STUDIA MATHEMATICA, T. XC. (1988)

Localisations des espaces de Besov

par

GÉRARD BOURDAUD (Paris)

Résumé. Soit $\omega \in \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$ telle que $\sum_{k \in \boldsymbol{Z}^n} \omega(x-k) = 1$. Pour tout $f \in \mathcal{D}'(\boldsymbol{R}^n)$, on pose $f_k(x) = \omega(x-k) f(x)$. On a alors les estimations:

(1) $$\Big(\sum_{k \in \boldsymbol{Z}^n} \|f_k\|_{B_p^{s,q}}^p\Big)^{1/p} \leqslant C \|f\|_{B_p^{s,q}} \quad (p \geqslant q),$$

(2) $$\|f\|_{B_p^{s,q}} \leqslant C \Big(\sum_{k \in \boldsymbol{Z}^n} \|f_k\|_{B_p^{s,q}}^p\Big)^{1/p} \quad (p \leqslant q).$$

Des contre-exemples montrent qu'on n'a ni (1) pour $p < q$, ni (2) pour $p > q$.

Soit $M(B_p^{s,q})$ l'algèbre des multiplicateurs ponctuels de $B_p^{s,q}$. Pour $q < p$, la condition

$$\sup_{k \in \boldsymbol{Z}^n} \|f_k\|_{M(B_p^{s,q})} < +\infty$$

n'entraîne pas nécessairement $f \in M(B_p^{s,q})$.

Toute distribution u sur $\boldsymbol{R}^n$ peut s'écrire

$$u = \sum_Q u_Q,$$

où les u_Q sont les restrictions (convenablement lissées) de u à des cubes Q, mutuellement congrus.

Un espace de Banach de distributions est *localisable en norme* l^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ si l'on a

$$\|u\| \approx \Big(\sum_Q \|u_Q\|^p\Big)^{1/p}.$$

Si, comme l'a montré J. Peetre, l'espace de Besov $B_p^{s,p}$ est localisable en norme l^p, ce n'est plus le cas pour $B_p^{s,q}$, si $q \neq p$; de plus, pour $s > n/p$ et $q < p$, l'appartenance locale-uniforme à $B_p^{s,q}$ ne suffit plus à caractériser les multiplicateurs ponctuels de l'algèbre $B_p^{s,q}$.

Notations. Tous les espaces fonctionnels sont définis sur $\boldsymbol{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue. On note systématiquement: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\boldsymbol{R}^n)$, $L^p = L^p(\boldsymbol{R}^n)$, etc. $\|f\|_p$ désigne la norme de f dans L^p.

Si E est un espace de Banach, $l^p(E)$ désigne l'espace des familles (x_j) d'éléments de E telles que $(\sum_j \|x_j\|_E^p)^{1/p} < +\infty$ (on ne spécifie pas l'ensemble d'indices, qui sera toujours évident dans le contexte).

$C, C', \ldots$ seront des constantes positives, dont la valeur peut changer d'une occurrence à l'autre; sauf mention contraire, elles dépendent exclusivement de la dimension n, de certaines fonctions auxiliaires (ω, h) et de l'espace fonctionnel considéré.

I. Généralités sur les espaces invariants par translations. Un *espace de Banach de distributions* (en abrégé: E.B.D.) est un sous-espace vectoriel E de $\mathscr{D}'$ muni d'une norme complète $\|\cdot\|_E$ rendant continue l'injection canonique $E \to \mathscr{D}'$.

On dit que E est *isométriquement invariant par translations* si, pour tout $a \in \boldsymbol{R}^n$, l'opérateur de translation

$$\tau_a f(x) = f(x-a)$$

est une isométrie de E sur lui-même.

Pour $\nu \in N$ et $f \in \mathscr{D}$, on pose

$$p_\nu(f) = \sum_{|\alpha| \leqslant \nu} \int_{\boldsymbol{R}^n} |f^{(\alpha)}(x)|\,dx.$$

La topologie de l'espace de Fréchet $\mathscr{D}(K)$, où K est un compact de $\boldsymbol{R}^n$, peut être définie à l'aide de la famille de normes $(p_\nu)_{\nu \in \boldsymbol{N}}$.

