Contents of volume XCI, number 1

STUDIA MATHEMATICA

The journal prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA
Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland

ISBN 83-01-08438-3 ISSN 0039-3223

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

Fermés d'unicité dans les groupes abéliens localement compacts

par

VALÉRIE TARDIVEL (Paris)

Abstract. A set $E \subset [0, 2\pi]$ is called a *set of uniqueness* or a $\mathcal{U}$*-set* if every trigonometric series converging to 0 outside E vanishes identically. For closed sets, there exists another characterization: a closed set is a $\mathcal{U}$-set if there exists no nonzero pseudo-function whose support is contained in E. We also define closed $\mathcal{U}_0$-sets: they do not support any nonzero Rajchman measure. Recently, Kaufman and Solovay proved that closed $\mathcal{U}$-sets and closed $\mathcal{U}_0$-sets form a coanalytic non-Borel subset of $\mathcal{K}([0, 2\pi])$. By generalizing the notions of pseudo-functions and Rajchman measures, we extend these results to closed subsets of a locally compact nondiscrete abelian group with a countable basis: first, we show that it is enough to study closed subsets of compact metrizable abelian groups and more particularly of four specific groups: $\Pi = R/Z$, Z_p, $(Z/pZ)^N$ (p prime), $\prod_k (Z/p_k Z)$ (p_k distinct primes), and then we prove the results for these four particular groups.

Introduction. Nous étudions les fermés d'unicité et les fermés d'unicité au sens large d'un groupe abélien localement compact à base dénombrable. Les premiers ensembles d'unicité considérés ont été ceux du tore. Rappelons qu'un ensemble E contenu dans le tore est d'unicité s'il n'existe aucune série trigonométrique non identiquement nulle convergeant vers 0 hors de E. Le lecteur intéressé par les ensembles d'unicité du tore pourra se reporter aux travaux de N. Bari [Ba1-2], G. Cantor [Ca], J. P. Kahane et R. Salem [K. S], D. Men'shov [M], I. I. Piatetski-Shapiro [P-S], A. Rajchman [Ra], W. H. Young [Y], A. Zygmund [Z].

Pour les fermés du tore, nous avons la caractérisation suivante due à J. P. Kahane et R. Salem [K. S]:

THÉORÈME. *Un fermé contenu dans le tore est d'unicité si, et seulement si, il ne contient le support d'aucune pseudo-fonction non nulle.*

On définit également les fermés d'unicité au sens large: ils ne contiennent le support d'aucune mesure de Rajchman non nulle.

L'ensemble $\mathcal{U}$ des compacts d'unicité et l'ensemble $\mathcal{U}_0$ des compacts

---

A.M.S. Subject Classification: Primary 43A46, 04A15, Secondary 43A70.

Key words and phrases: $\mathcal{U}$-sets, $\mathcal{U}_0$-sets, coanalytic sets, harmonic analysis on locally compact abelian groups, Rajchman measures, pseudo-functions.

d'unicité au sens large sont deux σ-idéaux de compacts, coanalytiques dans l'ensemble des compacts du tore muni de la topologie de Hausdorff; R. Kaufman [Ka2] et R. M. Solovay ont montré que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ ne sont pas boréliens.

Dans cet article, nous étendons ces résultats au cas d'un groupe abélien localement compact non discret à base dénombrable. Tout d'abord, nous montrons que l'extension des notions de pseudo-fonctions et de mesures de Rajchman permet de définir les fermés d'unicité et les fermés d'unicité au sens large et nous donnons certaines propriétés de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$; nous démontrons que, pour prouver que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ ne sont pas boréliens, il suffit de restreindre l'étude au cas d'un groupe abélien compact métrisable infini, et plus particulièrement d'étudier les quatre groupes suivants:

– le tore,
– l'anneau des entiers p-adiques Z_p, p premier,
– $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{N}}$, p premier,
– $\prod_k(\boldsymbol{Z}/p_k\boldsymbol{Z})$, p_k premiers distincts.

Pour Z_p, on construit une application continue d'un compact métrisable vers l'ensemble des compacts de Z_p telle que les images réciproques de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ soient un coanalytique non borélien. Dans les deux derniers cas, on construit une application continue de $\{0,1\}^{\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}}$ vers l'ensemble des compacts du groupe telle que les images réciproques de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ soient l'ensemble:

$$\{\varepsilon\in\{0,1\}^{\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}}\colon \exists k\geqslant 0\ \ \forall l_0\geqslant 0\ \exists l>l_0\ \ \varepsilon_{(k,l)}=1\}.$$

D'après les résultats de A. Louveau et J. Saint-Raymond [L.S-R], ce dernier ensemble est un $G_{\delta\sigma}$ non G_δ. Les propriétés des σ-idéaux de compacts obtenues par A. S. Kechris, A. Louveau, et W. H. Woodin [K.L.W] permettent de conclure.

I. Réduction aux cas particuliers. Dans cette partie, nous montrons que l'on peut se restreindre à l'étude de quatre cas particuliers.

G désigne un groupe abélien localement compact à base dénombrable; m_G est une mesure de Haar sur G. $\hat{G}$ est le groupe dual de G.

La plupart des démonstrations de cette partie sera laissée au lecteur, qui pourra se référer aux livres de Bourbaki [Bo, ch. II], Meyer [Mey, ch. III], et Rudin [Ru, ch. I.II]. Les résultats utilisés en théorie descriptive se trouvent dans le livre de Kuratowski [Ku].

Nous donnons maintenant les définitions nécessaires à l'étude.

Définition 1 [Mey]. Une forme linéaire T continue sur $A(G)$ est une *pseudo-fonction* si $\hat{T}$ appartient à $C_0(\hat{G})$. On note $T\in A_*(G)$.

Définition 2 [Mey]. Soit $T\in A_*(G)$. On appelle *support* de T le plus petit fermé F de G vérifiant

$$\forall\hat{\varphi}\in A(G)\qquad \operatorname{supp}\hat{\varphi}\cap F=\emptyset\ \Rightarrow\ \langle T,\hat{\varphi}\rangle=0.$$

Définition 3. On appelle *mesure de Rajchman* sur G toute mesure μ élément de $\mathscr{M}(G)$ telle que $\hat{\mu}$ soit élément de $C_0(\hat{G})$.

Définition 4. Soit F un fermé de G.

