Про Абелевий метод сумування

С. Сідон (Будапешт).

(Резюмо)

В цій ноті доведена така теорема:

Для того, щоб послідовність $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots$ була послідовністю множників в тіснішому розумінні для Абелевого методу сумації (тобто, щоб кожний сумовний цим методом ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ перетворювався в також сумовний цим методом ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k$), що задовольняє нерівність

$$\left| \lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k x^k \right| \leqslant C \max_{0<x<1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \right|,$$

де стала C залежить тільки від $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, необхідно і досить, щоб ця послідовність була квазі-повномонотонна (тобто, щоб була різницею двох обмежених і повномонотонних послідовностей).

Über Algebren mit endlicher Basis

von

D. WAJNSZTEJN (Rowno).

0.1. Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring, so bestimmen die Elemente aus $\mathfrak{R}$ eine Algebra. Sind die Elemente aus $\mathfrak{R}$ Matrizen, so bestimmt $\mathfrak{R}$ eine Matrizenalgebra. Ist $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}$ eine Untermenge von $\mathfrak{R}$ und ist $\mathfrak{P}$ auch ein Ring, so nennen wir die von $\mathfrak{P}$ bestimmte Algebra eine Unteralgebra.

Ist $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion von einer endlichen Anzahl von Symbolen

$$\varepsilon_1, \; \varepsilon_2, \; \varepsilon_3, \ldots, \; \varepsilon_n$$

zum Ring der gewöhnlichen komplexen Zahlen entstanden (indem ε_σ bei Multiplikation mit komplexen Zahlen vertauschbar und für ε_σ eine Multiplikationstafel angegeben ist), so nennen wir $\mathfrak{R}$ ein hyperkomplexes Zahlensystem und die von $\mathfrak{R}$ bestimmte Algebra nennen wir hyperkomplexe Algebra oder Algebra mit einer endlichen Basis (ε_σ nennen wir hyperkomplexe Einheiten).

Poincaré[1]) hat folgenden Satz bewiesen:

Jede hyperkomplexe Algebra ist einer Matrizenalgebra isomorph.

0.2. W. K. Clifford[2]) hat hyperkomplexe Zahlensysteme mit 2^n Einheiten untersucht. Er erklärt die hyperkomplexen Einhei-

---

[1]) L. E. Dickson, Algebras and their arithmetics, p. 92.

[2]) W. Clifford, American Journ. of Baltimore 1 (1878) p. 350—358; Enzykl. der Math. Wiss. III A—B, p. 1410—1419. D. Wajnsztejn, Annales de la Soc. Pol. de Math. 16 (1937) p. 65.

ten auf folgende Weise. Es seien $n+1$ sogenannte Primitiveinheiten gewählt,

$$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n,$$

welche den folgenden Gleichungen genügen:

$$\varepsilon_\sigma^2 = -1 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

$$\varepsilon_\lambda \varepsilon_\mu + \varepsilon_\mu \varepsilon_\lambda = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda \neq \mu). \tag{2}$$

Als hyperkomplexe Einheiten werden folgende 2^n Symbole

$$\begin{array}{c}
1 \\
\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n \\
\varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_1\varepsilon_n, \varepsilon_2\varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \\
\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4, \ldots, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-2}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n
\end{array}$$

angenommen.

Jede Zahl des Cliffordsystems hat die Form

$$N = a + a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n + a_{1,2}\varepsilon_1\varepsilon_2 + \ldots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n + a_{1,2,3}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + a_{1,2,\ldots,n}\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n.$$

Sind $a, a_1, \ldots, a_n, a_{1,2}, \ldots, a_{n-1,n}, a_{1,2,3}, \ldots, a_{1,2,\ldots,n}$ reelle Größen, so haben wir ein reelles Cliffordsystem, sind aber $a, a_1, \ldots, a_n, a_{1,2}, \ldots, a_{n-1,n}, a_{1,2,3}, \ldots, a_{1,2,\ldots,n}$ komplexe Größen, so haben wir ein komplexes Cliffordsystem. Clifford hat reelle Systeme untersucht. Eddington[3]), Littlewood[4]), und Newman[5]) haben sich mit komplexen Cliffordsystemen beschäftigt. A. Mercier[6]) hat die Gleichung (1) durch die Gleichung

$$\varepsilon_\sigma^2 = 1 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.a}$$

ersetzt. Lassen wir aber komplexe Cliffordsystemen, so führt die

[3]) A. S. Eddington, Relativity theory of the protons and electrons. Cambridge, (1936) p. 20—50, Journal of the London Math. Soc. 7 (1932) p. 58, 8 (1933) p. 142.