PROPOSITION 1. *Si E est un E.B.D. isométriquement invariant par translations, il existe $C > 0$ et $\nu \in N$ tels que, pour tout $u \in E$ et tout $f \in \mathscr{D}$, on ait*

$$|\langle u, f\rangle| \leqslant C\|u\|_E\, p_\nu(f);$$

en particulier, E est nécessairement un espace de distributions tempérées.

Preuve. Soit ω une fonction vérifiant

$$\sum_{k \in \boldsymbol{Z}^n} \omega(x-k) = 1 \qquad (\forall x \in \boldsymbol{R}^n)$$

et K le support de ω.

Par hypothèse sur E, la forme bilinéaire $\langle u, f\rangle$ est séparément continue – donc continue! – sur $E \times \mathscr{D}(K)$; il existe donc C et ν tels que

$$(1) \qquad |\langle u, f\rangle| \leqslant C\|u\|_E\, p_\nu(f) \qquad (\forall u \in E,\ \forall f \in \mathscr{D}(K)).$$

L'invariance de E par translations entraîne aussitôt qu'on a encore (1) pour toute f portée par un *translaté* de K. Pour n'importe quelle $f \in \mathscr{D}$, on peut donc écrire

$$|\langle u, f\rangle| = \sum_k |\langle u, \tau_k\omega\cdot f\rangle| \leqslant C\|u\|_E \sum_k p_\nu(\tau_k\omega\cdot f) \leqslant C'\|u\|_E\, p_\nu(f)$$

(la dernière inégalité s'obtient en observant que, pour tout $\alpha \in N^n$,

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}^n} |\omega^{(\alpha)}(x-k)| < +\infty). \ ■$$

Nous dirons que l'E.B.D. E est un *$\mathscr{D}$-module* si tout $f \in \mathscr{D}$ opère sur E par multiplication.

PROPOSITION 2. *Si E est un $\mathscr{D}$-module isométriquement invariant par translations, il existe $C > 0$ et $\nu \in N$ tels que, pour tous $u \in E$ et $f \in \mathscr{D}$, on ait*

$$\|fu\|_E \leqslant C\|u\|_E\, p_\nu(f);$$

en particulier E est aussi un $\mathscr{S}$-module.

Preuve. Il suffit de reprendre celle de la proposition 1, en faisant jouer à l'application bilinéaire $(u, f) \mapsto fu$ le même rôle que la forme bilinéaire $\langle u, f\rangle$. ■

Si E est un $\mathscr{S}$-module, toute $f \in \mathscr{S}'$ admet une norme comme multiplicateur de E:

$$\|f\|_{M(E)} = \sup\{\|fu\|_E\colon \|u\|_E \leqslant 1\}.$$

Sous les hypothèses de la proposition 2, on a

$$\|f\|_{M(E)} \leqslant C p_\nu(f);$$

d'où l'on tire aussitôt:

PROPOSITION 3. *Soient $f \in \mathscr{S}$ et $g \in \mathscr{D}$; sous les hypothèses de la proposition 2, la fonction $x \mapsto \|\tau_x g\cdot f\|_{M(E)}$ est à décroissance rapide quand $|x| \to +\infty$.*

II. Localisation des espaces de distributions. Dans ce paragraphe l'E.B.D. E sera un $\mathscr{D}$-module isométriquement invariant par translations.

Un *réseau* $\mathscr{R}$ de $\boldsymbol{R}^n$ est l'ensemble des $k_1 v_1 + \ldots + k_n v_n$, où $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \boldsymbol{Z}^n$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base donnée de $\boldsymbol{R}^n$.