F est un *fermé d'unicité* ou *fermé de type* $\mathscr{U}$ si F ne contient le support d'aucune pseudo-fonction non nulle. Dans le cas contraire, F est un *fermé de multiplicité* ou *fermé de type* $\mathscr{M}$.

F est un *fermé d'unicité au sens large* ou *fermé de type* $\mathscr{U}_0$ si F ne contient le support d'aucune mesure de Rajchman non nulle. Dans le cas contraire, F est un *fermé de multiplicité au sens strict* ou *fermé de type* $\mathscr{M}_0$.

On note $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{U}_0$) l'ensemble des fermés de type $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{U}_0$) et $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{M}_0$) l'ensemble des fermés de type $\mathscr{M}$ (resp. $\mathscr{M}_0$). R. Kaufman a montré que dans $2^{\boldsymbol{R}}$, $\mathscr{U}_0$ est coanalytique non borélien [Ka1].

On démontre facilement les propriétés suivantes des fermés de type $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$:

Proposition 5. (i) *Tout fermé contenu dans un fermé de type* $\mathscr{U}$ (*resp.* $\mathscr{U}_0$) *est de type* $\mathscr{U}$ (*resp.* $\mathscr{U}_0$).

(ii) *Tout fermé de type* $\mathscr{U}_0$ *est rare.*

(iii) *Tout fermé de type* $\mathscr{U}_0$ *est de mesure nulle pour la mesure de Haar sur* G.

De cette dernière proposition, on déduit que si G est discret, $\mathscr{U}=\mathscr{U}_0=\{\emptyset\}$.

On notera $\mathscr{F}(G)$ l'ensemble des fermés de G.

Définition 6. Soit $\mathscr{I}\subset\mathscr{F}(G)$. $\mathscr{I}$ est un *σ-idéal de fermés* si

$$\forall n\ \forall F_n\in\mathscr{I}\ \forall F\in\mathscr{F}(G)\qquad F\subset\bigcup_n F_n\ \Rightarrow\ F\in\mathscr{I}.$$

On vérifie que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ sont deux σ-idéaux de fermés.

Munissons $\mathscr{F}(G)$ de la structure borélienne d'Effros [Ch]. Nous obtenons un espace polonais dans lequel $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ sont coanalytiques. Notre but maintenant est de montrer que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ ne sont pas boréliens. Nous allons ramener l'étude à quatre cas particuliers. Pour cela, il suffit d'établir les théorèmes suivants:

Théorème 7. *Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit $\pi\colon G\to G/H$ l'homomorphisme canonique. Un fermé $F\subset G/H$ est de type $\mathscr{U}$ dans G/H si, et seulement si, $\pi^{-1}(F)$ est un fermé de type $\mathscr{U}$ dans G.*

Démonstration. On vérifie que si T est un élément non nul de $A_*(G)$ dont le support est contenu dans $\pi^{-1}(F)$, et $\hat{\varphi}$ est un élément de $A(G)$ tel que $\langle T,\hat{\varphi}\rangle\neq 0$, on construit un élément non nul de $A_*(G/H)$, T', dont le support est contenu dans F en posant

$$\forall\hat{g}\in A(G/H)\qquad \langle T',\hat{g}\rangle=\langle T,\hat{g}\circ\pi\cdot\hat{\varphi}\rangle.$$

De même, on montre que si T est un élément non nul de $A_*(G/H)$ dont le support est contenu dans F, on construit un élément non nul de $A_*(G)$, T', dont le support est contenu dans $\pi^{-1}(F)$ en posant

$$\forall \hat{f} \in A(G) \quad \langle T', \hat{f} \rangle = \langle T, (f*\varphi)\hat{}|_{H^\perp} \rangle,$$

où $\hat{\varphi}$ est un élément de $A(G) \cap L^1(G)$ tel que φ soit un élément de $A(\hat{G}) \cap L^1(\hat{G})$ à support compact vérifiant

$$\sup_{x \in G} \int_H |\hat{\varphi}_x| \, dm_H < \infty, \qquad \sup_{\xi \in \hat{G}} \int_{H^\perp} |\varphi_\xi| \, dm_{H^\perp} < \infty.$$

On démontre un résultat analogue pour $\mathscr{U}_0$:

THÉORÈME 8. *Soit H un sous-groupe fermé de G. Un fermé $F \subset G/H$ est de type $\mathscr{U}_0$ si, et seulement si, $\pi^{-1}(F)$ est de type $\mathscr{U}_0$.*

THÉORÈME 9. *Soient H un sous-groupe ouvert et compact infini de G et F un fermé contenu dans H. Alors F est un fermé de type $\mathscr{U}$ dans H si, et seulement si, F est un fermé de type $\mathscr{U}$ dans G.*

Démonstration. Les propriétés des fonctions de $A(G)$ et $A(H)$ données dans [Ru, p. 53–54] permettent de montrer que si T est un élément non nul de $A_*(H)$ dont le support est contenu dans F, on construit un élément non nul T' de $A_*(G)$ dont le support est contenu dans F en posant

$$\hat{T}' = \hat{T} \circ \tilde{\pi},$$

où $\tilde{\pi}$ est l'homomorphisme canonique $\tilde{\pi}: \hat{G} \to \hat{G}/H^\perp$.

De même, on montre que si T est un élément non nul de $A_*(G)$ dont le support est contenu dans F, on définit un élément non nul de $A_*(H)$, T', dont le support est contenu dans F en posant

$$\hat{T}' = \big((\hat{T})\check{} * m_{H^\perp}\big)\check{},$$

où $\check{T}(x) = T(-x)$.

On démontre également un théorème analogue pour $\mathscr{U}_0$.

THÉORÈME 10. *Soient H un sous-groupe ouvert compact infini de G et F un fermé contenu dans H. Alors F est un fermé de type $\mathscr{U}_0$ dans H si, et seulement si, F est un fermé de type $\mathscr{U}_0$ dans G.*

Soient $\mathscr{F}(G)$ et $\mathscr{F}(G/H)$ les ensembles des fermés de G et G/H, munis de la structure borélienne d'Effros [Ch]. Alors l'application

$$\Psi: \mathscr{F}(G/H) \to \mathscr{F}(G), \quad F \to \pi^{-1}(F)$$

est borélienne. D'après les théorèmes 7 et 8, on a

$$\Psi^{-1}(\mathscr{U}_G) = \mathscr{U}_{G/H}, \quad \Psi^{-1}(\mathscr{U}_{0_G}) = \mathscr{U}_{0_{G/H}}.$$

Donc si $\mathscr{U}_G$ ou $\mathscr{U}_{0_G}$ est borélien, il en est de même pour $\mathscr{U}_{G/H}$ et $\mathscr{U}_{0_{G/H}}$. Il suffit de montrer que $\mathscr{U}_{G/H}$ et $\mathscr{U}_{0_{G/H}}$ ne sont pas boréliens.

