STUDIA MATHEMATICA, T. XCII. (1989)

Certaines propriétés des opérateurs de Riesz

par

PETER VOLKMANN et HANS-DIETER WACKER (Karlsruhe)

Résumé. Soit $R(E)$ la classe des opérateurs de Riesz sur un espace de Banach complexe E. Nous donnons des caractérisations de ces opérateurs, et nous introduisons deux classes d'opérateurs $\Delta(E)$, $\Gamma(E)$, telles que $\Delta(E) \subseteq R(E) \subseteq \Gamma(E)$.

1. Introduction et résultats. Soient E un espace de Banach complexe et $L(E)$ l'espace des opérateurs linéaires continus $A\colon E \to E$. Nous désignons par E^* l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur E et par $A^*\colon E^* \to E^*$ l'opérateur conjugué de $A \in L(E)$. Si M est un sous-espace de E (non nécessairement fermé, c.-à-d. non nécessairement $M = \bar{M}$), nous écrivons brièvement $M \subseteq_{se} E$.

La classe $R(E)$ des *opérateurs de Riesz* peut être donnée par

$$R(E) = \{A \in L(E) \mid \operatorname{codim}(A-\lambda I)(E) < \infty \ \ (\lambda \neq 0)\} \tag{1}$$

(voir p.ex. Heuser [2]; $I\colon E \to E$ désigne l'opérateur identique). En cherchant des caractérisations de ces opérateurs, Aiena [1] a introduit la classe

$$\Omega(E) = \{A \in L(E) \mid [M \subseteq_{se} E,\ A(M) \subseteq M,\ A \mid M\colon M \to E \text{ injectif},\ (A \mid M)^{-1} \text{ continu}] \Rightarrow \dim M < \infty\} \tag{2}$$

(où $A \mid M$ signifie la restriction de l'opérateur A à l'espace M), et il a démontré l'inclusion

$$R(E) \subseteq \Omega(E). \tag{3}$$

Dans la présente note nous considérons les classes

$$\Delta(E) = \{A \in L(E) \mid [M \subseteq_{se} E,\ A(M) \subseteq M,\ E = M + A(E)] \Rightarrow \operatorname{codim} M < \infty\}, \tag{4}$$

$$\Gamma(E) = \{A \in L(E) \mid [M = \bar{M} \subseteq_{se} E,\ A(M) \subseteq M,\ E = M + A(E)] \Rightarrow \operatorname{codim} M < \infty\}. \tag{5}$$

THÉORÈME 1. *On a les relations suivantes:*

$$\Delta(E) \subseteq R(E) \subseteq \Gamma(E), \tag{6}$$

(7) $$A^* \in \Gamma(E^*) \Rightarrow A \in \Omega(E),$$

(8) $$A^* \in \Omega(E^*) \Rightarrow A \in \Gamma(E).$$

Remarques. 1. En vertu de $A \in R(E) \Rightarrow A^* \in R(E^*)$, l'inclusion (3) est une conséquence de (6), (7):

$$A \in R(E) \Rightarrow A^* \in R(E^*) \Rightarrow A^* \in \Gamma(E^*) \Rightarrow A \in \Omega(E).$$

2. Les classes $S(E)$, $T(E)$ des opérateurs de Kato et de Pełczyński, respectivement (voir Pietsch [3]), peuvent être données par

$$S(E) = \{A \in L(E) \mid [M \subseteq_{se} E,\ A|M\colon M \to E \text{ injectif, } (A|M)^{-1} \text{ continu}] \Rightarrow \dim M < \infty\},$$

$$T(E) = \{A \in L(E) \mid [M = \bar{M} \subseteq_{se} E,\ E = M + A(E)] \Rightarrow \operatorname{codim} M < \infty\}.$$

Les rapports de ces classes aux classes $\Omega(E)$ et $\Gamma(E)$, respectivement, sont évidents, et (7), (8) sont analogues aux formules connues de Pełczyński

$$A^* \in T(E^*) \Rightarrow A \in S(E), \quad A^* \in S(E^*) \Rightarrow A \in T(E).$$

3. Quant aux inclusions (6), nous montrerons que les situations $\Delta(E) \neq R(E)$, $R(E) \neq \Gamma(E)$ peuvent arriver (voir le paragraphe 2).