[4]) J. E. Littlewood, Journal of the London Math. Soc. 9 (1934) p. 44.

[5]) M. H. A. Newman, Journal of the London Math. Soc. 7 (1932) p. 93.

[6]) A. Mercier, Archive Sc. Physiques (1935) p. 307.

Gleichung (1.a) nichts neues ein. (Es genügt ja bloß ε_σ mit $i = \sqrt{-1}$ zu multiplizieren).

Wir werden uns mit komplexen Cliffordsystemen befassen.

0.3. Das Hauptresultat der vorliegenden Note lautet:

Jede Algebra mit einer endlichen Basis ist einer Unteralgebra der Cliffordzahlen isomorph.

1.1. Es gibt eine isomorphe Abbildung der Matrizen vom Grade p auf eine Untermenge der Matrizen vom Grade $p+l$.

Es genügt zu bemerken, daß

$$A = \| a_{\lambda,\mu} \| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, p)$$

der Matrix

$$A_1 = \begin{array}{c}
\begin{array}{r} \overbrace{\hphantom{0, 0, \ldots, 0}}^{l \text{ Kolonnen}} \end{array} \\
\left\| \begin{array}{cccccccc}
a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1p}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2p}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{p1}, & a_{p2}, & \ldots, & a_{pp}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0
\end{array} \right\|
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} l \text{ Zeilen} \end{array}$$

vom Grade $p+l$ isomorph entspricht.

Daraus folgt der Satz:

Jede Matrizenalgebra vom Grade p ist einer Untermatrizenalgebra vom Grade $p+l$ isomorph.

1.2. Im weiteren werden wir uns mit Matrizen vom Grade 2^n beschäftigen. Wenden wir den Satz aus 1.1 an, so kommen wir zum Schluß:

Jede Matrizenalgebra ist einer Untermatrizenalgebra vom Grade 2^n (für genügend große n) isomorph.

1.3. Beachten wir den Satz (0.1) von Poincaré, so kommen wir zum Schluß:

Jede Algebra mit einer endlichen Basis ist einer Untermatrizenalgebra vom Grade 2^n isomorph (n genügend groß).

2.1. Wir definieren rekursiv die endliche Matrizenfolge $E_{(2^n)}$. Es ist eine Folge von 4^n Matrizem vom Grade 2^n, die für ganze natürliche n erklärt sind. Die Matrizen dieser Menge werden mit den großen lateinischen Buchstaben E und mit dem Index $\sigma(2^n)$ bezeichnet, also $E_{\sigma(2^n)}$. Der erste Index bezeichnet die Nummer der Elemente der Folge (also σ läuft von 1 bis 4^n: $\sigma = 1, 2, 3, \ldots, 4^n$), der zweite eingeklammerte Index bezeichnet den Grad der Matrizen.

Definitionen. *Die vier Matrizen $E_{(2)}$ vom Grade 2^1 sind die Matrizen:*

(3) $$E_{1(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad E_{2(2)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad E_{3(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \quad E_{4(2)} = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Die 4^n Matrizen der Folge $E_{(2^n)}$ sind die Matrizen

(4) $$E_{\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \qquad E_{4^{n-1}+\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \\ E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}$$
$$E_{2.4^{n-1}+\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & -E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \quad (i = \sqrt{-1};$$
$$E_{3.4^{n-1}+\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & i E_{\sigma(2^{n-1})} \\ -i E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, 4^{n-1})$$

indem $\mathfrak{O}_{2^{n-1}}$ die Nullmatrix vom Grade 2^{n-1} bezeichnet.

