si u est strictement croissante, alors

$$L^{(U)} \text{ est strictement convexe} \Leftrightarrow U \text{ est modérée } ([16], \text{ th. } 2.2).$$

Si v est strictement croissante et V modérée, alors L^U est lisse.
5) On a toujours $L_U \subset L_{V\circ u}$, $L_{xu(x)} = L_U$ et

$$L_U = L_{V\circ u} \Leftrightarrow U \text{ est comodérée [6].}$$

6) Si U_1 et U_2 sont deux fonctions d'Orlicz, on a [18], [6]

$$L_{U_1} \subset L_{U_2} \Leftrightarrow \exists x_0, k \geqslant 0 \text{ tels que, pour } x \geqslant x_0,\ U_1(x) \leqslant U_2(kx);$$

on écrit $U_1 \succ U_2$.
On dit que U_1 et U_2 sont *équivalentes* si $U_1 \succ U_2$ et $U_2 \succ U_1$.

2. Applications de dualité dans les espaces d'Orlicz. Soit U une fonction d'Orlicz de densité continue à gauche u et de conjuguée V. Si X est une v.a. positive telle que $E[U(X)] = 1$, alors $u(X) \in L^V$ et l'inégalité de Young montre que

$$\|u(X)\| = \sup\{E[u(X)Y]: E[U(Y)] \leqslant 1\} \leqslant 1 + E[V\circ u(X)],$$

d'où $\|u(X)\| = E[Xu(X)]$. On en déduit:

Proposition 23. (a) *Si U est modérée, l'application*

$$D_L(X) = \frac{u(X/\|X\|_{(U)})}{\|u(X/\|X\|_{(U)})\|_V}, \quad \textit{pour tout } X \in L^{(U)},\ X \neq 0,$$

est une application de dualité de $L^{(U)}$.

(b) *Si u est continue et si U est modérée, à tout $X \in L^U$, $X \neq 0$, on peut associer un nombre k_X vérifiant $E[V\circ u(X/k_X)] = 1$ et l'application $D_O(X) = u(X/k_X)$ est une application de dualité de L^U.*

Démonstration. (a) Si U est modérée, $\|X\|_{(U)} = 1 \Leftrightarrow E[U(|X|)] = 1$; on a donc $E[Xu(X)/\|u(X)\|_V] = 1$, d'où le résultat.

(b) Si U est modérée, $V \circ u$ l'est aussi [6], l'application $k \to E[V \circ u(X/k)]$ est donc définie sur $]0, +\infty[$; comme u est continue, elle définit un k_X vérifiant $E[V \circ u(X/k_X)] = 1$. Comme $v \circ u(x) = x$,

$$E\left[\frac{X}{k_X} u\left(\frac{X}{k_X}\right)\right] = E\left[v \circ u\left(\frac{X}{k_X}\right) \cdot u\left(\frac{X}{k_X}\right)\right] = \left\|\frac{X}{k_X}\right\|_U,$$

ce qui montre (b). ∎

Remarque. Sous les hypothèses de la proposition 23, les applications de dualité ne sont pas uniques; il faudrait pour cela que les espaces sous-jacents soient lisses. Aussi pour ne pas trop alourdir la rédaction nous supposerons dorénavant que u est continue et strictement croissante et que U est modérée et comodérée; les espaces L^U et $L^{(U)}$ sont alors réflexifs et lisses ainsi que leurs duaux respectifs $L^{(V)}$ et L^V. Les applications D_O et D_L coïncident avec les dérivées des normes d'Orlicz et de Luxemburg ([18], p. 185–193).

a. *D-concavité des espaces d'Orlicz*. Sous les hypothèses précédentes, on a:

Proposition 24 (Théorème de de La Vallée Poussin). *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\lim_{x\to\infty} u(x)/x = 0$.

(ii) *L^V se plonge strictement dans L^U, l'injection canonique est continue et transforme les parties bornées de L^V en parties L^U-équiintégrables.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que

$$\lim_{x\to\infty} u(x)/x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} u(x)/v(x) = 0$$

et, comme U et V sont modérées, les inégalités de [6] montrent que

$$\frac{v(x)}{u(x)} \to \infty \Leftrightarrow \frac{V(x)}{U(x)} \to \infty \Leftrightarrow \frac{U \circ v(x)}{U(x)} \to \infty.$$

U étant une bijection de $\boldsymbol{R}_+$ dans $\boldsymbol{R}_+$, il existe une unique fonction croissante et continue Φ vérifiant $\Phi(U(x)) = U(v(x))$ et on a $\Phi(x)/x \to \infty$. De plus, les mêmes inégalités montrent que

$$E[\Phi(U(X))] \leqslant E[V(2X)] \leqslant C\|X\|_V$$

pour une constante C convenable. Le critère de de La Vallée Poussin permet alors de conclure.