THÉORÈME 2. *Pour* $A \in L(E)$, *les conditions suivantes sont équivalentes*:
(A) $A \in R(E)$.
(B) *Si* $M \subseteq_{se} E$, $A(M) \subseteq M$, $E = M + A(E)$, *alors* $M = \bar{M} \Leftrightarrow \operatorname{codim} M < \infty$.
(C) $[M \subseteq_{se} E,\ M \neq \bar{M} = E,\ A(M) \subseteq M,\ E = M + A(E)] \Rightarrow \operatorname{codim} M = \infty$.
(D) $[M \subseteq_{se} E,\ \bar{M} = E,\ A(M) \subseteq M,\ E = M + A(E)] \Rightarrow \operatorname{codim} M \neq 1$.

THÉORÈME 3. *Soit V un espace vectoriel sur un corps Λ. Pour un opérateur linéaire $A\colon V \to V$ les conditions suivantes sont équivalentes*:
(A) *Si* $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, *alors* $\operatorname{codim}(A - \lambda I)(V) < \infty$.
(B) *Si M est un sous-espace de V tel que*

(9) $$V = M + A(V), \quad Ax \in \Lambda x + M \quad (x \in V),$$

alors $\operatorname{codim} M < \infty$.

Remarque. En vertu de (1), le théorème 3 aussi fournit une caractérisation des opérateurs de Riesz.

2. Exemples d'inégalités dans les inclusions (6). 1. Read [4] a donné un opérateur $A \in L(l_1)$ qui n'est pas un opérateur de Riesz et pour lequel il n'existe aucun sous-espace fermé $M \subseteq l_1$, $\{0\} \neq M \neq l_1$, tel que $A(M) \subseteq M$. De plus A n'est pas surjectif. On a donc $A \in \Gamma(l_1)$, mais $A \notin R(l_1)$, d'où $R(l_1) \neq \Gamma(l_1)$.

2. Soient $E = l_2$ et $A\colon E \to E$ donné par

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x_k e_k.$$

Cet opérateur est compact et injectif. Les formules

$$Ae_k = \frac{1}{k} e_k, \quad A^2 e_k = \frac{1}{k^2} e_k, \quad \ldots \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

entraînent $e_k \in A^n(E)$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$, et l'enveloppe linéaire $N = [e_1, e_2, \ldots]$ satisfait donc aux relations

(10) $$\dim N = \infty, \quad N \subseteq A^n(E) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit R un complément algébrique de $A(E)$,

(11) $$E = A(E) \oplus R.$$

A étant injectif, il en résulte $A(E) = A^2(E) \oplus A(R)$, donc

$$E = A^2(E) \oplus R \oplus A(R),$$

et par récurrence

(12) $$E = A^n(E) \oplus R \oplus A(R) \oplus \ldots \oplus A^{n-1}(R).$$

La somme directe algébrique

(13) $$M = R \oplus A(R) \oplus A^2(R) \oplus \ldots$$

est un sous-espace de E tel que

(14) $$A(M) \subseteq M, \quad E = A(E) + M$$

(voir (11)). Montrons

(15) $$N \cap M = \{0\}.$$

Soit donc $x \in N \cap M$. D'après (10), (13) il existe n tel que

$$x \in A^n(E) \cap (R \oplus A(R) \oplus \ldots \oplus A^{n-1}(R)),$$

d'où $x = 0$ (en vertu de (12)). Les formules (10), (15) entraînent $\operatorname{codim} M = \infty$, et en tenant compte de (14), il en résulte $A \notin \Delta(l_2)$. D'autre part A est compact, donc $A \in R(l_2)$, d'où finalement $\Delta(l_2) \neq R(l_2)$.

3. Un lemme. Pour la démonstration de nos théorèmes nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME. *Soient V un espace vectoriel sur un corps Λ, $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$, $A\colon V \to V$ un opérateur linéaire et M un sous-espace de V tel que*

$$(A - \lambda I)(V) \subseteq M.$$

Alors $A(M) \subseteq M$, $V = M + A(V)$.