2.2. *Die Matrizen $E_{(2^n)}$ sind linear unabhängig.*

Wir führen einen Rekursivbeweis durch. Sind die Matrizen $E_{\sigma(2)}$ $(\sigma = 1, 2, 3, 4)$ linear abhängig, so gibt es vier Zahlen c_1, c_2, c_3, c_4 mit

(5) $$|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| \neq 0,$$

für welche

(6) $$c_1 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + c_2 \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} + c_3 \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} + c_4 \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

gilt. Führen wir die Rechnungen aus, so bekommen wir aus (6)

$$\begin{Vmatrix} c_1 + c_3 & c_2 + i c_4 \\ c_2 - i c_4 & c_1 - c_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$c_1 + c_3 = 0, \qquad c_2 + i c_4 = 0,$$
$$c_1 - c_3 = 0, \qquad c_2 - i c_4 = 0.$$

Daraus erhalten

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0,$$

was (5) widerspricht. Die Matrizen $E_{(2)}$ sind also linear unabhängig.

Wir nehmen an, daß die Matrizen $E_{(2^{n-1})}$ linear unabhängig sind und beweisen, daß es dann die Matrizen $E_{(2^n)}$ auch sind.

Denn wären die Matrizen $E_{(2^n)}$ linear abhängig, so gäbe es 4^n Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_{4^n}$$

mit

(7) $$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_{4^n}| \neq 0$$

und

(8) $$c_1 E_{1(2^n)} + c_2 E_{2(2^n)} + \ldots + c_{4^n} E_{4^n(2^n)} = \mathfrak{O}_{2^n}.$$

Aus (8) und (4) folgt

(9) $$\sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} c_\sigma \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} + \sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} c_{4^{n-1}+\sigma} \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \\ E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} c_{2.4^{n-1}+\sigma} \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & -E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix}$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} c_{3.4^{n-1}+\sigma} \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & i E_{\sigma(2^{n-1})} \\ -i E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix} = \mathfrak{O}_{2^n}.$$

Aus (9) folgt

$$\begin{Vmatrix} \sum\limits_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_\sigma + c_{2.4^{n-1}+\sigma}) E_{\sigma(2^{n-1})} & \sum\limits_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_{4^{n-1}+\sigma} + i c_{3.4^{n-1}+\sigma}) E_{\sigma(2^{n-1})} \\ \sum\limits_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_{4^{n-1}+\sigma} + c_{3.4^{n-1}+\sigma}) E_{\sigma(2^{n-1})} & \sum\limits_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_\sigma - c_{2.4^{n-1}+\sigma}) E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$(10)\quad \begin{aligned}
&\sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_\sigma + c_{2.4^{n-1}+\sigma})\, E_{\sigma(2^{n-1})} = \mathfrak{O}_{2^{n-1}}\,,\\
&\sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_{4^{n-1}+\sigma} - i\, c_{3.4^{n-1}+\sigma})\, E_{\sigma(2^{n-1})} = \mathfrak{O}_{2^{n-1}}\,,\\
&\sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_{4^{n-1}+\sigma} + i\, c_{3.4^{n-1}+\sigma})\, E_{\sigma(2^{n-1})} = \mathfrak{O}_{2^{n-1}}\,,\\
&\sum_{\sigma=1}^{4^{n-1}} (c_\sigma - c_{2.4^{n-4}+\sigma})\, E_{\sigma(2^{n-1})} = \mathfrak{O}_{2^{n-1}}\,.
\end{aligned}$$

Aus der Annahme, daß die 4^{n-1} Matrizen $E_{\sigma(2^{n-1})}$ linear unabhängig sind, und aus den Gleichheiten (10) folgt

$$(11)\quad \begin{matrix} c_\sigma + c_{2.4^{n-1}+\sigma} = 0 & c_{4^{n-1}+\sigma} + i\, c_{3.4^{n-1}+\sigma} = 0\,, \\ c_\sigma - c_{2.4^{n-1}+\sigma} = 0 & c_{4^{n-1}+\sigma} - i\, c_{3.4^{n-1}+\sigma} = 0 \end{matrix} \quad (\sigma = 1, 2, 3, \ldots, 4^{n-1}).$$

Aus (11) folgt

$$c_\sigma = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, \ldots, 4^n),$$

was (7) widerspricht. Damit ist unser Satz bewiesen.