Considérons maintenant l'application

$$\Theta: \mathscr{F}(H) \to \mathscr{F}(G), \quad F \to F,$$

où H est un sous-groupe ouvert compact infini de G. Θ est borélienne et d'après les théorèmes 9 et 10, on a

$$\Theta^{-1}(\mathscr{U}_G) = \mathscr{U}_H, \quad \Theta^{-1}(\mathscr{U}_{0_G}) = \mathscr{U}_{0_H}.$$

Par un argument analogue au précédent, on voit qu'il suffit de montrer que $\mathscr{U}_H$ et $\mathscr{U}_{0_H}$ ne sont pas boréliens.

Tout groupe abélien localement compact infini est produit direct d'un sous-groupe isomorphe à un groupe $\boldsymbol{R}^n$ et d'un sous-groupe admettant un sous-groupe ouvert compact [Bo, p. 136]. Si $n = 0$, G admet un sous-groupe ouvert compact H. Si G n'est pas discret, H est infini. Si $n \neq 0$, G admet un quotient infini isomorphe à Π^n. Ainsi, on voit qu'il suffit d'étudier la complexité des σ-idéaux de compacts $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ dans le cas d'un groupe abélien compact infini.

Si G est un groupe abélien infini métrisable compact, son dual $\hat{G}$ est un groupe abélien discret dénombrable infini. Alors $\hat{G}$ contient comme sous-groupe l'un des trois groupes suivants:

(i) $\boldsymbol{Z}$,

(ii) $\bigoplus_k G_k$ où chaque G_k est un groupe cyclique fini d'ordre p_k premier, les p_k étant distincts ou non [F, II, Proposition 77.5],

(iii) $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$, p premier, [F, I, § 23], $\boldsymbol{Q}_p$ est le corps des nombres p-adiques et $\boldsymbol{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques.

Donc, par dualité, G admet comme quotient compact infini l'un des trois groupes suivants [Bo, ch. II, § 7 et 9]:

(i) le tore Π,

(ii) $\prod_k G_k$ où chaque G_k est un groupe cyclique fini d'ordre p_k premier, les p_k étant distincts ou non,

(iii) $\boldsymbol{Z}_p$, l'anneau des entiers p-adiques, p premier.

Il suffit donc d'étudier la complexité de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ pour ces trois types de compacts.

II. Étude des cas particuliers.

DÉFINITION 1. Soit G un groupe abélien compact métrisable. Soit F un compact de G. On dit que F vérifie le *critère de Piatetski-Shapiro* s'il existe une suite de fonctions (f_k) dans $A(G)$ vérifiant:

(i) (f_k) tend vers $\mathbf{1}$ pour $\sigma(A(G), A_*(G))$.

(ii) $\operatorname{supp} f_k \cap F = \emptyset$.

PROPOSITION 2. *Tout compact vérifiant le critère de Piatetski-Shapiro est de type* $\mathscr{U}$.

Démonstration. Soit T une pseudo-fonction dont le support est contenu dans F, un compact vérifiant le critère de Piatetski-Shapiro. Soit (f_k) la suite de fonctions de $A(G)$ satisfaisant:

(i) (f_k) tend vers $\mathbb{1}$ pour $\sigma(A(G), A_*(G))$.

(ii) $\operatorname{supp} f_k \cap F = \emptyset$.

Pour tout k, on a $\langle T, f_k\rangle = 0$, donc $\langle T, 1\rangle = 0$, c'est-à-dire $\hat{T}(0) = 0$. Soit $\chi \in \hat{G}$. Posons $g_k = \chi f_k$. La suite g_k vérifie les propriétés (i) et (ii). Ceci implique $\hat{T}(\chi) = 0$. Par conséquent $\hat{T}$ est nulle, donc T est nulle, c'est-à-dire F est de type $\mathscr{U}$.

Le cas du tore est dû à R. Kaufman [Ka1] et R. M. Solovay.

THÉORÈME 3. *Dans* $\mathscr{K}(\Pi)$, $\mathscr{U}$ *et* $\mathscr{U}_0$ *ne sont pas boréliens.*

Démonstration. Nous redonnons un résumé de la démonstration due à R. M. Solovay. Une méthode analogue sera utilisée pour le cas où $G = Z_p$, l'anneau des entiers p-adiques.

On construit une application continue

$$\Psi\colon [0, 1] \to \mathscr{K}(\Pi), \quad \xi \to \Psi(\xi),$$

de la façon suivante: Soit l'intervalle $[0, 1]$. Posons $\eta_0 = 0$, $\eta_1 = \frac{3}{8}+\frac{\xi}{100}$, $\eta_2 = \frac{3}{4}$, $\varrho = \frac{1}{4}$ et enlevons les intervalles $]\frac{1}{4}, \frac{3}{8}+\frac{\xi}{100}[$, $]\frac{5}{8}+\frac{\xi}{100}, \frac{3}{4}[$. Dans chacun des intervalles de longueur $\frac{1}{4}$: $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{3}{8}+\frac{\xi}{100}, \frac{5}{8}+\frac{\xi}{100}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$ on recommence une "dissection" homothétique de même type et ainsi de suite. A la k-ième étape, on a 3^k intervalles de longueur ϱ^k. Soit E_k la réunion de ces intervalles. L'intersection $E = \bigcap_k E_k$ est un ensemble parfait sans point intérieur tel que $\mu(E) = 0$ puisque $\mu(E_k) = (3\varrho)^k$ (μ est la mesure de Lebesgue sur Π). Les points de E sont alors donnés par

$$x = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + \varepsilon_m \cdot \frac{1}{4^m} + \ldots \quad \text{avec } \varepsilon_j = \eta_0, \eta_1, \eta_2.$$

Alors $\Psi(\xi)$ est l'homothétique de cet ensemble dans le rapport 2π. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:

(1) ξ est rationnel.

(2) $\Psi(\xi)$ est de type $\mathscr{U}$.