Démonstration. 1. Si $x \in M$, alors

$$Ax = (A-\lambda I)x + \lambda x \in M + M = M.$$

2. Si $x \in V$, alors

$$x = (A-\lambda I)((-1/\lambda)x) + A((1/\lambda)x) \in M + A(V).$$

4. **Démonstration de (6).** 1. Soit $A \in \Delta(E)$. Pour λ complexe, $\neq 0$, posons $M = (A-\lambda I)(E)$. Il découle du lemme et de (4) que $\operatorname{codim}(A-\lambda I)(E) < \infty$, l'inclusion $\Delta(E) \subseteq R(E)$ est donc établie.

2. Pour démontrer $R(E) \subseteq \Gamma(E)$, soient $A \in R(E)$ et $M = \bar{M} \subseteq_{sc} E$ tels que

(16) $$A(M) \subseteq M, \quad E = M + A(E).$$

Selon (5) il suffit de vérifier que

(17) $$\operatorname{codim} M < \infty.$$

Pour expliquer la signification de (16), considérons l'espace quotient $\tilde{E} = E/M$, et désignons par π: $E \to \tilde{E}$ l'homomorphisme canonique. La relation $A(M) \subseteq M$ nous permet de définir l'opérateur (linéaire, continu) $\tilde{A}$: $\tilde{E} \to \tilde{E}$, en posant

(18) $$\tilde{A}(x+M) = Ax + M,$$

et d'après $E = M + A(E)$, c'est un opérateur surjectif.

Soient $\lambda \neq 0$ et N un complément algébrique de $(A-\lambda I)(E)$,

$$E = (A-\lambda I)(E) \oplus N.$$

Il en résulte

$$\tilde{E} = (\tilde{A}-\lambda\tilde{I})(\tilde{E}) + \pi(N)$$

($\tilde{I}$ désignant l'opérateur identique de $\tilde{E}$), donc

$$\operatorname{codim}(\tilde{A}-\lambda\tilde{I})(\tilde{E}) \leqslant \dim \pi(N) \leqslant \dim N = \operatorname{codim}(A-\lambda I)(E) < \infty.$$

Par conséquent, $\tilde{A}$: $\tilde{E} \to \tilde{E}$ est un opérateur de Riesz surjectif, et il est bien connu que dans ces circonstances l'espace de Banach $\tilde{E}$ doit être de dimension finie. L'inégalité (17) est donc établie.

5. **Démonstration de (7).** Soit $A \in L(E)$, $A \notin \Omega(E)$, et montrons

(19) $$A^* \notin \Gamma(E^*).$$

D'après l'hypothèse il existe un sous-espace $M \subseteq E$ tel que

$$A(M) \subseteq M, \quad A|M\colon M \to E \text{ injectif}, \quad (A|M)^{-1} \text{ continu}, \quad \dim M = \infty$$

(voir (2)). L'ensemble $M^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \varphi|M = 0\}$ est un sous-espace fermé de E^*, et (19) sera une conséquence des formules

(20) $$A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp,$$

(21) $$E^* = M^\perp + A^*(E^*),$$

(22) $$\operatorname{codim} M^\perp = \infty.$$

L'inclusion (20) découle de $A(M) \subseteq M$. Quant à (21), observons que la continuité de $(A|M)^{-1}$ entraîne la surjectivité de l'opérateur $(A|M)^*$: $E^* \to M^*$ (voir p.ex. [2], théorème 57.3). Si $\psi \in E^*$, alors $\psi|M \in M^*$, et il existe donc $\varphi \in E^*$ telle que $(A|M)^*\varphi = \psi|M$, c.-à-d. $\varphi(A|M) = \psi|M$, donc $\psi - \varphi A \in M^\perp$, d'où

$$\psi = \psi - \varphi A + A^*\varphi \in M^\perp + A^*(E^*).$$

Pour établir (22), partons de $\dim M = \infty$. Soient $x_1, x_2, \ldots$ des éléments linéairement indépendants de M. Si J: $E \to E^{**}$ désigne l'isomorphisme canonique, on voit facilement que

$$M^\perp \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(Jx_n).$$

Les $Jx_1, Jx_2, \ldots$ étant linéairement indépendants, il en résulte (22).