2.3. Es sei eine beliebige Matrix M vom Grade 2^n gegeben. Die Matrizen

$$(12)\qquad M,\ E_{1(2^n)},\ E_{2(2^n)}, \ldots,\ E_{4^n(2^n)}$$

bilden eine Menge von 4^n+1 Matrizen. Auf Grund des Satzes, daß $(2^n)^2+1 = 4^n+1$ Matrizen vom Grade 2^n stets linear abhängig sind, kommen wir zum Schluß, daß die Matrizen (12) linear abhängig sind. Also gibt es 4^n+1 Konstanten

$$c_0,\ c_1,\ c_2, \ldots,\ c_{4^n}$$

mit

$$|c_0| + |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_{4^n}| \neq 0,$$

für welche die Gleichung

$$(13)\qquad c_0 M + c_1 E_{1(2^n)} + c_2 E_{2(2^n)} + \ldots + c_{4^n} E_{4^n(2^n)} = \mathfrak{O}_{2^n}$$

gilt, wo $\mathfrak{O}_{2^n}$ die Nullmatrix vom Grade 2^n ist.

2.31. Auf Grund des Satzes aus 2.2, daß die Matrizen $E_{(2^n)}$ linear unabhängig sind, folgt, daß $c_0 \neq 0$ ist, also darf man die Gleichungen (13) in Bezug auf M auflösen:

$$(14)\qquad M = a_1 E_{1(2^n)} + a_2 E_{2(2^n)} + a_3 E_{3(2^n)} + \ldots + a_{4^n} E_{4^n(2^n)}\,,$$

indem $a_\sigma = -\dfrac{c_\sigma}{c_0}$ gesetzt wird.

2.32. Aus der Gleichung (14) folgt:

Das System der Matrizen vom Grade 2^n bildet ein hyperkomplexes Zahlensystem, für welches man die 4^n Matrizen $E_{(2^n)}$ als hyperkomplexe Einheiten wählen darf[7]).

2.33. Auf Grund des Satzes aus 1.3 und der Gleichheit (14) haben wir:

Jede Algebra mit einer endlichen Basis ist einer Untermatrizenalgebra mit den 4^n hyperkomplexen Einheiten $E_{(2^n)}$ isomorph (n genügend groß).

2.4. Es gilt die Gleichheit

$$(15)\qquad E^2_{\sigma(2^n)} = \|\delta_{\lambda,\mu}\| = E_{1(2^n)} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, 4^n;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2^n),$$

wo $\delta_{\lambda,\mu}$ Kroneckers Delta-Symbole bedeuten

$$(16)\qquad \delta_{\lambda,\mu} = 0\,,\quad \delta_{\lambda,\lambda} = 1 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2^n;\ \lambda \neq \mu).$$

2.41. Zum Beweis werden wir folgenden Hilfssatz[8]) gebrauchen:

Ist

$$M = \|m_{\lambda,\mu}\| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$$

---

[7]) Diesen Satz hat schon Littlewood in Journal of the L. M. S. 9 (1934) 44 bewiesen. Sein Beweis, der sich auf Gruppentheoretischen Eigenschaften stützt ist aber nur ein Existenzbeweis für den Isomorphismus des Systems der Matrizen vom Grade 2^n mit den Cliffordzahlensystem von 4^n Einheiten. Der Beweis den wir geführt haben ist ein elementarer Beweis und gibt die Möglichkeit effektiv eine Matrix vom Grade 2^n als eine Cliffordzahl mit der Basis $E_{(2^n)}$ darzustellen. Man gebraucht dazu nur ein System von 4^n ineare Gleichungen aufzulösen, die aus (14) folgen.

[8]) C. C. Mac Duffee, The theory of Matrices, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete. 2. 5 (1933), p. 3—4.

eine Matrix vom Grade 2^n, so bezeichnen wir mit $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$ bzw. $M^{(4)}$ die Teilmatrizen [9])

$$\begin{aligned} (17)\qquad & M^{(1)} = \| m_{\lambda,\mu} \|, & M^{(2)} = \| m_{\lambda,\, 2^{n-1}+\mu} \|, \\ & M^{(3)} = \| m_{2^{n-1}+\lambda,\, \mu} \|, & M^{(4)} = \| m_{2^{n-1}+\lambda,\, 2^{n-1}+\mu} \| \\ & (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, 2^{n-1}). \end{aligned}$$

Sind A und B Matrizen vom Grade 2^n und ist $A \cdot B = D$, so gelten die Formeln

$$\begin{aligned} (18)\qquad & D^{(1)} = A^{(1)} B^{(1)} + A^{(2)} B^{(3)}, & D^{(2)} = A^{(1)} B^{(2)} + A^{(2)} B^{(4)}, \\ & D^{(3)} = A^{(3)} B^{(1)} + A^{(4)} B^{(3)}, & D^{(4)} = A^{(3)} B^{(2)} + A^{(4)} B^{(4)}. \end{aligned}$$

2.42. Wir führen einen Rekursivbeweis für den Satz aus 2.4 durch. Durch unmittelbare Ausrechnung stellen wir die Richtigkeit für die Formel (15) im Falle $n = 1$ fest.