Inversement, si les parties bornées de L^V sont L^U-équiintégrables, d'après la réciproque du critère de de La Vallée Poussin il existe une fonction convexe Ψ telle que $\Psi(x)/x \to \infty$ et $E[\Psi(U(X))] \leqslant C\|X\|_V$. V étant modérée, on en déduit l'existence d'une constante C' telle que

$$E[\Psi \circ U(X)] \leqslant C' E[U \circ v(X)] \quad ([18], \text{ th. } 13.1, \text{ ou } [6]),$$

d'où il existe x_0 tel que si $x \geqslant x_0$, on a $U \circ v(x) \geqslant C'' \Psi \circ U(x)$ pour une nouvelle constante C''. Il en résulte que

$$\lim_{x\to\infty} U \circ v(x)/U(x) = \infty, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{x\to\infty} u(x)/x = 0. \ ∎$$

Remarque. On a aussi

$$\lim_{x\to\infty} u(x)/x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} U(x)/x^2 = 0,$$

ce qui implique que L^2 est strictement inclu dans L^U et que ses parties bornées y sont équiintégrables. On a donc sous les hypothèses précédentes les inclusions strictes suivantes: $L^V \subset L^2 \subset L^U$.

Parmi les espaces d'Orlicz qui se plongent dans leurs duaux ou dans lesquels leurs duaux se plongent, $L^U \subset L^V$ ou $L^V \subset L^U$, nous allons maintenant caractériser ceux dont les applications de dualité ne laissent invariants que les signes normalisés.

Lemme 25. A. *Soit u une fonction nulle en 0 strictement croissante et continue sur $\boldsymbol{R}_+$. Les énoncés suivants sont équivalents* [11]:

(i) *$u(x)/x$ est strictement décroissante sur $]0, \infty[$.*

(ii) *Pour tout $\alpha > 0$ l'équation $u(\alpha x) = x$ a au plus une solution > 0.*

(iii) *Pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $x > 0$, $u(\alpha x) < \alpha x$.*

B. *Si U est une fonction d'Orlicz dont la densité vérifie sur $\boldsymbol{R}_+$ l'une des propriétés précédentes et si D désigne D_O ou D_L, et $\|\cdot\|$ désigne respectivement $\|\cdot\|_U$ ou $\|\cdot\|_{(U)}$, les énoncés suivants sont équivalents:*

(i) $X = \operatorname{sgn}(X)/\|\operatorname{sgn}(X)\|$.

(ii) $D(X) = X$.

(iii) $D^2(X) = X$.

Démonstration. La partie A est immédiate; pour démontrer la partie B, il suffit de remarquer que la classe $\mathscr{S}$ des applications u vérifiant les propriétés de A est stable par composition avec les homothéties positives: si $u \in \mathscr{S}$, alors $x \to u(\alpha x) \in \mathscr{S}$ pour tout $\alpha > 0$, et que $\mathscr{S}$ est stable par composition: si $u_1, u_2 \in \mathscr{S}$, $u_1 \circ u_2 \in \mathscr{S}$. ∎

Des deux propositions précédentes on déduit:

Théorème 26. *Si u est une bijection strictement croissante de $[0, \infty[$ sur $[0, \infty[$ telle que $x \to u(x)/x$ décroisse strictement sur $]0, \infty[$ et tende vers 0 à l'infini, alors, si $U(1) = 1$ (resp. $V(1) = 1$), $L^{(U)}$ est D-concave (resp. L^U est D-concave).*

b. *Différentiabilité des applications de dualité.* Nous examinons maintenant la différentiabilité en 1 des applications de dualité D_O et D_L. Comme précédemment, u désigne une fonction impaire, continue, strictement croissante, modérée et comodérée, d'inverse v. U et V sont les fonctions d'Orlicz associées à u et v. Nous avons:

PROPOSITION 27. *Si u est dérivable et convexe sur $\boldsymbol{R}_+$, les applications D_O et D_L sont différentiables dans L_U. En particulier:*

(i) *Si $V(1) = 1$, alors, pour tout $X \in \boldsymbol{L}^U$,*

$$\frac{D_O(1+\varepsilon X)-1}{\varepsilon} \to \frac{v(1)}{v'(1)}(X-E(X)) \quad \text{p.s. et dans } \boldsymbol{L}^V \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

(ii) *Si $U(1) = 1$, alors, pour tout $X \in \boldsymbol{L}^U$,*

$$\frac{D_L(1+\varepsilon X)-1}{\varepsilon} \to \frac{u'(1)}{u(1)}(X-E(X)) \quad \text{p.s. et dans } \boldsymbol{L}^V \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

Démonstration. (i) Si $V(1) = 1$, $\|1\|_U = \|1\|_{(V)} = 1$ et $D_O(1) = 1$. Soient $X \in \boldsymbol{L}^U$ et $0 < \varepsilon < 1$; on a

$$D(1+\varepsilon X) = u\left(\frac{1+\varepsilon X}{k_{1+\varepsilon X}}\right) \quad \text{avec} \quad E\left[V \circ u\left(\frac{1+\varepsilon X}{k_{1+\varepsilon X}}\right)\right] = 1.$$