Une fonction $g \in \mathscr{D}$ est dite *adaptée* au réseau $\mathscr{R}$ si l'on a

$$\sum_{r \in \mathscr{R}} g(x-r) = 1 \qquad (\forall x \in \boldsymbol{R}^n).$$

PROPOSITION 4. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Pour une distribution u les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) *Il existe un réseau $\mathscr{R}_0$ et une fonction g_0 adaptée à $\mathscr{R}_0$ tels que*

$$(\|\tau_r g_0\cdot u\|_E)_{r \in \mathscr{R}_0} \in l^p.$$

(ii) *Pour tout réseau $\mathscr{R}$ et toute $g \in \mathscr{S}$, on a*

$$(\|\tau_r g\cdot u\|_E)_{r \in \mathscr{R}} \in l^p.$$

Preuve. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) repose sur le lemme suivant:

LEMME 1. *Soit* $(u_r)_{r\in\mathscr{R}_0}$ *une famille d'éléments de* E, *portés respectivement par les boules* $|x-r|\leqslant\varrho$, *où* ϱ *est un nombre positif donné. Alors* $u=\sum_{r\in\mathscr{R}_0}u_r$ *vérifie l'estimation*

$$\big\|(\|\tau_s g\cdot u\|_E)_{s\in\mathscr{R}}\big\|_{l^p}\leqslant C\big\|(\|u_r\|_E)_{r\in\mathscr{R}_0}\big\|_{l^p},$$

où C *ne dépend que de* ϱ *et de* g.

Le lemme admis, il suffit d'écrire

$$u=\sum_{r\in\mathscr{R}_0}\tau_r g_0\cdot u$$

pour obtenir la proposition 4.

Preuve du lemme 1. Soit $\chi\in\mathscr{D}$ telle que $\chi(x)=1$ pour $|x|\leqslant\varrho$; alors $u_r=\tau_r\chi\cdot u_r$, de sorte que

$$\|\tau_s g\cdot u\|_E\leqslant\sum_{r\in\mathscr{R}_0}\|\tau_s g\cdot\tau_r\chi\|_{M(E)}\|u_r\|_E=\sum_{r\in\mathscr{R}_0}\|g\cdot\tau_{r-s}\chi\|_{M(E)}\|u_r\|_E$$

et l'estimation l^p s'obtient en combinant l'inégalité d'Young et la proposition 3. ■

Désignons par $(E)_{l^p}$ l'espace des distributions u telles que

$$\|u\|_{(E)_{l^p}}=\big\|(\|\tau_k\omega\cdot u\|_E)_{k\in\mathbf{Z}^n}\big\|_{l^p}<+\infty.$$

$(E)_{l^p}$ est un E.B.D. qui, d'après la proposition 4, ne dépend ni du choix du réseau particulier $\mathbf{Z}^n$, ni de la fonction ω adaptée au réseau.

On peut remplacer, au besoin, ω par une fonction $\theta\in\mathscr{S}$, convenablement choisie:

PROPOSITION 5. *Si* $\theta\in\mathscr{S}$ *ne s'annule pas sur le support de* ω, *on a*

$$\|u\|_{(E)_{l^p}}\approx\big\|(\|\tau_k\theta\cdot u\|_E)_{k\in\mathbf{Z}^n}\big\|_{l^p}.$$

Preuve. La minoration de $\|u\|_{(E)_{l^p}}$ résulte de la proposition 4 ((i) $\Rightarrow$ (ii)). Dans l'autre sens on observe que $\omega=g\theta$, où $g\in\mathscr{D}$; d'où

$$\|\tau_k\omega\cdot u\|_E\leqslant\|\tau_k g\cdot\tau_k\theta\cdot u\|_E\leqslant\|g\|_{M(E)}\|\tau_k\theta\cdot u\|_E.\ ■$$

III. Localisation des espaces de Besov. Nous dirons que l'E.B.D. E est *localisable en norme* l^p si $E=(E)_{l^p}$. Le lecteur trouvera en [4] la définition de l'espace de Besov inhomogène $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ ($s\in\mathbf{R}$, $p,q\in[1,+\infty]$).