Nehmen wir an, daß die Formel (15) für $E_{\sigma(2^{n-1})}$ bewiesen ist, so folgt aus dieser Annahme und aus den Formeln (4) bzw. (18)

$$E^2_{\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E^2_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E^2_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{1(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = E_{1(2^n)} = \| \delta_{\lambda,\mu} \|,$$

$$E^2_{4^{n-1}+\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \\ E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \\ E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} E^2_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E^2_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{1(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = E_{1(2^n)} = \| \delta_{\lambda,\mu} \|,$$

$$E^2_{2.4^{n-1}+\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & -E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & -E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} E^2_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E^2_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{1(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = E_{1(2^n)} = \| \delta_{\lambda,\mu} \|,$$

[9]) D. Wajnsztejn, Annales de la Soc. Pol. de Math. 16 (1937) pp. 66, 70.

$$E^2_{3.4^{n-1}+\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & i E_{\sigma(2^{n-1})} \\ -i E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & i E_{\sigma(2^{n-1})} \\ -i E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}$$
$$= \begin{Vmatrix} E^2_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E^2_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{1(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = E_{1(2^n)} = \| \delta_{\lambda,\mu} \|$$
$$(\sigma = 1, 2, 3, \dots, 4^{n-1};\ \ \lambda, \mu = 1, 2, \dots, 2^n).$$

Die vollständige Induktion erweist also (15) als richtig.

3.1. Wir definieren rekursiv $2n$ Matrizen vom Grade 2^n (für ganze n), die wir mit $\mathfrak{E}_{\sigma(2^n)}$ $(\sigma = 1, 2, \dots, 2n)$ bezeichnen werden.

Wir setzen nämlich:

$$(19)\qquad \mathfrak{E}_{1(2)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \mathfrak{E}_{2(2)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Behalten wir die Bezeichnungen (17) aus 2.41, so definieren wir $\mathfrak{E}_{\sigma(2^n)}$ durch die Gleichheiten

$$(20)\qquad \mathfrak{E}^{(1)}_{\sigma(2^n)} = \mathfrak{E}^{(4)}_{\sigma(2^n)} = \mathfrak{E}_{\sigma(2^{n-1})}, \qquad \mathfrak{E}^{(2)}_{\sigma(2^n)} = \mathfrak{E}^{(3)}_{\sigma(2^n)} = \mathfrak{O}_{2^{n-1}}$$
$$(\sigma = 1, 2, \dots, 2n-2),$$

wo $\mathfrak{O}_{2^{n-1}}$ die Nullmatrix vom Grade 2^{n-1} bezeichnet.

$$\begin{aligned} (21)\qquad & \mathfrak{E}^{(1)}_{2n-1(2^n)} = \mathfrak{E}^{(4)}_{2n-1(2^n)} = \mathfrak{O}_{2^{n-1}}, & \mathfrak{E}^{(2)}_{2n-1(2^n)} = \mathfrak{E}^{(3)}_{2n-1(2^n)} = E_{1(2^{n-1})}, \\ & \mathfrak{E}^{(1)}_{2n(2^n)} = -\mathfrak{E}^{(4)}_{2n(2^n)} = E_{1(2^{n-1})}, & \mathfrak{E}^{(2)}_{2n(2^n)} = \mathfrak{E}^{(3)}_{2n(2^n)} = \mathfrak{O}_{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

$E_{1(2^{n-1})}$ ist die in (15) definierte Einheitsmatrix vom Grade 2^{n-1}.

Die Matrizen $\mathfrak{E}_{\sigma(2^n)}$ sind also die Matrizen:

$$\mathfrak{E}_{\sigma(2^n)} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{E}_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & \mathfrak{E}_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, 2n-2),$$

$$\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & E_{1(2^{n-1})} \\ E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}, \qquad \mathfrak{E}_{2n(2^n)} = \begin{Vmatrix} E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{O}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{O}_{2^{n-1}} & -E_{1(2^{n-1})} \end{Vmatrix}.$$

3.2. Man beweist rekursiv, daß *die Matrizen $\mathfrak{E}_{\sigma(2^n)}$ Elemente der Matrizenfolge $E_{(2^n)}$ sind.*

Wir übergehen den leichten Beweis.