Comme u est convexe, dérivable et strictement croissante, $V \circ u$ est une fonction d'Orlicz de densité continue et strictement croissante $xu'(x)$. k_X est alors la norme de Luxemburg associée à $V \circ u$ dans l'espace d'Orlicz $\boldsymbol{L}^{V \circ u} = \boldsymbol{L}^U$. Pour cette norme $\boldsymbol{L}^U$ est lisse et on a

$$k_{1+\varepsilon X} = k_1 + \varepsilon k_1' E(X) + o(\varepsilon) \quad \text{avec } k_1 = k_1' = 1/v(1).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} D_O(1+\varepsilon X) &= u\big(v(1)[1+\varepsilon(X-E(X))]\big) + o(\varepsilon) \\ &= 1 + \varepsilon u'(v(1))[X-E(X)]\,v(1) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

où $o(\varepsilon)$ est une famille de v.a.r. vérifiant $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ p.s. quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent

$$\frac{D_O(1+\varepsilon X)-1}{\varepsilon} \to u'(v(1))[X-E(X)] = \frac{v(1)}{v'(1)}[X-E(X)] \quad \text{p.s. quand } \varepsilon \to 0.$$

Pour montrer la convergence forte dans $\boldsymbol{L}^V$ il suffit de majorer $|(D_O(1+\varepsilon X)-1)/\varepsilon|$ par une variable de $\boldsymbol{L}^V$ indépendante de ε. On a

$$\frac{D_O(1+\varepsilon X)-1}{\varepsilon} = v(1)(X-E(X))\,u'\big(v(1)+\varepsilon\theta v(1)[X-E(X)]\big)$$

avec $0 < \theta < 1$.

Comme u' est paire et croissante sur $\boldsymbol{R}_+$, il vient

$$\left|\frac{D_O(1+\varepsilon X)-1}{\varepsilon}\right| \leqslant \big(v(1)+v(1)|X-E(X)|\big)\cdot u'\big(v(1)+v(1)|X-E(X)|\big) = Y.$$

Enfin, comme $xu'(x)$ est la densité de $V \circ u$ et que $v(1)+v(1)|X-E(X)| \in \boldsymbol{L}^U$, il en résulte que $Y \in \boldsymbol{L}^V$, ce qui achève la démonstration de (i).

(ii) Si $U(1) = 1$, $\|1\|_{(U)} = \|1\|_V = 1$ et $D_L = 1$. Soient $X \in \boldsymbol{L}^U$ et $0 < \varepsilon < 1$. On a

$$\begin{aligned} D_L(1+\varepsilon X) &= u\left(\frac{1+\varepsilon X}{\|1+\varepsilon X\|_{(U)}}\right) \frac{1}{\left\|u\left(\frac{1+\varepsilon X}{\|1+\varepsilon X\|_{(U)}}\right)\right\|_V} \\ &= \frac{u\big(1+\varepsilon(X-E(X))\big)+o(\varepsilon)}{\big\|u\big(1+\varepsilon(X-E(X))\big)+o(\varepsilon)\big\|_V} \\ &= 1+\varepsilon\frac{u'(1)}{u(1)}(X-E(X))+o(\varepsilon) \quad \text{p.s.,} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{D_L(1+\varepsilon X)-1}{\varepsilon} \to \frac{u'(1)}{u(1)}(X-E(X)) \quad \text{p.s. quand } \varepsilon \to 0.$$

De plus,

$$\frac{D_L(1+\varepsilon X)-1}{\varepsilon} = (1+o(\varepsilon))\Big((X-E(X))\,u'\big[1+\theta\varepsilon(X-E(X))\big]+o(1)\Big)$$

pour $0 < \theta < 1$ et, par le même argument que précédemment, on en déduit que $(D_L(1+\varepsilon X)-1)/\varepsilon$ est dominée par une variable de $\boldsymbol{L}^V$ indépendante de ε.

On montre de la même façon que D_O et D_L sont dérivables en tout point $Y \in L_U$, ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

c. *Théorèmes d'Ando dans les espaces d'Orlicz.* Les résultats des paragraphes a et b et la théorème 13 de la première partie, appliqués à u et v, conduisent à l'énoncé suivant:

PROPOSITION 28. *Soit U une fonction d'Orlicz dont la densité possède sur $\boldsymbol{R}_+$ une dérivée strictement croissant vers l'infini ou strictement décroissant vers zéro. Toute projection-contraction de $\boldsymbol{L}^{(U)}$ ou de $\boldsymbol{L}^U$ telle que $T(1) = 1$ est une espérance conditionnelle.*

Remarque. Il n'est pas indispensable que la densité u de U soit strictement concave ou convexe pour que le théorème d'Ando soit valide dans $\boldsymbol{L}^U$: il suffit en fait que u soit "de type concave" ou "de type convexe", comme nous l'avons montré dans [7]. Cependant la procédure que nous utilisions alors ne peut être étendue aux espaces de Köthe. C'est pourquoi nous ne l'avons pas suivi ici. Il se trouve que la densité u met en dualité très simplement L^U et L^V et se comporte ainsi comme une véritable application de dualité dont elle évite les inconvénients et les lourdeurs.

De façon plus précise, si u désigne une fonction impaire, continue, strictement croissante, modérée, comodérée, vérifiant $u(1) = 1$ et $u(\infty) = \infty$, on dit que u est *de type concave* si:

(i) Il existe deux réels γ et $x_0 > 0$ tels que, pour tout $0 < \lambda \leqslant 1$ et tout $x \geqslant x_0$,

$$\frac{u(\lambda x)}{\lambda y} \geqslant \gamma \frac{u(x)}{x}.$$

(ii) Si $0 < x < 1$, alors $u(x) > x$, et si $x > 1$, alors $u(x) < x$.
(iii) u est dérivable en 1.