(3) $\Psi(\xi)$ est de type $\mathscr{U}_0$ [K.S, ch. VI, no. 8].

Ψ est continue de $[0, 1]$ dans $\mathscr{K}(\Pi)$ muni de la topologie de Hausdorff. Considérons l'application

$$\Phi\colon \mathscr{K}([0, 1]) \to \mathscr{K}(\Pi), \quad L \to \bigcup_{\xi \in L} \Psi(\xi).$$

Φ est à valeurs dans $\mathscr{K}(\Pi)$ et est continue. Si K est un compact de Q, K est dénombrable et chaque $\Psi(\xi)$ est de type $\mathscr{U}$ pour ξ élément de K. D'après la définition de Φ, $\Phi(K)$ est de type $\mathscr{U}$. Si K n'est pas un compact de Q, il existe $\xi \in K$ tel que $\xi \notin Q$, alors $\Psi(\xi)$ n'est pas de type $\mathscr{U}_0$; il en est de même pour $\Phi(K)$. D'où $\Phi^{-1}(\mathscr{U}) = \Phi^{-1}(\mathscr{U}_0) = \mathscr{K}(Q)$. $\mathscr{K}(Q)$ n'est pas borélien [H]. Il en est de même pour $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$.

Nous étudions maintenant le cas où $G = Z_p$, l'anneau des entiers p-adiques. Nous prouvons un analogue des théorèmes de R. Salem et A. Zygmund utilisés dans le cas du tore. Pour des résultats sur les ensembles d'unicité dans Q_p, le lecteur pourra se référer aux travaux de Y. Meyer [Mey], utilisant les nombres de Pisot–Salem–Chabauty [Cha].

THÉORÈME 4. *Soit* $\lambda \in Z_p$ *tel que* $|\lambda - 1|_p \leqslant 1/p$. *On pose*

$$K(\lambda) = \Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n p^n\colon \varepsilon \in \{0, 1\}^N,\ a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} = \lambda\Big\} \quad \text{si } p \neq 2,$$

$$K(\lambda) = \Big\{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n 4^n\colon \varepsilon \in \{0, 1\}^N,\ a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} = \lambda\Big\} \quad \text{si } p = 2.$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) λ *est rationnel.*

(2) $K(\lambda)$ *est de type* $\mathscr{U}$.

(3) $K(\lambda)$ *est de type* $\mathscr{U}_0$.

Démonstration. Il suffit de montrer (1) $\Rightarrow$ (2) et (3) $\Rightarrow$ (1).

1) Supposons λ rationnel et montrons que $K(\lambda)$ vérifie le critère de Piatetski-Shapiro. On suppose tout d'abord $p \neq 2$.

Si λ est rationnel avec $|\lambda - 1|_p \leqslant 1/p$, λ est de la forme a/b avec a et b entiers premiers avec p.

Soit $\phi_m \in \hat{Z}_p$, ϕ_m représenté par b/p^{2m}. On a $\phi_m(1) = e^{2i\pi b/p^{2m}}$, d'où

$$\phi_m\big(\sum \varepsilon_n a_n p^n\big) = e^{2i\pi \sum_{j<2m} b\varepsilon_j a_j p^{j-2m}}.$$

Or

$$\sum_{j<2m} b\varepsilon_j p^{j-2m} = \sum_{\substack{j<2m \\ j \text{ pair}}} \varepsilon_j b p^{j-2m} + \sum_{\substack{j<2m \\ j \text{ impair}}} \varepsilon_j a p^{j-2m},$$

ou encore

$$\sum_{j<2m} b\varepsilon_j a_j p^{j-2m} = \sum_{j<2m} \varepsilon_j u_j p^{j-2m}, \quad u_j = a \text{ ou } b.$$

Soit $X = \{\sum_{j \geqslant 0} \varepsilon_j u_j p^{-j}\}$. X est un compact de $\boldsymbol{R}$. Soit μ la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R}$. Soit $K \in \boldsymbol{N}$. On a

$$\sum_{j \geqslant 0} \varepsilon_j u_j p^{-j} = \sum_{0 \leqslant j < K} \varepsilon_j u_j p^{-j} + \sum_{j \geqslant K} \varepsilon_j u_j p^{-j},$$

d'où

$$\mu(X) \leqslant 2 \sup_j |u_j| \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\frac{2}{p}\right)^K.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout K, on obtient $\mu(X) = 0$. Alors $Y = e^{2i\pi X}$ est un compact du tore de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur le tore. Soit $h \in A(\Pi)$ dont le support est disjoint de Y, et d'intégrale 1. Alors $h = \sum_{s\in \boldsymbol{Z}} \alpha_s z^s$ avec $\sum_{s\in\boldsymbol{Z}} |\alpha_s| < \infty$. Posons

$$f_m = h \circ \phi_m, \quad f_m = \sum_{s\in\boldsymbol{Z}} \alpha_s \phi_m^s.$$

Alors $\|f_m\|_{A(Z_p)} \leqslant \sum_{s\in\boldsymbol{Z}} |\alpha_s| < \infty$. f_m est dans $A(Z_p)$ et le support de f_m est disjoint de $K(\lambda)$. Si $B = \sum_{s\in\boldsymbol{Z}} |\alpha_s|$, B ne dépend pas de m et $\|f_m\|_{A(Z_p)} \leqslant B$. Soit $\xi \in \hat{Z}_p$. Alors

$$\hat{f}_m(\xi) = \sum_{s\in\boldsymbol{Z}} \alpha_s \int_{Z_p} \phi_m^s \, dm_{Z_p} = \sum_{\{s:\phi_m^s = \xi\}} \alpha_s.$$

Posons $E_m(\xi) = \{s\colon \phi_m^s = \xi\}$. On a

$$\bigcap_n \bigcup_{m\geqslant n} E_m(\xi) = \emptyset \quad \text{si } \xi \neq \mathbf{1}, \qquad \bigcap_n \bigcup_{m\geqslant n} E_m(\mathbf{1}) = \{0\}.$$

Donc (f_m) tend vers $\mathbf{1}$ pour $\sigma(A(Z_p), A_*(Z_p))$. Par conséquent, $K(\lambda)$ vérifie le critère de Piatetski-Shapiro, et donc est de type $\mathscr{U}$, d'après la proposition 2.