THÉORÈME. (i) $B_p^{s,p}$ *est localisable en norme* l^p.

(ii) $B_p^{s,q}$ *est strictement inclus dans* $(B_p^{s,q})_{l^p}$ *pour* $q<p$.

(iii) $(B_p^{s,q})_{l^p}$ *est strictement inclus dans* $B_p^{s,q}$ *pour* $p<q$.

La première partie de l'énoncé est due à J. Peetre ([4], pp. 149–150); nous allons en déduire (ii) et (iii) par interpolation.

Supposons d'abord $q<p$ et considérons l'opérateur

$$T(f)=(\tau_k\omega\cdot f)_{k\in\mathbf{Z}^n}.$$

On sait que T envoie $B_p^{s,p}$ dans $l^p(B_p^{s,p})$; on a donc aussi

$$T\colon [B_p^{s_0,p},B_p^{s_1,p}]_{t,q}\to[l^p(B_p^{s_0,p}),l^p(B_p^{s_1,p})]_{t,q},$$

où $0<t<1$, $s=(1-t)s_0+ts_1$, $s_0<s_1$. Or, d'après Peetre ([4], p. 107),

$$[B_p^{s_0,p},B_p^{s_1,p}]_{t,q}=B_p^{s,q}$$

et, comme l'observe Cwikel [3], l'hypothèse $q\leqslant p$ entraîne

$$[l^p(B_p^{s_0,p}),l^p(B_p^{s_1,p})]_{t,q}\subset l^p([B_p^{s_0,p},B_p^{s_1,p}]_{t,q});$$

d'où l'inclusion $B_p^{s,q}\subset(B_p^{s,q})_{l^p}$.

Pour $p<q$, on introduit l'opérateur

$$S\big((f_k)_{k\in\mathbf{Z}^n}\big)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\tau_k\psi\cdot f_k,$$

où $\psi\in\mathscr{D}$ vérifie $\psi\omega=\omega$. Alors S envoie $l^p(B_p^{s,p})$ dans $B_p^{s,p}$ et l'on a, cette fois,

$$l^p(B_p^{s,q})\subset[l^p(B_p^{s_0,p}),l^p(B_p^{s_1,p})]_{t,q};$$

cela donne l'inclusion $(B_p^{s,q})_{l^p}\subset B_p^{s,q}$.

Il reste à prouver que les inclusions sont strictes, ce qui sera fait dans les deux paragraphes suivants.

IV. Contre-exemple: le cas $p>q$.

LEMME 2. *Soient* α,β *deux réels positifs tels que* $\alpha<\beta<2\alpha$; *il existe une constante* $\gamma>0$ *telle que, pour toute famille* $(u_j)_{j\geqslant1}$ *de fonctions de* L^p, *à spectres respectifs dans les couronnes* $\alpha2^j\leqslant|\xi|\leqslant\beta2^j$, *on ait*

$$\gamma^{-1}\Big(\sum_{j\geqslant1}2^{jsq}\|u_j\|_p^q\Big)^{1/q}\leqslant\Big\|\sum_{j\geqslant1}u_j\Big\|_{B_p^{s,q}}\leqslant\gamma\Big(\sum_{j\geqslant1}2^{jsq}\|u_j\|_p^q\Big)^{1/q}.$$

Preuve. L'inégalité de droite est une estimation classique dans les espaces de Besov (voir, par exemple, [1], chap. 6). Soit $v\in\mathscr{D}$ une fonction égale à 1 sur $\alpha\leqslant|\xi|\leqslant\beta$, portée par $a\leqslant|\xi|\leqslant b$, où

$$\beta/2<a<\alpha<\beta<b<2\alpha,$$

et V_j les opérateurs de symboles respectifs $v(2^{-j}\xi)$. On a $V_j(u_k)=0$ pour $k\neq j$ et $V_j(u_j)=u_j$, d'où

$$\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\|u_j\|_p^q\Big)^{1/q}=\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq}\Big\|V_j\Big(\sum_{k\geq 1} u_k\Big)\Big\|_p^q\Big)^{1/q}\leqslant C\Big\|\sum_{k\geq 1} u_k\Big\|_{B_p^{s,q}}$$