3.3. Rekursiv beweisen wir, daß

Jede Matrix aus $E_{(2^n)}$ dem Produkt einer endlichen Anzahl von Matrizen $\mathfrak{E}_{\sigma(2^n)}$ und einer komplexen Zahl gleich ist.

Für $E_{(2)}$ ist es augenscheinlich, denn es gilt:

$$E_{2(2)} = \mathfrak{E}_{1(2)}, \qquad E_{3(2)} = \mathfrak{E}_{2(2)}, \qquad E_{4(2)} = i\,\mathfrak{E}_{2(2)}\,\mathfrak{E}_{1(2)}.$$

Wir nehmen an, der Satz 3.3 sei für die Matrizenfolge $E_{(2^{n-1})}$ bewiesen und beweisen ihn für die Matrizenfolge $E_{(2^n)}$.

Auf Grund unserer Annahme gilt

$$E_{\sigma(2^{n-1})} = \zeta.\mathfrak{E}_{\mu_1(2^{n-1})}\,\mathfrak{E}_{\mu_2(2^{n-1})}\ldots\mathfrak{E}_{\mu_k(2^{n-1})}$$
$$(\sigma = 2, 3, \ldots, 4^{n-1};\ \zeta \text{ komplex}).$$

Daraus und aus (4) bzw. (20) folgt

$$E_{\sigma(2^n)} = \zeta.\mathfrak{E}_{\mu_1(2^n)}\,\mathfrak{E}_{\mu_2(2^n)}\ldots\mathfrak{E}_{\mu_k(2^n)} \qquad (\sigma = 2, 3, \ldots, 4^{n-1}). \tag{22}$$

Aus (4), (21) und (22) kommt

$$\begin{aligned} E_{4^{n-1}+\sigma(2^n)} &= \begin{Vmatrix} \mathfrak{D}_{2^{n-1}} & E_{1(2^{n-1})} \\ E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{D}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{D}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{D}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \\ &= \mathfrak{E}_{2n-1(2^n)}.E_{\sigma(2^n)} = \zeta.\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)}.\mathfrak{E}_{\mu_1(2^n)}\ldots\mathfrak{E}_{\mu_k(2^n)} \\ &\qquad (\sigma = 1, 2, 3, \ldots, 4^{n-1}), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} E_{2.4^{n-1}+\sigma(2^n)} &= \begin{Vmatrix} E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{D}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{D}_{2^{n-1}} & -E_{1(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{D}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{D}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \\ &= \mathfrak{E}_{2n(2^n)}.E_{\sigma(2^n)} = \zeta.\mathfrak{E}_{2n(2^n)}.\mathfrak{E}_{\mu_1(2^n)}\ldots\mathfrak{E}_{\mu_k(2^n)} \\ &\qquad (\sigma = 1, 2, 3, \ldots, 4^{n-1}), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} E_{3.4^{n-1}+\sigma(2^n)} &= i \begin{Vmatrix} E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{D}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{D}_{2^{n-1}} & -E_{1(2^{n-1})} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathfrak{D}_{2^{n-1}} & E_{1(2^{n-1})} \\ E_{1(2^{n-1})} & \mathfrak{D}_{2^{n-1}} \end{Vmatrix}, \\ &\cdot \begin{Vmatrix} E_{\sigma(2^{n-1})} & \mathfrak{D}_{2^{n-1}} \\ \mathfrak{D}_{2^{n-1}} & E_{\sigma(2^{n-1})} \end{Vmatrix} = i\,\mathfrak{E}_{2n(2^n)}.\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)}.E_{\sigma(2^n)} \\ &= (\zeta i).\mathfrak{E}_{2n(2^n)}.\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)}.\mathfrak{E}_{\mu_1(2^n)}\ldots\mathfrak{E}_{\mu_k(2^n)} \\ &\qquad (\sigma = 1, 2, 3, \ldots, 4^{n-1}). \end{aligned} \tag{25}$$

Aus den Formeln (22), (23), (24) bzw. (25) folgt unser Satz.