On dit que u est *de type convexe* si son inverse v est de type concave. On a alors:

PROPOSITION 29 (Théorème d'Ando). *Soit U une fonction d'Orlicz dont la densité u est de type concave ou convexe. Toute projection-contraction T de $L^{(U)}$ ou de L^U vérifiant $T(1) = 1$ est une espérance conditionnelle.*

Démonstration. Elle est détaillée dans [7], p. 132.

3. Meilleures approximations dans les espaces d'Orlicz. Dans [17] Herrndorf a montré la convergence p.s. des suites de m.a. le long d'une filtration, pour la norme de Luxemburg. Nous précisons ci-dessous ce résultat en prouvant que les suites de m.a. satisfont aux inégalités de Doob des martingales.

Nous avons vu que l'application de dualité permet d'établir un rapport entre le meilleur approximant – m.a. – $p_{\mathscr{B}}(X)$ d'une v.a.r. X par rapport à une sous-tribu $\mathscr{B}$ pour une norme donnée, et la médiane conditionnelle $m_{\mathscr{B}}(X)$ de cette variable. Nous allons maintenant exploiter ce fait dans le cas des normes d'Orlicz et de Luxemburg.

Soit X une v.a.r. non $\mathscr{B}$-mesurable.

Pour la norme de Luxemburg sur L_U la relation $E^{\mathscr{B}}\big(D_L(X - p^L_{\mathscr{B}}(X))\big) = 0$ conduit à

$$p^L_{\mathscr{B}}(X) = \|X - p^L_{\mathscr{B}}(X)\|_{(U)}\, m^u_{\mathscr{B}}\left(\frac{X}{\|X - p^L_{\mathscr{B}}(X)\|_{(U)}}\right).$$

Pour la norme d'Orlicz sur L_U la relation $E^{\mathscr{B}}\big(D_O(X - p^O_{\mathscr{B}}(X))\big) = 0$ conduit à

$$p^O_{\mathscr{B}}(X) = \|X - p^O_{\mathscr{B}}(X)\|_U\, m^u_{\mathscr{B}}\left(k\frac{X}{\|X - p^O_{\mathscr{B}}(X)\|_U}\right)$$

où k est déterminé par

$$E\left[V \circ u\left(k\frac{X - p^O_{\mathscr{B}}(X)}{\|X - p^O_{\mathscr{B}}(X)\|_U}\right)\right] = 1.$$

Remarques. On sait qu'il existe deux nombres réels a et b tels que si $X \in L^U$ et $E(U(X)) = 1$, alors $0 < a \leqslant k_X \leqslant b < +\infty$ si $E(V \circ u(X/k_X)) = 1$; ce qui, avec la relation $\|X\|_{(U)} \leqslant \|X\|_U \leqslant 2\|X\|_{(U)}$, permet de montrer que pour toute tribu $\mathscr{B}_\infty$ et toute variable $X \in L^U$ et non $\mathscr{B}_\infty$-mesurable, il existe une constante K telle que, pour toute tribu $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_\infty$, on a

$$p^O_{\mathscr{B}}(X) \leqslant K\|X\|_{(U)}\, m^u_{\mathscr{B}}\left(K\frac{X}{\|X - p^L_{\mathscr{B}}(X)\|_{(U)}}\right),$$

$$p^L_{\mathscr{B}}(X) \leqslant K\|X\|_U\, m^u_{\mathscr{B}}\left(K\frac{X}{\|X - p^O_{\mathscr{B}}(X)\|_U}\right).$$

Le but de cette partie est d'étendre aux m.a. les inégalités de Doob valables pour les médianes conditionnelles [9].

Dans le théorème suivant on considère l'espace d'Orlicz L_U muni soit de la norme d'Orlicz soit de celle de Luxemburg et $p_{\mathscr{B}}$ désigne soit $p^O_{\mathscr{B}}$ soit $p^L_{\mathscr{B}}$.

THÉORÈME 30. *Supposons que u soit équivalente à une fonction concave ou convexe et soit $(\mathscr{B}_n)$ une filtration de sous-tribus croissant vers $\mathscr{B}_\infty$; alors il existe deux constantes c et C telles que pour toute v.a. $X \in L_U$, positive,*

$$cE^{\mathscr{B}_n}(X) \leqslant p_{\mathscr{B}_n}(X) \leqslant CE^{\mathscr{B}_n}(X).$$

Si X n'est plus nécessairement positive, alors $|p_{\mathscr{B}_n}(X)| \leqslant CE^{\mathscr{B}_n}(|X|)$. En particulier, il existe une constante K telle que

$$\|p^*(X) = \sup p_{\mathscr{B}_n}(X)\| \leqslant K\|X\|$$

et la suite $p_{\mathscr{B}_n}(X)$ converge p.s. vers $p_{\mathscr{B}_\infty}(X)$.