6. **Démonstration de (8).** Soit $A \in L(E)$, $A \notin \Gamma(E)$, et montrons

(23) $$A^* \notin \Omega(E^*).$$

D'après l'hypothèse il existe un sous-espace fermé $M \subseteq E$ tel que $A(M) \subseteq M$, $E = M + A(E)$, $\operatorname{codim} M = \infty$. Comme dans le paragraphe précédent nous avons $A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$, et (23) sera donc une conséquence des formules

(24) $$A^*|M^\perp\colon M^\perp \to E^* \text{ injectif}, \quad (A^*|M^\perp)^{-1} \text{ continu},$$

(25) $$\dim M^\perp = \infty.$$

D'après le paragraphe 4, $\tilde{A}$: $E/M \to E/M$, $\tilde{A}(x+M) = Ax + M$ est un opérateur surjectif, ce qui entraîne que $\tilde{A}^*$: $(E/M)^* \to (E/M)^*$ est injectif et $(\tilde{A}^*)^{-1}$ est continu (voir [2], exercice 55.3). L'application j: $(E/M)^* \to M^\perp$ définie par

$$j(f)(x) = f(x+M) \quad (f \in (E/M)^*, \ x \in E)$$

est un isomorphisme surjectif (voir [2], exercice 54.2). Si $x \in E$, $\varphi \in M^\perp$, alors

$$\begin{aligned}(A^*\varphi)(x) &= \varphi(Ax) = j^{-1}(\varphi)(Ax+M) = j^{-1}(\varphi)(\tilde{A}(x+M)) \\ &= \tilde{A}^*(j^{-1}(\varphi))(x+M) = ((j\tilde{A}^*j^{-1})(\varphi))(x),\end{aligned}$$

donc $A^*|M^\perp = j\tilde{A}^*j^{-1}$. Cette formule et les propriétés de $\tilde{A}^*$ entraînent (24).

Preuve de (25):

$$\operatorname{codim} M = \infty \Rightarrow \dim E/M = \infty \Rightarrow \dim M^{\perp} = \dim j((E/M)^*) = \dim (E/M)^* = \infty.$$

7. Démonstration du théorème 2. Dans ce paragraphe nous supposons toujours que $A \in L(E)$.

1. Montrons d'abord que pour deux polynômes p, q sans diviseurs communs on a

$$p(A)(E) \cap q(A)(E) = p(A)q(A)(E). \tag{26}$$

En effet, il existe des polynômes r, s tels que

$$r(\lambda)p(\lambda)+s(\lambda)q(\lambda) \equiv 1,$$

et pour $z \in p(A)(E) \cap q(A)(E)$, $z = p(A)x = q(A)y$, il résulte

$$\begin{aligned} z &= p(A)\big(r(A)p(A)x+s(A)q(A)x\big) \\ &= p(A)\big(r(A)q(A)y+s(A)q(A)x\big) = p(A)q(A)\big(r(A)y+s(A)x\big), \end{aligned}$$

d'où $p(A)(E) \cap q(A)(E) \subseteq p(A)q(A)(E)$. L'inclusion inverse est évidente.

2. (A)⇒(B). Soient $A \in R(E)$, $M \subseteq_{sc} E$, $A(M) \subseteq M$ et $E = M + A(E)$. L'implication $M = \bar{M} \Rightarrow \operatorname{codim} M < \infty$ étant une conséquence de $R(E) \subseteq \Gamma(E)$, il reste à démontrer que $\operatorname{codim} M < \infty \Rightarrow M = \bar{M}$.