(la dernière inégalité est encore une estimation classique [1]). ∎

On suppose donc $p>q$ et l'on fait choix d'une famille de nombres positifs $(v_{j,k})_{j\geq 1,\,k\in \mathbf{Z}^n}$ telle que

$$(2)\qquad \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\Big(\sum_{j\geq 1} v_{j,k}^q\Big)^{p/q}\Big)^{1/p}<+\infty,$$

$$(3)\qquad \Big(\sum_{j\geq 1}\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}=+\infty.$$

(Par exemple: $v_{j,k}=|k|^{-n/p-1/q}\operatorname{Log}^{1/q}|k|$ pour $j\leqslant |k|$, $v_{j,k}=0$ sinon).

Soit $h\in\mathscr{S}$ une fonction positive à spectre dans la boule $|\xi|\leqslant\frac{1}{100}$ et

$$f_k(x)=\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{-js} v_{j,k}\exp(i2^j\pi x_1)\Big)h(x),$$

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} f_k(x-k)\,h(x-k).$$

Nous allons prouver:

$$(4)\qquad \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\|f_k\|_{B_p^{s,q}}^p\Big)^{1/p}<+\infty,$$

$$(5)\qquad f\notin B_p^{s,q}.$$

La fonction $\exp(i2^j\pi x_1)h$ a son spectre dans la couronne $3\cdot 2^j\leqslant|\xi|\leqslant 4\cdot 2^j$; il résulte donc du lemme 2:

$$\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\|f_k\|_{B_p^{s,q}}^p\Big)^{1/p}\leqslant C\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\Big(\sum_{j\geq 1} v_{j,k}^q\Big)^{p/q}\Big)^{1/p};$$

et (4) est la conséquence de (2).

On a

$$f(x)=\sum_{j\geq 1} 2^{-js}\exp(i2^j\pi x_1)\,h_j(x),$$

où $h_j(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}h^2(x-k)$; une nouvelle application du lemme 2 conduit à $\|f\|_{B_p^{s,q}}\geqslant C\big(\sum_{j\geq 1}\|h_j\|_p^q\big)^{1/q}$, avec

$$\|h_j\|_p^p=\int\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}h^2(x-k)\Big)^p dx\geqslant\int\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}^p h^{2p}(x-k)\,dx$$
$$=\|h^2\|_p^p\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}^p\Big),$$

de sorte que (5) est la conséquence de (3).

En reprenant la preuve de la proposition 4, on déduit facilement de (4) que $f\in(B_p^{s,q})_{l^p}$.

Finalement, nous venons de prouver que l'inclusion

$$B_p^{s,q}\subset(B_p^{s,q})_{l^p}$$

est stricte. ∎

V. Contre-exemple: le cas $p<q$. Nous reprenons intégralement les notations du §IV, en inversant les hypothèses sur $(v_{j,k})$:

$$(6)\qquad \Big(\sum_{j\geq 1}\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}^p\Big)^{q/p}\Big)^{1/q}<+\infty,$$

$$(7)\qquad \Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\Big(\sum_{j\geq 1} v_{j,k}^q\Big)^{p/q}\Big)^{1/p}=+\infty.$$

Alors $\|f\|_{B_p^{s,q}}\leqslant C\big(\sum_{j\geq 1}\|h_j\|_p^q\big)^{1/q}$, avec

$$\|h_j\|_p=\Big\|\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}\tau_k(h^2)\Big\|_p\leqslant C\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} v_{j,k}^p\Big)^{1/p},$$

d'où $f\in B_p^{s,q}$.

Nous allons prouver:

$$(8)\qquad \sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\|\tau_k h\cdot f\|_{B_p^{s,q}}^p=+\infty;$$

il en résultera (d'après la proposition 4) que $f\notin(B_p^{s,q})_{l^p}$.