Démonstration. Nous ne traiterons que le cas où u est équivalente à une fonction concave, le cas convexe se traitant de façon semblable. Comme u est équivalente à une fonction concave f et qu'elle est modérée, on peut trouver 3 constantes x_0, a et b telles que

$$x \geqslant x_0 \Rightarrow af(x) \leqslant u(x) < bf(x).$$

f étant concave, il en résulte que si $X \geqslant x_0$,

$$E^{\mathscr{B}}(u(X)) \leqslant bE^{\mathscr{B}}(f(X)) \leqslant bf(E^{\mathscr{B}}(X)) \leqslant abu(E^{\mathscr{B}}(X)) = ku(E^{\mathscr{B}}(X)).$$

Cas de la norme de Luxemburg. Posons $p_n = p^L_{\mathscr{B}_n}$ pour $X \in L^U_+$ et $1/a_n = \|X - p_n\|_U$; nous avons

$$p_n = (1/a_n)\, m_n(a_n X) \quad \text{où} \quad m_n = m^u_{\mathscr{B}_n}.$$

Nous avons montré dans [9], p. 219, qu'il existe des constantes k_1 et k_2 telles que $k_1 E^{\mathscr{B}}(u(X)) \leqslant u(m^u_{\mathscr{B}}(X)) \leqslant k_2 E^{\mathscr{B}}(u(X))$, ce qui montre, avec les inégalités précédentes, que $u(m_n(a_n X)) \leqslant kk_2 u(E^{\mathscr{B}_n}(a_n X))$ dès que $a_n X \geqslant x_0$.

La suite (a_n) étant croissante, on en déduit, pour $a_1 X \geqslant x_0$, qu'il existe une constante C^* telle que, pour tout $n \geqslant 1$, $u(m_n(a_n X)) \leqslant C^* a_n E^{\mathscr{B}_n}(X)$, le cas $a_1 = 0$, X $\mathscr{B}_1$-mesurable, étant trivial. En composant avec v, il vient $m_n(a_n X) \leqslant CE^{\mathscr{B}_n}(a_n X)$, donc

$$p_n(X) \leqslant CE^{\mathscr{B}_n}(X) \quad \text{pour } a_1 X \geqslant x_0.$$

Soient b un nombre >0 et $X \geqslant b$; la relation précédente appliquée à $x_0 X/(ba_1)$ montre, en utilisant $p(\alpha X) = \alpha p(X)$, que $p_n(X) \leqslant CE^{\mathscr{B}_n}(X)$ pour $X \geqslant b$. Soit $X \in L^{(U)}_+$; on a

$$p_n(X)+b = p_n(X+b) \leqslant CE^{\mathscr{B}_n}(X)+Cb$$

et, en faisant tendre b vers 0, on achève cette partie de la preuve.

L'inégalité inverse s'obtient en composant par v la relation $k_1 E^{\mathscr{B}_n}(u(X)) \leqslant u(\hbar^u_{\mathscr{B}_n}(X))$ et en utilisant l'équivalence de v avec la fonction convexe inverse de f.

Lorsque X n'est plus nécessairement positive, l'inégalité

$$|p_n = (1/a_n) m_n(a_n X)| \geqslant (1/a_n) m_n(a_n |X|)$$

permet d'obtenir la relation $|p_n(X)| \leqslant CE^{\mathscr{B}_n}(|X|)$ cherchée.

Le cas de la norme d'Orlicz se traite de manière analogue en utilisant les remarques précédentes.

L'inégalité $\|p^*(X)\| \leqslant K\|X\|$ résulte de l'inégalité de Doob $\|\bigvee_n E^{\mathscr{B}_n}(x)\| \leqslant C\|X\|$, démontré dans [21] ou [6], propositions 16 et 17.

Pour achever la démonstration montrons la convergence p.s. Si $X_n = E^{\mathscr{B}_n}(X)$, alors $p_k(X) = p_k(X-X_n)+X_n$ dès que $k \geqslant n$, et comme $\|\bigvee_{k \geqslant n} p_k(X-X_n)\| \leqslant C^*\|X-X_n\|$, nous pouvons appliquer la procédure standard du théorème de Banach [14], p. 332, et la suite $(p_n(X))$ converge p.s. ∎

4. Monotonies des espaces d'Orlicz. Dans ce paragraphe nous nous plaçons à nouveau dans le cadre général. U est une fonction d'Orlicz de densité continue à gauche u, v est l'inverse continue à gauche de u et V la conjuguée de U.

Commençons par étendre un résultat de Milnes [20].

PROPOSITION 31. *Soit f une v.a. étagée. Il existe une v.a. g $\sigma(f)$-mesurable telle que $E(V(g)) = 1 = \|g\|_{(V)}$, $\|f\|_U = E(fg)$ et $v(g) \leqslant cf \leqslant \bar{v}(g)$ avec $c\|f\|_U \geqslant 1$.*

Démonstration. Milnes [20], théorème 3, a établi cette proposition pour $f \in L^\infty$ lorsque v est continue. On peut aussi y voir une adaptation de la proposition 23(b) où l'hypothèse de modération faite sur la fonction d'Orlicz est remplacée par une condition portant sur la variable.

v n'étant pas supposée continue, il existe une suite (v_n) de fonctions croissantes continues qui croît vers v. Soit u_n l'inverse continue à gauche de v_n et U_n et V_n les primitives nulles en 0 de u_n et v_n respectivement. On a

$$\|f\|_U = \lim \searrow \|f\|_{U_n}. \tag{1}$$

En effet, le théorème cité ci-dessus assure l'existence d'une suite (g_n) $\sigma(f)$-mesurable telle que

$$\|g_n\|_{(V_{n+1})} = 1, \quad \|f\|_{U_{n+1}} = E(fg_{n+1}) \leqslant \|f\|_{U_n}\|g_{n+1}\|_{(V_n)}.$$

Comme $E(V_n(g_{n+1})) \leqslant E(V_{n+1}(g_{n+1})) \leqslant 1$, la suite $(\|f\|_{U_n})$ est décroissante. Enfin, $\|f\|_U \leqslant \varepsilon + E(fh)$ où $E(V(h)) \leqslant 1$, h étagée, d'où

$$\|f\|_U \leqslant \varepsilon + \|f\|_{U_n}\|h\|_{(V_n)} \leqslant \varepsilon + \|f\|_{U_n},$$

et l'égalité (1) en résulte.