Soit donc $\operatorname{codim} M < \infty$. Alors $\tilde{E} = E/M$ est de dimension finie, et à cause de cela l'opérateur surjectif $\tilde{A}$: $\tilde{E} \to \tilde{E}$, donné par (18), est bijectif. Par conséquent, si

$$m(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$$

est un polynôme de degré minimum tel que

$$m(\tilde{A}) = 0, \tag{27}$$

ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont différentes de zero. De (26), (27) il résulte que

$$\bigcap_{k=1}^{n} (A - \lambda_k I)^{p_k}(E) = m(A)(E) \subseteq M.$$

A étant un opérateur de Riesz, l'espace $m(A)(E)$ est donc fermé et de codimension finie, et les mêmes propriétés sont vraies pour M.

3. (B)⇒(C), (C)⇒(D). Évident.

4. (D)⇒(A). Soit $A \notin R(E)$. Alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\operatorname{codim}(A - \lambda I)(E) = \infty$, et on peut trouver un sous-espace M de E satisfaisant aux conditions

$$(A - \lambda I)(E) \subseteq M \subseteq \bar{M} = E, \quad \operatorname{codim} M = 1. \tag{28}$$

D'après notre lemme il en résulte $A(M) \subseteq M$, $E = M + A(E)$. Ces formules et (28) entraînent que A ne satisfait pas à (D).

8. Démonstration du théorème 3. 1. (A)⇒(B). Supposons que (A) soit satisfaite et que M soit un sous-espace de V tel que (9) ait lieu. Observons que la deuxième condition de (9) entraîne

$$A(M) \subseteq M, \tag{29}$$

$$Ax = \lambda(x)x + m(x) \quad (x \in V \setminus M), \tag{30}$$

où les scalaires $\lambda(x)$ et les vecteurs $m(x)$ de M sont uniquement déterminés. Montrons que

$$\lambda(x) = \lambda(y) \quad (x, y \in V \setminus M). \tag{31}$$

En effet, si x, y sont linéairement dépendants par rapport à M, disons $y = \mu x + u$, où $u \in M$, alors $Ay = \mu Ax + Au = \mu(\lambda(x)x + m(x)) + Au = \lambda(x)y + \tilde{m}$, où $\tilde{m} = \mu m(x) + Au - \lambda(x)u \in M$, donc $\lambda(x) = \lambda(y)$. Si x, y sont linéairement indépendants par rapport à M, alors la relation

$$\lambda(x+y)(x+y) + m(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \lambda(x)x + \lambda(y)y + m(x) + m(y)$$

fournit

$$\big(\lambda(x+y) - \lambda(x)\big)x + \big(\lambda(x+y) - \lambda(y)\big)y \in M,$$

d'où $\lambda(x) = \lambda(x+y) = \lambda(y)$. La formule (31) est donc établie: $\lambda(x) \equiv \lambda = \text{const}$, et de (29), (30) il découle $Ax - \lambda x \in M$ $(x \in V)$, c.-à-d.

$$(A - \lambda I)(V) \subseteq M. \tag{32}$$

Dans le cas $\lambda \neq 0$, la condition (A) et (32) entraînent la relation désirée $\operatorname{codim} M < \infty$. Dans le cas $\lambda = 0$, il résulte de (32) que $A(V) \subseteq M$, et la première condition de (9) n'est autre que $V = M$, on a donc $\operatorname{codim} M = 0 < \infty$.

2. (B)⇒(A). Soit $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 0$. Il suffit de montrer que $M = (A - \lambda I)(V)$ satisfait à (9). En effet, notre lemme fournit $V = M + A(V)$, et $Ax \in \Lambda x + M$ est une conséquence de $Ax = \lambda x + (A - \lambda I)x$ $(x \in V)$.

Bibliographie

[1] P. Aiena, *An internal characterization of Riesz operators*, conférence donnée à l'Université de Karlsruhe le 11 décembre 1986.

[2] H. Heuser, *Funktionalanalysis*, 2ème éd., Teubner, Stuttgart 1986.

[3] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam 1980.

[4] C. J. Read, *A short proof concerning the invariant subspace problem*, J. London Math. Soc. 34 (1986), 335–348.

MATHEMATISCHES INSTITUT I
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Postfach 6980, D-7500 Karlsruhe 1, F.R.G.

Received June 29, 1987
Revised version July 27, 1987
(2331)