3.4. *Für die Matrizen $\mathfrak{E}_{\sigma(2^n)}$ gilt*

$$\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)}.\mathfrak{E}_{\mu(2^n)} = -\mathfrak{E}_{\mu(2^n)}.\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots 2n;\ \lambda \neq \mu). \tag{26}$$

Die Formel (26) ist den Formeln

$$\begin{aligned} &\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)}.\mathfrak{E}_{\mu(2^n)} = -\mathfrak{E}_{\mu(2^n)}.\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)}, \\ &\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)}.\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)} = -\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)}.\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)}, \\ &\mathfrak{E}_{2n(2^n)}.\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)} = -\mathfrak{E}_{\lambda(2^n)}.\mathfrak{E}_{2n(2^n)}, \\ &\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)}.\mathfrak{E}_{2n(2^n)} = -\mathfrak{E}_{2n(2^n)}.\mathfrak{E}_{2n-1(2^n)} \\ &\qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2n-2;\ \lambda \neq \mu) \end{aligned} \tag{27}$$

äquivalent.

Den leichten Rekursivbeweis der Formeln (27) übergehen wir. (Man benützt zum Beweis den Hilfssatz 2.41).

3.5. Aus 3.3, 3.4, 3.2, und 2.4 folgt:

Die Matrizen $E_{\sigma(2^n)}$ ein komplexes Cliffordsystem bestimmen. (Man vergleiche 0.2).

3.6. Aus 2.32 und 3.5 folgt:

Die Algebra der Matrizen vom Grade 2^n ist einer komplexen Cliffordalgebra mit 4^n hyperkomplexen Einheiten isomorph.

3.7. Aus 2.33 und 3.6 folgt der Satz:

Jede Algebra mit einer endlichen Basis ist einer Unteralgebra der komplexen Cliffordzahlen mit 4^n hyperkomplexen Einheiten isomorph (n genügend groß).

(Reçu par la Rédaction le 20. 11. 1939).

Про алгебри з скінченною базою

Д. Вайнштейн (Рівно).

(Резюме)

Відомо, що кожна алгебра з скінченною базою є ізоморфна з певною алгеброю матриц. В цій ноті доводиться, що алгебра матриц степена 2^n є ізоморфна з алгеброю чисел Clifforda з 4^n одиницями. Звідси випливає, що кожна алгебра з скінченною базою є ізоморфна з певною підалгеброю чисел Clifforda.

Sur les fonctions indépendantes (VI)

(Équipartition)

par

H. STEINHAUS (Léopol).

Dans la suite nous aurons à faire aux fonctions $f(t)$ relativement mesurables dans l'intervalle infini, comme il a été expliqué dans la Communication (IV)[1]. Au lieu de considérer l'intervalle entier, nous nous bornerons à la demi-droite $(0, \infty)$ — une simplification peu essentielle.

Nous aurons à utiliser les définitions, les lemmes et les théorèmes de (IV). Or, quelques énoncés devront être modifiés pour servir au but actuel, à savoir à la démonstration des théorèmes 3 et 4 sur l'équipartition (mod. 1) de valeurs d'une fonction $f(t)$ pour $0 < t < \infty$ et à la solution d'une question posée par M. Kampé de Fériet au sujet du mouvement turbulent de fluides[2].

Voici les modifications à effectuer dans (IV):

Le lemme 3 doît être remplacé par le suivant

Lemme 3′: Si la fonction $f(t)$ est bornée, mesurable R, si b et B désignent les deux bornes de $f(t)$ et si $g(x)$ est une fonction de Dirichlet[3]) dans $\langle b, B\rangle$, alors $g(f(t))$ est une fonction bornée et mesurable R.

Démonstration: $g(x) \leqslant a$ équivaut à $x \in \Sigma I_n$, les intervalles I_n étant situés dans $\langle b, B\rangle$ et n'empiétant pas les uns sur

---

[1]) M. Kac et H. Steinhaus, Stud. Math. 7 (1938) p. 1—15.

[2]) Ann. de la Soc. scientifique de Bruxelles 59 (1) (1939) p. 145. Le problème fût posé oralement; dans l'ouvrage cité on trouve les notions nécessaires.

[3]) Fonction continue n'ayant qu'un nombre fini des maxima et minima.