Reprenons la démonstration. Soient A un atome de f et x_n la valeur constante de g_n sur A; comme $V_n(x_n)P(A) \leqslant E(V_n(g_n)) = 1$, la suite x_n est bornée, d'où $\|\sup g_n\|_\infty < +\infty$.

On peut donc extraire de la suite (g_n) une sous-suite, notée de même, telle que g_n converge p.s. vers g, $\sigma(f)$-mesurable, et cette convergence est dominée. De là il résulte que $E(fg_n) \to E(fg) \leqslant \|f\|_U\|g\|_{(V)}$. Or $V_n(g_n) \to V(g)$, le théorème de Lebesgue assure alors que $E(V(g)) \leqslant 1$. C'est bien la première partie de la proposition.

Montrons la seconde partie. Nous avons $v_n(g_n) = c_n f$ et $c_n\|f\|_{U_n} \geqslant 1$, la suite (c_n) est donc minorée par un nombre strictement positif. Si une sous-suite de (c_n) croissait vers $+\infty$ sur un atome A où $f \neq 0$, $v_n(g_n)$ tendrait vers ∞, ce qui est impossible, donc

$$0 < m \leqslant c_n \leqslant M < +\infty.$$

En extrayant une sous-suite (n_i) adéquate, telle que c_{n_i} converge vers c et $g_{n_i} \to g$, on achève la démonstration. ∎

COROLLAIRE 32. *Soit $f \in L^U_+$ et soit (f_n) une suite de v.a. étagées croissant vers f. Si (g_n) est la suite associée à (f_n) satisfaisant la proposition 31, il existe $C > 0$ tel que, pour toute fonction g p.s. adhérente à la suite (g_n), $v(g) \leqslant Cf \leqslant \bar{v}(g)$.*

Démonstration. La proposition 31 assure que $v(g_n) \leqslant c_n f_n \leqslant \bar{v}(g_n)$ où $E(V(g_n)) = 1$ et $c_n \geqslant 1/\|f_n\|_U$. Montrons que $0 < a \leqslant c_n \leqslant b < +\infty$.

La propriété de Fatou montre que $\|f_n\|_U$ croît vers $\|f\|_U$, donc $c_n \geqslant a$

$= 1/\|f\|_U$. Supposons qu'une sous-suite de (c_n), notée encore (c_n), tende vers $+\infty$; la convergence uniforme sur un ensemble de probabilité supérieure à $1-\varepsilon$ de f_n vers f montre que, sur cet ensemble, $\bar{v}(g_n)$ tend aussi vers l'infini, ce qui est en contradiction avec $E(V(g_n)) = 1$.

De la convergence p.s. de f_n vers f on déduit alors que

$$\limsup g_n < +\infty \qquad P\text{-p.s.}$$

Soit g adhérente à (g_n) pour la convergence simple; en dehors d'un négligeable, $g(x)-\varepsilon \leqslant g_{n_i}(x) \leqslant g(x)+\varepsilon$, pour une suite (n_i) dépendant de x (et de ε). Il vient

$$v\big(g(x)-\varepsilon\big) \leqslant v\big(g_{n_i}(x)\big) \leqslant c_{n_i} f_{n_i}(x) \leqslant \bar{v}\big(g_{n_i}(x)\big) \leqslant \bar{v}\big(g(x)-\varepsilon\big),$$
$$v(g) \leqslant \liminf c_{n_i} f_{n_i} \leqslant \limsup c_{n_i} f_{n_i} \leqslant \bar{v}(g),$$

ce qui achève la preuve. ∎

Remarque. Ce corollaire montre que si on prend $g = \liminf g_n$, alors $E(g) > 0$.

THÉORÈME 33. *Pour l'espace d'Orlicz $\boldsymbol{L}^U$, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *$\boldsymbol{L}^U$ est strictement monotone.*
(ii) *v est continue à l'origine.*
(iii) *$\boldsymbol{H}^{(V)}$ est orthogonalement lisse (théorème 18).*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Par négation, supposons que $v(0_+) = a > 0$. Pour un point de continuité b tel que $V(b) = c \leqslant 1/2$, choisissons A et B disjoints tels que $P(A) = P(B) = c$ et

$$f_p = \frac{1}{bc}1_A + \frac{pa}{c}1_B, \qquad \|f_p\|_U = \sup\left\{I_p(x) = \frac{x}{b} + pay\colon\ V(x)+V(y) = 1/c\right\}.$$