Si $p = 2$, une méthode analogue permet de montrer que

$$K(\lambda) = \Big\{\sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_n a_n 4^n\colon \varepsilon \in \{0, 1\}^{\boldsymbol{N}},\ a_{2n} = 1,\ a_{2n+1} = \lambda\Big\}$$

est de type $\mathscr{U}$, en posant ϕ_m représenté par $b/4^{2m}$.

2) Supposons que $K(\lambda)$ soit de type $\mathscr{U}_0$ et montrons que λ est rationnel. On suppose $p \neq 2$. Sur Z_p, on considère la mesure de probabilité suivante, dont le support est contenu dans $K(\lambda)$:

$$\nu = \mathop{*}_n \left(\frac{\delta_0 + \delta_{p^{2n}}}{2}\right) * \left(\frac{\delta_0 + \delta_{\lambda p^{2n+1}}}{2}\right).$$

Notons $e(t) = e^{2i\pi t}$. Soit $\beta \in \hat{Z}_p$. On a

$$\hat{\nu}(\beta) = \prod_n \left(\frac{1 + e(\beta p^{2n})}{2}\right)\left(\frac{1 + e(\lambda\beta p^{2n+1})}{2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\hat{\nu}(\beta) = e^{\Sigma i\pi\beta p^{2n}} e^{\Sigma i\pi\lambda\beta p^{2n+1}} \prod_{n\geqslant 0} \cos(\pi\beta p^{2n}) \cos(\pi\lambda\beta p^{2n+1}).$$

$K(\lambda)$ étant un ensemble de type $\mathscr{U}_0$, ν ne doit pas être une mesure de Rajchman. Donc il existe une infinité de $\beta \in \hat{Z}_p$ pour lesquels chacun des produits précédents est, en valeur absolue, supérieur à δ, $\delta > 0$. Soit (β_k) une suite extraite telle que $|\beta_k p^{2i_k}|_p \in \{1, 1/p\}$ (i_k suite strictement croissante) et que la suite $\beta_k p^{2i_k}$ tende vers β avec $|\beta|_p \in \{1, 1/p\}$.

Considérons le deuxième produit infini. On a

$$\delta^2 < \cos^2(\pi\lambda\beta_k p)\cos^2(\pi\lambda\beta_k p^3)\ldots\cos^2(\pi\lambda\beta_k p^{2n+1})\ldots \quad \text{pour tout } k,$$

$$\leqslant \cos^2(\pi\lambda\beta_k p^{2i_k+1})\cos^2\left(\pi\lambda\beta_k p^{2i_k+1}\frac{1}{p^2}\right)\ldots\cos^2\left(\pi\lambda\beta_k p^{2i_k+1}\frac{1}{p^{2i_k}}\right).$$

Une méthode analogue à celle de R. Salem [S] donne

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sin^2(\pi\lambda\beta p^{-2j+1}) < \infty.$$

On a $\lambda\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m p^m$ et $p^{-2j+1}\lambda\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m p^{m-2j+1}$. Dans $\sin^2(\pi\lambda\beta p^{-2j+1})$ n'intervient que la somme

$$\sum_{0\leqslant m<2j-1} \alpha_m p^{m-2j+1} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{q=1}^{2j-1} \alpha_{2j-q-1} p^{-q}.$$

Or

$$(\alpha_{2j-2} \neq 0 \vee \alpha_{2j-3} \neq 0 \vee \alpha_{2j-4} \neq 0) \wedge$$
$$(\alpha_{2j-2} \neq p-1 \vee \alpha_{2j-3} \neq p-1 \vee \alpha_{2j-4} \neq p-1)$$
$$\Rightarrow \sin^2(\pi\lambda\beta p^{-2j+1}) \geqslant \sin^2(\pi/p^3).$$

Puisque la série converge, pour j suffisamment grand, on a

$$\alpha_{2j-2} = \alpha_{2j-3} = \alpha_{2j-4} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_{2j-2} = \alpha_{2j-3} = \alpha_{2j-4} = p-1.$$

Si $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = 0$, alors à partir d'un certain rang $\alpha_j = 0$ et $\lambda\beta \in \boldsymbol{N}$. Si $\alpha_j = p-1$ à partir d'un certain rang K, on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m p^m = \sum_{m=0}^{K-1} \alpha_m p^m + (p-1)\sum_{m\geqslant K} p^m = l + (p-1)p^K \frac{1}{1-p}, \qquad l \in \boldsymbol{N}.$$

Donc $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m p^m$ est un entier relatif et $\lambda\beta \in \boldsymbol{Z}$.

Considérons le deuxième produit infini; on a

$$\delta^2 < \cos^2(\pi\beta_k)\cos^2(\pi\beta_k p^2)\ldots\cos^2(\pi\beta_k p^{2n})\ldots$$

$$\leqslant \cos^2(\pi\beta_k p^{2i_k})\cos^2\left(\pi\beta_k p^{2i_k}\frac{1}{p^2}\right)\ldots\cos^2\left(\pi\beta_k p^{2i_k}\frac{1}{p^{2i_k}}\right).$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sin^2(\pi\beta p^{-2j}) < \infty.$$

Si $\beta = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m p^m$, on obtient

$$\text{soit} \quad \gamma_{2m-1} = \gamma_{2m-2} = \gamma_{2m-3} = 0,$$
$$\text{soit} \quad \gamma_{2m-1} = \gamma_{2m-2} = \gamma_{2m-3} = p-1 \quad \text{pour } m \text{ grand}.$$

Donc $\beta \in Z$ et λ est un rationnel.

Si $p = 2$, le raisonnement est analogue, en remplaçant p par 4. Donc si $K(\lambda)$ est de type $\mathcal{U}_0$, λ est rationnel. Ceci achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 5. *Dans $\mathcal{K}(Z_p)$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_0$ ne sont pas boréliens.*

Démonstration. Soit $A = \{\lambda \in Z_p: |\lambda - 1|_p \leqslant 1/p\}$. On considère l'application continue Ψ suivante:

$$\Psi: A \to \mathcal{K}(Z_p), \quad \lambda \to K(\lambda).$$

L'ensemble des rationnels de A est dénombrable et dense en soi; il est donc homéomorphe à l'ensemble des rationnels de $\boldsymbol{R}$. Ainsi, par identification, on notera $\boldsymbol{Q}$ l'ensemble des rationnels de A. D'après le théorème précédent, on a

$$\lambda \in \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow K(\lambda) \in \mathcal{U}, \quad \lambda \in \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow K(\lambda) \in \mathcal{U}_0.$$

Soit

$$\Phi: \mathcal{K}(A) \to \mathcal{K}(Z_p), \quad \Phi(L) = \bigcup_{\lambda \in L} \Psi(\lambda).$$

Φ est à valeurs dans $\mathcal{K}(Z_p)$ et est continue, $\mathcal{K}(A)$ et $\mathcal{K}(Z_p)$ étant munis de la topologie de Hausdorff. Comme pour le théorème 3, on obtient $\Phi^{-1}(\mathcal{U}) = \Phi^{-1}(\mathcal{U}_0) = \mathcal{K}(\boldsymbol{Q})$. Ainsi $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_0$ ne sont pas boréliens.