Le lemme 2 fournit la minoration

$$\|\tau_k h\cdot f\|_{B_p^{s,q}}\geqslant C\Big(\sum_{j\geq 1}\|h_j\cdot\tau_k h\|_p^q\Big)^{1/q}.$$

Or

$$\|\tau_k h\cdot h_j\|_p^p=\int\Big(\sum_{l\in\mathbf{Z}^n} v_{j,l}h^2(x-l)\,h(x-k)\Big)^p dx$$
$$\geqslant\int\sum_{l\in\mathbf{Z}^n} v_{j,l}^p h^{2p}(x-l)\,h^p(x-k)\,dx\geqslant v_{j,k}^p\int h^{3p}(x)\,dx;$$

ainsi (8) est la conséquence de (7). ∎

VI. Le problème des multiplicateurs. Soit E un E.B.D. satisfaisant les hypothèses du §II. On supposera de plus que E contient $\mathscr{D}$ comme sous-espace dense.

L'espace des *multiplicateurs* de E (noté $M(E)$) est l'ensemble des distributions m pour lesquelles il existe $C>0$ tel que

$$\|mf\|_E\leqslant C\|f\|_E\qquad(\forall f\in\mathscr{D}).$$

$M(E)$ est un E.B.D. pour la norme

$$\|m\|_{M(E)}=\sup\{\|mf\|_E:\ f\in\mathscr{D},\ \|f\|_E\leqslant 1\}.$$

(Dans le cas où $m \in \mathcal{D}$, le lecteur notera que $\|m\|_{M(E)}$ est bien la norme déjà introduite au § I).

Si on a $E \subset M(E)$, la multiplication, définie initialement sur $\mathcal{D} \times E$, se prolonge par continuité à $E \times E$ et E devient une *algèbre* de distributions.

PROPOSITION 6. *Si E est localisable en norme l^p, alors $M(E)$ est localisable en norme l^∞. Si on a de plus $E \subset M(E)$, alors $M(E)$ coïncide avec $(E)_{l\infty}$.*

Preuve. Notons que $M(E)$ est lui-même invariant isométriquement par translations, d'où

$$\sup_{k \in \mathbf{Z}^n} \|\tau_k \omega \cdot m\|_{M(E)} \leqslant \|\omega\|_{M(E)} \|m\|_{M(E)};$$

inversement, si $\chi \in \mathcal{D}$ est identiquement 1 sur le support de ω, on a, pour tout $f \in \mathcal{D}$,

$$\|mf\|_E \leqslant C\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|\tau_k \omega \cdot mf\|_E^p\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \|\tau_k \omega \cdot m\|_{M(E)}^p \|\tau_k \chi \cdot f\|_E^p\Big)^{1/p}$$

$$\leqslant C' \big(\sup_{k \in \mathbf{Z}^n} \|\tau_k \omega \cdot m\|_{M(E)}\big) \|f\|_E;$$

d'où l'égalité $\big(M(E)\big)_{l\infty} = M(E)$.

On a encore

$$\sup_{k \in \mathbf{Z}^n} \|\tau_k \omega \cdot m\|_E \leqslant \|\omega\|_E \|m\|_{M(E)},$$

d'où $M(E) \subset (E)_{l\infty}$. Inversement, $E \subset M(E)$ entraîne

$$(E)_{l\infty} \subset \big(M(E)\big)_{l\infty} = M(E). \ \blacksquare$$

PROPOSITION 7. *Pour $1 \leqslant q < p \leqslant +\infty$ et $s > 0$, $M(B_p^{s,q})$ est strictement inclus dans $\big(M(B_p^{s,q})\big)_{l\infty}$.*

Preuve. Nous allons utiliser une classe particulièrement simple de multiplicateurs de $B_p^{s,q}$, à savoir l'espace de Hölder $C^t = B_\infty^{t,\infty}$, pour $t > s$:

LEMME 3. *On a $C^{s+\varepsilon} \subset M(B_p^{s,q})$ pour $s > 0$ et $\varepsilon > 0$; de plus,*

(9) $$\|m\|_{M(B_p^{s,q})} \leqslant C\varepsilon^{-1/q} \|m\|_{C^{s+\varepsilon}} \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1).$$

Preuve du lemme 3. L'inclusion est bien connue (voir, par exemple, [4]), mais nous devons disposer de l'estimation précise (9). Donnons-nous une décomposition de Littlewood–Paley dans $\mathcal{S}'$, disons:

$$u = \sum_{j \geqslant 0} \Delta_j u$$

(voir [1], chap. 6).