La fonction $I_p(x)$ est dérivable, sauf sur un ensemble au plus dénombrable, à dérivée positive pour p assez petit et, par conséquent, $\|f_p\|_U = 1$ et $\boldsymbol{L}^U$ n'est pas s.m.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soient $X, Y \in \boldsymbol{H}_+^{(V)}$. Pour λ petit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda v\big(\lambda(1-\varepsilon)\big) P(X > A) \geqslant E\big(Yv(\varepsilon Y)\big)$. Or

$$\varepsilon E\big(Yv(\varepsilon Y)\big) \geqslant E\int_0^{\varepsilon Y} v(t)\,dt = E\big(V(\varepsilon Y)\big),$$

$$\varepsilon\lambda v\big(\lambda(1-\varepsilon)\big) P(X > A) \leqslant E\int_{X(1-\varepsilon)}^{X} v(t)\,dt = E\big(V(X)\big) - E\big[V\big(X(1-\varepsilon)\big)\big],$$

d'où $E\big(V(X)\big) \geqslant E\big[V\big(X(1-\varepsilon)\big)\big] + E\big(V(\varepsilon Y)\big)$. Si de plus $XY = 0$, on obtient $E\big(V(X)\big) \geqslant E\big[V\big(X(1-\varepsilon)+\varepsilon Y\big)\big]$.

L'application $\alpha \to f(\alpha) = E\big[V\big(X(1-\alpha)+\alpha Y\big)\big]$ est continue et vérifie

$$f(1) = E[V(Y)] > 1 \quad \text{si } \|Y\| > 1,$$
$$f(0) = E[V(X)] = 1 \quad \text{si } \|X\| = 1,$$
$$f(\varepsilon) \leqslant E[V(X)] = 1.$$

Il existe donc $\lambda \in]0, 1[$ tel que $f(\lambda) = 1 = \|(1-\lambda)X + \lambda Y\|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Soient $X \in \boldsymbol{L}_+^U$ et $a \in \boldsymbol{R}_+$ tels que

$$X1_A = 0, \qquad \|X + a1_A\| = \|X\|.$$

Par le corollaire 32 et la remarque le suivant on peut trouver une suite de fonctions étagées, f_n, positives, croissant vers X, telle que $\|f_n\| \nearrow \|X\|$ et dont la suite associée $(g_n) \subset \boldsymbol{H}^{(V)}$ soit telle que $E(\liminf g_n) > 0$ et $\operatorname{supp}(g_n) \subseteq \operatorname{supp}(f_n)$.

Nous pouvons choisir a suffisamment petit pour que

$$\left\|\frac{2}{aP(A)}1_A\right\|_{(V)} > 1.$$

Par hypothèse il existe, pour tout n, $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que

$$\left\|Z_n = (1-\alpha_n) g_n + \alpha_n \frac{2}{aP(A)}1_A\right\|_{(V)} = 1. \tag{1}$$

Donc $\|f_n + a1_A\| \geqslant E(Z_n f_n + a1_A) = (1-\alpha_n)\|f_n\| + 2\alpha_n$, ou encore

$$\|f_n + a1_A\| - \|f_n\| \geqslant \alpha_n(2 - \|f_n\|).$$

Montrons que l'on peut choisir les α_n tels que $\alpha_n \geqslant \alpha > 0$. Soit

$$h_n(\alpha) = E\left[V\left((1-\alpha)g_n + \frac{2\alpha}{aP(A)}1_A\right)\right], \qquad h_n(1) > 1, \qquad h_n(0) = 1.$$

En dérivant, sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable, on voit que

$$h_n'(\alpha) \leqslant 0 \quad \text{si} \quad \frac{2}{a} v\left(\frac{2\alpha}{aP(A)}\right) \leqslant E\big[g_n v\big((1-\alpha)g_n\big)\big].$$

Si $g = \liminf g_n$, le lemme de Fatou et la remarque précédente montrent que

$$\liminf E\big[g_n v\big((1-\alpha)g_n\big)\big] \geqslant E\big[gv\big((1-\alpha)g\big)\big] = \eta_\alpha.$$

On peut trouver β et ε suffisamment petits pour que

$$\frac{2}{a} v\left(\frac{2\beta}{aP(A)}\right) \leqslant \eta_{1/2} + \varepsilon.$$

Donc si $0 < \alpha < \beta \wedge (1/2)$, alors, pour $n \geqslant N(\varepsilon, \beta)$, $h_n'(\alpha) \leqslant 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang, on peut choisir un $\alpha_n \geqslant \beta \wedge (1/2)$ réalisant (1). Finalement, on a

$$\|f_n+a1_A\|-\|f_n\| \geqslant \alpha > 0.$$

En passant à la limite, on obtient la s.m.o.

Montrons maintenant que

$$\|f+a1_A\| = \|f\| \Rightarrow a = 0 \quad \text{si } A \subseteq \operatorname{supp}(f) \text{ et } P(A) > 0.$$

Prenons, comme auparavant, une suite (f_n) de variables étagées croissant vers f, et soit (g_n) la suite associée:

$$E(f_n g_n) = \|f_n\|, \qquad \|f_n+a1_A\| \geqslant E[(f_n+a1_A)g_n] = \|f_n\|+aE(g_n 1_A).$$

Par conséquent $aE(g_n 1_A) \to 0$. En reprenant la procédure précédente, $f1_A$ remplaçant f, on montre que

$$E[\liminf g_n 1_A] > 0,$$

donc nécessairement $a = 0$.