Pour l'étude du dernier cas, il suffit d'étudier les deux groupes particuliers suivants:

$$G = \prod_k (\boldsymbol{Z}/p_k \boldsymbol{Z}) \quad (p_k \text{ premiers distincts}),$$

$$G = (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{N}} \quad (p \text{ premier}).$$

Soit σ une bijection de $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$ sur $\boldsymbol{N}$, par exemple $\sigma(k, l) = \langle k, l \rangle = \frac{1}{2}(k+l)(k+l+1)+k$. Soit

$$P = \{\varepsilon \in \{0, 1\}^{\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}}: \forall k \geqslant 0 \ \exists l_0 \geqslant 0 \ \forall l > l_0 \ \varepsilon_{(k,l)} = 0\};$$

alors

$$\check{P} = \{\varepsilon \in \{0, 1\}^{\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}}: \exists k \geqslant 0 \ \forall l_0 \geqslant 0 \ \exists l > l_0 \ \varepsilon_{(k,l)} = 1\}.$$

En utilisant la bijection σ, si $G = \prod_k (\boldsymbol{Z}/p_k \boldsymbol{Z})$ où les p_k sont premiers distincts, on peut écrire $G = \prod_{(k,l)} G_{(k,l)} = \prod_{(k,l)} (\boldsymbol{Z}/p_{(k,l)} \boldsymbol{Z})$.

De même, si $G = (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{N}}$, on peut écrire $G = \prod_{(k,l)} G_{(k,l)}$ avec $G_{(k,l)} = (\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^k$.

THÉORÈME 6. *Soit $G = \prod_{(k,l)} G_{(k,l)}$ avec $G_{(k,l)} = (\boldsymbol{Z}/p_{(k,l)} \boldsymbol{Z})$, $p_{(k,l)}$ premiers distincts. Soit $\varepsilon \in \{0, 1\}^{\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}}$. On pose*

$$H^{\varepsilon}_{(k,l)} = G_{(k,l)} \quad \text{si } \varepsilon_{(k,l)} = 0,$$

$$H^{\varepsilon}_{(k,l)} = G_{(k,l)} \setminus \left\{n: 0 \leqslant \frac{n}{p_{(k,l)}} < \frac{1}{k+4} \text{ ou } 0 \leqslant \frac{p_{(k,l)} - n}{p_{(k,l)}} < \frac{1}{k+4}\right\} \quad \text{si } \varepsilon_{(k,l)} = 1,$$

et $H(\varepsilon) = \prod_{(k,l)} H^{\varepsilon}_{(k,l)}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(1) $\varepsilon \in P$.

(2) *$H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{M}_0$.*

(3) *$H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer (1) $\Rightarrow$ (2) et (3) $\Rightarrow$ (1).

1) Supposons que ε soit un élément de P et montrons que $H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{M}_0$. Il faut construire une mesure de Rajchman dont le support est contenu dans $H(\varepsilon)$. Sur $H^{\varepsilon}_{(k,l)}$, on met la mesure de probabilité équirépartie $\nu_{(k,l)}$. Alors $\nu = \bigotimes_{(k,l)} \nu_{(k,l)}$ est une mesure de probabilité portée par $H(\varepsilon)$. Nous allons montrer $\hat{\nu} \in C_0(\hat{G})$. Soit $\chi \in \hat{G}$, $\hat{\nu}(\chi) = \prod_{(k,l)} \hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})$ où $\chi_{(k,l)}$ est la projection de χ sur le facteur (k, l).

Nous allons estimer $\hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})$ si $\chi_{(k,l)} \neq \boldsymbol{1}$. Afin de simplifier les notations, et en utilisant la bijection σ nous identifierons (k, l) à n.

Si $f \in L^1(\nu_n)$,

$$\nu_n(f) = \frac{1}{\lambda_n(H^{\varepsilon}_n)} \int_{H^{\varepsilon}_n} f \, d\lambda_n$$

où λ_n est la mesure de Haar sur G_n. On pose $\check{H}^{\varepsilon}_n = G_n \setminus H^{\varepsilon}_n$. Alors

$$|\hat{\nu}_n(\chi_n)| = \left|\frac{1}{\lambda_n(H^{\varepsilon}_n)} \int_{H^{\varepsilon}_n} \chi_n \, d\lambda_n\right| = \frac{1}{\lambda_n(H^{\varepsilon}_n)} \left|\int_{\check{H}^{\varepsilon}_n} \chi_n \, d\lambda_n\right| \leqslant \frac{\lambda_n(\check{H}^{\varepsilon}_n)}{1 - \lambda_n(\check{H}^{\varepsilon}_n)}.$$

Finalement $|\hat{\nu}_n(\chi_n)| \leqslant 3/(k+1)$ si $n = \sigma(k, l)$. On obtient donc

$$\sup_{\substack{\chi_{(k,l)} \in \hat{G}_{(k,l)} \\ \chi_{(k,l)} \neq 1}} |\hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})| \leqslant \frac{3}{k+1}.$$

Or,

$$(*) \qquad \forall \eta > 0 \ \exists K > 0 \ \forall k \geqslant K \quad \frac{3}{k+1} < \eta$$

et, puisque $\varepsilon \in P$, on a

$$\forall k' \geqslant 0 \ \exists l_{k'} \geqslant 0 \ \forall l \geqslant l_{k'} \quad \varepsilon_{(k',l)} = 0.$$

Alors si $\chi_{(k,l)} \neq \boldsymbol{1}$,

$$(**) \qquad \hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)}) = 0.$$

Soit $K_0 = \sup(\sup_{k'<K} \langle k', l_{k'} \rangle, K)$. Soit $(k, l) \in N \times N$ tel que $\langle k, l \rangle > K_0$. Si $k \geqslant K$, $|\hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})| < \eta$ d'après $(*)$. Si $k < K$ alors $l > l_k$, donc $|\hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})| < \eta$ d'après $(**)$. D'où $|\hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})| < \eta$ si $\langle k, l \rangle > K_0$.