Si $m \in C^{s+\varepsilon}$ et $f \in B_p^{s,q}$, on écrit $mf = g_1 + g_2$, où

$$g_1 = \sum_{j \geqslant 1} \Delta_j f\Big(\sum_{k=0}^{j-1} \Delta_k m\Big), \quad g_2 = \sum_{j \geqslant 0} \Delta_j m\Big(\sum_{k=0}^{j} \Delta_k f\Big).$$

Le terme général (en j) de g_1 a son spectre dans une boule $|\xi| \leqslant C2^j$; on a donc (voir [2], proposition 1)

$$\|g_1\|_{B_p^{s,q}} \leqslant C\Big(\sum_{j \geqslant 1} 2^{jsq} \Big\|\Delta_j f\Big(\sum_{k=0}^{j-1} \Delta_k m\Big)\Big\|_p^q\Big)^{1/q},$$

mais

$$\Big\|\sum_{k=0}^{j-1} \Delta_k m\Big\|_\infty \leqslant \|m\|_{C^{s+\varepsilon}} \sum_{k=0}^{j-1} 2^{-k(s+\varepsilon)} \leqslant C' \|m\|_{C^{s+\varepsilon}},$$

d'où

$$\|g_1\|_{B_p^{s,q}} \leqslant C'' \|m\|_{C^{s+\varepsilon}} \|f\|_{B_p^{s,q}}.$$

De même

$$\|g_2\|_{B_p^{s,q}} \leqslant C\Big(\sum_{j \geqslant 0} 2^{jsq} \Big\|\Delta_j m\Big(\sum_{k=0}^{j} \Delta_k f\Big)\Big\|_p^q\Big)^{1/q}.$$

On a $\|\sum_{k=0}^{j} \Delta_k f\|_p \leqslant C \|f\|_{B_p^{s,q}}$, d'où

$$\|g_2\|_{B_p^{s,q}} \leqslant C' \|f\|_{B_p^{s,q}} \|m\|_{C^{s+\varepsilon}} \Big(\sum_{j \geqslant 0} 2^{-j\varepsilon q}\Big)^{1/q};$$

on conclut en observant que $(\sum_{j \geqslant 0} 2^{-j\varepsilon q})^{1/q}$ est un $O(\varepsilon^{-1/q})$ quand $\varepsilon \to 0$. $\blacksquare$

Pour $k \in \mathbf{Z}^n$, $|k| \geqslant 2$, on pose

$$m_k(x) = |k|^{-1/q} \sum_{j=2}^{|k|} 2^{-js} \exp(i2^j \pi x_1).$$

Le lemme 2 fournit l'estimation

$$\|m_k\|_{C^{s+1/|k|}} \leqslant C|k|^{-1/q} \sup_{2 \leqslant j \leqslant |k|} 2^{j/|k|} = 2C|k|^{-1/q}.$$

Le lemme 3 conduit alors à

$$\|m_k\|_{M(B_p^{s,q})} \leqslant C \quad (\forall k).$$

La fonction

$$m(x) = \sum_k m_k(x-k)\, h(x-k)$$

appartient donc à $\big(M(B_p^{s,q})\big)_{l\infty}$.