La conjonction de ces deux parties achève notre preuve. ∎

Examinons maintenant le cas de l'espace d'Orlicz $L^{(U)}$. Akcoglu et Sucheston ont montré dans [1] que la stricte monotonie de $L^{(U)}$ équivalait à la modération de U; on a de plus [8]:

THÉORÈME 34. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *U vérifie Δ_2.*

(ii) *L^U est uniformément monotone.*

(iii) *$L^{(U)}$ est strictement monotone.*

(iv) *$L^{(U)}$ est strictement monotone pour les constantes.*

Démonstration. (i) ⇒ (ii). Par négation, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $f \in S(E_+)$ et une suite $g_n \geqslant 0$ tels que $\|g_n\| \geqslant \varepsilon$ et $\|f+g_n\|$ décroisse vers 1. A l'aide de la propriété 2(i), (vi) de la partie II.1 on montre que $E[U(g_n)]$ tend vers 1, ce qui est contradictoire avec $\|g_n\| \geqslant \varepsilon$.

(ii) ⇒ (iii) et (iii) ⇒ (iv) son triviales.

(iv) ⇒ (i). Par négation, supposons non (i); alors il existe $Z \in S(L_+^{(U)})$ tel que $Z \geqslant a > 0$, $E[U(Z)] \leqslant 1/2$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $E[U((1+\varepsilon)Z)] = +\infty$.

Soit $0 < k < m < 1$; la relation

$$\frac{Z}{m} = \frac{k}{m}\frac{Z-a}{k}+(1-k/m)\frac{a}{m(1-k/m)}$$

et la convexité de U permettent d'obtenir

$$E\left[U\left(\frac{Z}{m}\right)\right] \leqslant \frac{k}{m}E\left[U\left(\frac{Z-a}{k}\right)\right]+(1-k/m)E\left[U\left(\frac{a}{m(1-k/m)}\right)\right].$$

Comme $E[U(Z/m)] = +\infty$ pour tout $m < 1$, on en déduit que, pour tout k, $0 < k < 1$,

$$E\left[U\left(\frac{Z-a}{k}\right)\right] = +\infty,$$

i.e. $\|Z-a\| \geqslant 1$. En posant $X = Z-a$, il vient $\|X+a\| = \|X\| = 1$. ∎

Bibliographie

[1] A. A. Akcoglu et L. Sucheston, *La monotonicité uniforme des normes et théorèmes ergodiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 301 (7) (1985), 359–360.
[2] T. Ando, *Contractive projections in L_p spaces*, Pacific J. Math. 17 (1966), 391–405.
[3] A. Bellow, *An L^p-inequality with application to ergodic theory*, Houston J. Math. 1 (1975), 153–159.
[4] A. Beurling and A. E. Livingston, *A theorem on duality mappings in Banach spaces*, Ark. Mat. 4 (1961), 405–411.
[5] F. E. Browder, *On a theorem of Beurling and Livingston*, Canad. J. Math. 17 (1965), 367–372.
[6] B. Bru et H. Heinich, *Isométries positives et propriétés ergodiques de quelques espaces de Banach*, Ann. Inst. H. Poincaré 17 (4) (1981), 377–405.
[7] —, —, *Dérivations et contractions dans des espaces de Köthe*, C. R. Acad. Sci. Paris 301 (4) (1985), 131–134.
[8] —, —, *Monotonies des espaces d'Orlicz*, ibid. 301 (19) (1985), 893–894.
[9] —, —, *Meilleures approximations et médianes conditionnelles*, Ann. Inst. H. Poincaré 21 (3) (1985), 197–224.
[10] —, —, *Martingales conditionnelles*, à paraître.
[11] B. Bru, H. Heinich et J.-C. Lootgieter, *Itération des applications de dualité dans les espaces d'Orlicz*, C. R. Acad. Sci. Paris 303 (15) (1986), 745–747.
[12] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces—Selected Topics*, Lecture Notes in Math. 485, Springer, 1975.
[13] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, t. 1, Gauthier-Villars, Paris 1968.
[14] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators I*, Interscience, New York 1958.
[15] A. Fathi, *Le groupe des transformations de* [0, 1] *qui préservent la mesure de Lebesgue est un groupe simple*, Israel J. Math. 29 (1987), 301–308.
[16] N. Herrndorf, *Counterexamples to results of M. M. Rao*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 53 (1980), 283–290.
[17] —, *Best Φ- and N_Φ-approximants in Orlicz spaces*, ibid. 58 (1981), 309–329.
[18] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen 1961.
[19] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II*, Springer, Berlin 1979.
[20] H. W. Milnes, *Convexity of Orlicz spaces*, Pacific J. Math. 7 (1957), 1451–1483.
[21] J. Neveu, *Discrete-Parameter Martingales*, North-Holland, 1975.
[22] A. L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper's Series in Modern Math., Harper & Row, New York 1967.
[23] K. Sundaresan, *Smooth Banach spaces*, Math. Ann. 173 (1967), 191–199.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE PARIS VI
LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
Tour 56, 4 Pl. Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

Received July 2, 1987 (2333)