L'ensemble des caractères de $\hat{G}$ pour lesquels $\chi_{(k,l)} = \mathbf{1}$ pour tout (k, l) tel que $\langle k, l \rangle > K_0$ est fini. C'est un compact de $\hat{G}$, soit L. Si $\chi \notin L$, $|\hat{\nu}(\chi)| = \prod_{(k,l)} |\hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})| < \eta$, c'est-à-dire $\hat{\nu} \in C_0(\hat{G})$. ν est donc une mesure de Rajchman portée par $H(\varepsilon)$ et $H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{M}_0$.

2) Supposons que ε soit dans $\check{P}$ et montrons que $H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{U}$. Nous allons montrer que $H(\varepsilon)$ vérifie le critère de Piatetski-Shapiro. Puisque ε appartient à $\check{P}$, il existe k tel que

$$\forall l_0 \geqslant 0 \; \exists l > l_0 \quad \varepsilon_{(k,l)} = 1.$$

On construit ainsi une suite d'entiers l_n tel que $l_{n+1} > l_n$ et $\varepsilon_{(k,l_n)} = 1$. Soit

$$f_n = (1, \ldots, 1, \chi_{(k,l_n)}, 1, \ldots) \quad \text{où } \chi_{(k,l)}(1) = e^{2\pi i/p_{(k,l)}}.$$

Posons $F = \overline{\bigcup_n f_n(H(\varepsilon))}$. Alors $F \neq \Pi$ car on peut trouver un voisinage de l'origine disjoint de F. Soit h dans $A(\Pi)$, positive, d'intégrale 1, à support disjoint de F. On a $h = \sum_{s \in \mathbf{Z}} \alpha_s z^s$ avec $\sum_{s \in \mathbf{Z}} |\alpha_s| < \infty$. Alors si $h_n = h \circ f_n$, $h_n \in A(G)$ et $\|h_n\|_{A(G)} \leqslant \sum_{s \in \mathbf{Z}} |\alpha_s|$. Pour tout n, le support de h_n est disjoint de $H(\varepsilon)$. Soit $\chi \in \hat{G}$. Alors $\hat{h}_n(\chi) = 0$ s'il existe un facteur (k, l) différent de (k, l_n) pour lequel $\chi_{(k,l)} \neq \mathbf{1}$. On a

$$\hat{h}_n(\chi) = \sum_{\{s : \chi^s_{(k,l_n)} = \chi'_{(k,l_n)}\}} \alpha_s \quad \text{si } \chi = (\ldots, 1, \ldots, \chi'_{(k,l_n)}, \ldots, 1, \ldots).$$

Puisque les p_k sont tous distincts, on a

$$\lim_{n \to \infty} \hat{h}_n(\chi) = 0 \quad \text{si } \chi \neq \mathbf{1}, \quad \lim_{n \to \infty} \hat{h}_n(\mathbf{1}) = 1.$$

La suite h_n tend vers $\mathbf{1}$ pour $\sigma(A(G), A_*(G))$. Par conséquent, $H(\varepsilon)$ vérifie le critère de Piatetski-Shapiro et, donc, est de type $\mathcal{U}$. Ceci achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 7. *Soit* $G = \prod_{(k,l)} G_{(k,l)}$ *où* $G_{(k,l)} = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^k$, *$p$ premier. Soit* $\varepsilon \in \{0, 1\}^{N \times N}$. *On pose*

$$H^{\varepsilon}_{(k,l)} = G_{(k,l)} \quad si\ \varepsilon_{(k,l)} = 0,$$
$$H^{\varepsilon}_{(k,l)} = G_{(k,l)} \setminus \{0\} \quad si\ \varepsilon_{(k,l)} = 1,$$

et $H(\varepsilon) = \prod_{(k,l)} H^{\varepsilon}_{(k,l)}$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\varepsilon \in P$.

(2) $H(\varepsilon)$ *est de type* $\mathcal{M}_0$.

(3) $H(\varepsilon)$ *est de type* $\mathcal{M}$.

Démonstration. Il suffit de montrer (1) $\Rightarrow$ (2) et (3) $\Rightarrow$ (1).

1) Supposons que ε appartienne à P et montrons que $H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{M}_0$. Comme précédemment, sur chaque $H^{\varepsilon}_{(k,l)}$, on met la mesure de probabilité équirépartie $\nu_{(k,l)}$ et l'on pose $\nu = \bigotimes_{(k,l)} \nu_{(k,l)}$. On obtient ainsi une mesure de probabilité dont le support est contenu dans $H(\varepsilon)$. Il faut montrer que ν est une mesure de Rajchman.

Si $\chi \in \hat{G}$, $\hat{\nu}(\chi) = \prod_{(k,l)} \hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})$. Si $\chi_{(k,l)} \neq \mathbf{1}$, une méthode analogue à celle du théorème précédent montre que

$$|\hat{\nu}_{(k,l)}(\chi_{(k,l)})| = \frac{1}{p^k} \cdot \frac{1}{1 - 1/p^k} = \frac{1}{p^k - 1}.$$

Puisque $\lim_{k \to \infty} 1/(p^k - 1) = 0$ et $\varepsilon \in P$, comme pour le théorème précédent, on obtient $\hat{\nu} \in C_0(\hat{G})$. Donc $H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{M}_0$.