Soit

$$g(x) = \sum_{|k| \geqslant 2} |k|^{-n/p} \operatorname{Log}^{-1/q} |k|\, h(x-k);$$

quel que soit $\alpha \in N^n$, on a

$$\|g^{(\alpha)}\|_p \leqslant C_\alpha \Big(\sum_{|k| \geqslant 2} |k|^{-n} \operatorname{Log}^{-p/q} |k| \Big)^{1/p}$$

et le second membre de l'inégalité est fini, grâce à l'hypothèse $p > q$. Ainsi g et toutes ses dérivées appartiennent à L^p; à plus forte raison a-t-on $g \in B_p^{s,q}$.

Nous allons voir que mg n'appartient pas à $B_p^{s,q}$; il en résultera que m n'est pas un multiplicateur de $B_p^{s,q}$. On a

$$mg = \sum_{j \geqslant 2} 2^{-js} \exp(i 2^j \pi x_1)\, g_j(x), \qquad \text{où}$$

$$g_j(x) = \sum_{\substack{k,l \\ |l| \geqslant j}} |k|^{-n/p} |l|^{-1/q} \operatorname{Log}^{-1/q} |k|\, h(x-k)\, h(x-l).$$

Le lemme 2 donne aussitôt

$$\|mg\|^q_{B_p^{s,q}} \geqslant C \sum_{j \geqslant 2} \|g_j\|_p^q.$$

D'autre part

$$g_j(x) \geqslant \sum_{|k| \geqslant j} |k|^{-n/p - 1/q} \operatorname{Log}^{-1/q} |k|\, h^2(x-k);$$

d'où

$$\|g_j\|_p \geqslant C \Big(\sum_{|k| \geqslant j} |k|^{-n-p/q} \operatorname{Log}^{-p/q} |k| \Big)^{1/p} \geqslant C' j^{-1/q} \operatorname{Log}^{-1/q} j$$

et $\sum_{j \geqslant 2} \|g_j\|_p^q = +\infty$. ■

VII. Conclusion et remarques. 1° On peut s'attendre à obtenir

$$M(B_p^{s,q}) \subsetneq \big(M(B_p^{s,q})\big)_{l\infty}$$

également pour $q > p$.

2° Dans le cas particulier $s > n/p$ (et, toujours, $q < p$) la proposition 7 signifie que l'appartenance locale-uniforme à $B_p^{s,q}$ ne suffit pas à caractériser les multiplicateurs de l'algèbre $B_p^{s,q}$.

3° Nous avons montré ailleurs [2] que les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 opèrent sur $M(B_p^{s,p})$ pour $s > n/p$; cela provient précisément de l'égalité $M(B_p^{s,p}) = (B_p^{s,p})_{l\infty}$. Les O.$\psi$.D. d'ordre 0 opèrent-ils ou non sur $M(B_p^{s,q})$, quand $s > n/p$ et $q \neq p$?

4° Pour la commodité de l'exposition, nous avons supposé, au § VI, que $\mathscr{D}$ est dense dans E; ce n'est pas le cas pour $E = B_p^{s,q}$ si $q = +\infty$ ou $p = +\infty$. Ceci dit, il est facile de définir directement les multiplicateurs de $B_p^{s,q}$ dans ces deux cas et la conclusion de la proposition 7 est encore vraie pour $p = +\infty$ et $q < +\infty$.

Les observations du rapporteur nous ont permis d'améliorer le texte original sur plusieurs points. Qu'il en soit ici remercié.

Bibliographie

[1] G. Bourdaud, *Analyse fonctionnelle dans l'espace Euclidien*, Publ. Math. Univ. Paris VII, 1987.

[2] G. Bourdaud et M. Moussai, *Continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Besov localisés*, prépublication 86T27, Univ. de Paris-Sud, Département de Mathématique.

[3] M. Cwikel, *On* $(L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1))_{\theta,q}$, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (2) (1974), 286–292.

[4] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke Univ. Math. Ser. 1, 1976.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
UNITE ASSOCIÉE 757
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex, France

et

UNIVERSITÉ PARIS VII
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES
Tour 45-55, 5ème étage
2, Pl. Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

Received March 3, 1987
Revised version April 22, 1987
(2284)