2) Supposons que ε appartienne à $\check{P}$ et montrons que $H(\varepsilon)$ est de type $\mathcal{U}$. Puisque $\varepsilon \in \check{P}$, on a

$$\exists k \geqslant 0 \; \forall l_0 \geqslant 0 \; \exists l > l_0 \quad \varepsilon_{(k,l)} = 1.$$

On construit ainsi une suite d'entiers (l_n) tels que $l_{n+1} > l_n$ et $\varepsilon_{(k,l_n)} = 1$. Soit π_n: $G \to G_{(k,l_n)}$ la projection sur le facteur (k, l_n). Posons $f = p^k \mathbf{1}_{\{0\}}$. Pour tout n, $f \in A(G_{(k,l_n)})$. Posons $g_n = f \circ \pi_n$. Si $\chi \in \hat{G}$, $\hat{g}_n(\chi) = \int_G f \circ \pi_n \bar{\chi}\, dm_G$. D'où $\hat{g}_n(\chi) = 0$ s'il existe un facteur (k, l) différent de (k, l_n) pour lequel $\chi_{(k,l)} \neq \mathbf{1}$. On a

$$\hat{g}_n(\chi) = 1 \quad \text{si } \chi = (\ldots, 1, \ldots, \chi_{(k,l_n)}, \ldots, 1, \ldots),$$
$$g_n \in A(G), \quad \|g_n\|_{A(G)} \leqslant p^k,$$
$$\lim_{n \to \infty} \hat{g}_n(\chi) = 0 \quad \text{si } \chi \neq \mathbf{1}, \quad \lim_{n \to \infty} \hat{g}_n(\mathbf{1}) = 1.$$

Donc (g_n) tend vers $\mathbf{1}$ pour $\sigma(A(G), A_*(G))$. De plus, pour tout n, le support de g_n est disjoint de $H(\varepsilon)$. $H(\varepsilon)$ vérifie donc le critère de Piatetski-Shapiro; il est de type $\mathcal{U}$. Ceci achéve la démonstration du théorème.

THÉORÈME 8. *Si* $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^N$ (*p premier*) *ou* $G = \prod_k (\mathbf{Z}/p_k\mathbf{Z})$ (*p_k premiers distincts*), $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{U}_0$ *ne sont pas boréliens.*

Démonstration. En utilisant la bijection σ, on pose $G = \prod_{(k,l)} G_{(k,l)}$. Dans les deux cas, l'application

$$\Psi: \{0, 1\}^{N \times N} \to \mathcal{K}(G), \quad \varepsilon \to H(\varepsilon)$$

est continue. En effet, elle est la composée des applications suivantes qui sont continues:

$$\Phi_1: \{0, 1\}^{N \times N} \to \{0, 1\}, \quad \varepsilon \to \varepsilon_{(k,l)}, \quad \Phi_2: \{0, 1\} \to \mathcal{K}(G_{(k,l)}), \quad \varepsilon_{(k,l)} \to H^{\varepsilon}_{(k,l)},$$
$$\Phi_3: \prod_{(k,l)} \mathcal{K}(G_{(k,l)}) \to \mathcal{K}(G), \quad (H^{\varepsilon}_{(k,l)}) \to \prod_{(k,l)} H^{\varepsilon}_{(k,l)},$$

et l'on a, d'après les théorèmes 6 et 7, $\Psi^{-1}(\mathscr{U}) = \Psi^{-1}(\mathscr{U}_0) = \check{P}$. $\check{P}$ est un $G_{\delta\sigma}$ qui n'est pas G_δ [L.S-R]. On en déduit que $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ ne sont pas des G_δ. $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ étant deux σ-idéaux de compacts non G_δ, ils ne sont pas boréliens. D'où le résultat.

Finalement, on a obtenu le résultat annoncé: Si G est un groupe abélien localement compact, non discret, à base dénombrable, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}_0$ sont deux σ-idéaux de fermés coanalytiques non boréliens dans $\mathscr{F}(G)$.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur Jean Saint-Raymond pour ses précieux conseils et son écoute attentive qui m'ont amenée à réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur Alain Louveau qui m'a permis de connaître le théorème de Solovay.

Bibliographie

[Ba1] N. Bary, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, C. R. Acad. Sci. Paris **177** (1923), 1195–1197.

[Ba2] –, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Fund. Math. **9** (1927), 62–115.

[Bo] N. Bourbaki, *Théories spectrales*, ch. I, II, Actualités Sci. Indust. 1332, Hermann, Paris 1967.

[Ca] G. Cantor, *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Ann. 5 (1872), 123–132.

[Cha] C. Chabauty, *Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **231** (1950), 465–466.

[Ch] J. P. R. Christensen, *Topology and Borel Structure*, North-Holland Math. Stud. 10, Amsterdam 1974.

[F] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, vols. I, II, Academic Press, New York, 1970 and 1973.

[H] W. Hurewicz, *Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A)*, Fund. Math. **12** (1928), 78–109.

[K.S] J. P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Actualités Sci. Indust. 1301, Hermann, Paris 1963.

[Ka1] R. Kaufman, *Fourier transform and descriptive set theory*, Mathematika **31** (1984), 336–339.

[Ka2] –, *Absolutely convergent Fourier series and some classes of sets*, Bull. Sci. Math. **109** (1985), 363–372.

[K.L.W] A. S. Kechris, A. Louveau and W. H. Woodin, *The structure of σ-ideals of compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1) (1987), 263–288.

[Ku] C. Kuratowski, *Topologie*, vol. 1, PWN, Warszawa 1958.

[L.S-R] A. Louveau and J. Saint-Raymond, *Borel classes and closed games. Wadge-type and Hurewicz-type results*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (2) (1987), 431–467.

[M] D. Men'shov, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, C. R. Acad. Sci. Paris **163** (1916), 433–436.

[Mey] Y. Meyer, *Algebraic Numbers and Harmonic Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1972.

[P-S] I. I. Piatetski-Shapiro, *Sur le problème de l'unicité du développement

trigonométrique (en russe), Moskov. Gos. Univ. Uch. Zap. 155, Mat. 5 (1952), 54–72; ibid. 165, Mat. 7 (1954), 79–97; Uspekhi Mat. Nauk 8 (3) (1953), 167–170.

[Ra] A. Rajchman, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Fund. Math. **3** (1922), 287–302.

[Ru] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Tracts 12, Wiley, New York 1962.

[S] R. Salem, *Sets of uniqueness and sets of multiplicity*, Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 218–228, **56** (1944), 32–49; *Rectifications*, ibid. **63** (1948), 595–598.

[Y] W. H. Young, *A note on trigonometrical series*, Messenger of Math. **38** (1909), 44–48.

[Z] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2 vols., Cambridge Univ. Press, 1959.

ÉQUIPE D'ANALYSE
U.A. No. 754 au C.N.R.S.
UNIVERSITÉ PARIS VI
Tour 46, 4ème étage
4, Pl. Jussieu, 75252 Paris Codex 05, France

Received November 11, 1986 (2237)
Revised version June 17, 1987