Über das Abelsche Summationsverfahren

von

S. SIDON (Budapest).

Ich beweise hier den Satz:

Dafür, daß die Folge $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ *eine Faktorenfolge in engerem Sinne des Abelschen Summationsverfahrens sei, d. h. jede nach diesem Verfahren summierbare Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ *in eine ebensolche* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k$ *mit* $\left| \lim\limits_{x \to 1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k x^k \right| \leqslant C \max\limits_{0<x<1} \left| \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k x^k \right|$ *und nur von den* α *abhängigem* C *überführe, ist ihre Quasi-Vollmonotonität*[1]) *hinreichend und notwendig.*

Beweis. Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ quasi-vollmonoton, so gilt die Darstellung $\alpha_k = \int\limits_0^1 t^k dp(t)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ mit $\int\limits_0^1 |dp(t)| < \infty$[2]).

Daher ist, wenn für die Abelsch summierbare Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = f(x)$$

für $0 < x < 1$ gesetzt wird und $0 < \varrho < 1$ ist,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k \varrho^k = \int_0^1 f(t\varrho)\, dp(t).$$

[1]) Eine Folge nenne ich *quasi-vollmonoton*, wenn sie die Differenz zweier beschränkter vollmonotoner Folgen ist.

[2]) F. Hausdorff, Sumationsmethoden und Momentenfolgen, Math. Zeitschrift 9 (1921) p. 74—109.

Hieraus folgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ im Intervalle $0 < x < 1$

$$\lim_{\varrho \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k \varrho^k = \int_0^1 f(t)\, dp(t),$$

und da auch

$$\left| \lim_{\varrho \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k \varrho^k \right| \leqslant \int_0^1 |dp(t)| \max_{0<x<1} |f(x)|$$

gilt, ist die Folge $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ tatsächlich eine Faktorenfolge in engerem Sinne des Abelschen Summationsverfahrens.

Ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ eine Faktorenfolge in engerem Sinne des Abelschen Summationsverfahrens, so gilt für jedes Polynom $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{K} u_k x^k$

$$\left| \sum_{k=0}^{K} u_k \alpha_k \right| \leqslant C \max_{0<x<1} |P(x)|.$$

Bezeichnet $\alpha(f)$ den Wert des dem Polynom $P(x)$ den Wert $\sum\limits_{k=0}^{K} \alpha_k u_k$ zuordnenden, für die Gesamtheit der im Intervalle $0 < x < 1$ überall stetigen Funktionen stetigen Funktionals für eine der genannten Klasse angehörenden Funktion $f(x)$, so ist nach einem wohlbekannten Satze des Herrn F. Riesz

$$\alpha(f) = \int_0^1 f(t)\, dp(t)$$

mit nur von den α abhängigen $p(t)$ und $\int\limits_0^1 |dp(t)| < \infty$.

Also ist $\alpha_k = \alpha(t^k) = \int\limits_0^1 t^k dp(t)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, d. h. die Folge $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ ist quasi-vollmonoton.

(Eingegangen am 10. 8. 1939).

Про Абелевий метод сумування

С. Сідон (Будапешт).

(Резюме)

В цій ноті доведена така теорема:

Для того, щоб послідовність $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k, \dots$ була послідовністю множників в тіснішому розумінні для Абелевого методу сумації (тобто, щоб кожний сумовний цим методом ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ перетворювався в також сумовний цим методом ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k$), що задовольняє нерівність

$$\left| \lim_{x \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \alpha_k x^k \right| \leqslant C \max_{0<x<1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \right|,$$

де стала C залежить тільки від $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, необхідно і досить, щоб ця послідовність була квазі-повномонотонна (тобто, щоб була різницею двох обмежених і повномонотонних послідовностей).

Über Algebren mit endlicher Basis

von

D. WAJNSZTEJN (Rowno).

0.1. Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring, so bestimmen die Elemente aus $\mathfrak{R}$ eine Algebra. Sind die Elemente aus $\mathfrak{R}$ Matrizen, so bestimmt $\mathfrak{R}$ eine Matrizenalgebra. Ist $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{R}$ eine Untermenge von $\mathfrak{R}$ und ist $\mathfrak{P}$ auch ein Ring, so nennen wir die von $\mathfrak{P}$ bestimmte Algebra eine Unteralgebra.

Ist $\mathfrak{R}$ durch Adjunktion von einer endlichen Anzahl von Symbolen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$$

zum Ring der gewöhnlichen komplexen Zahlen entstanden (indem ε_σ bei Multiplikation mit komplexen Zahlen vertauschbar und für ε_σ eine Multiplikationstafel angegeben ist), so nennen wir $\mathfrak{R}$ ein hyperkomplexes Zahlensystem und die von $\mathfrak{R}$ bestimmte Algebra nennen wir hyperkomplexe Algebra oder Algebra mit einer endlichen Basis (ε_σ nennen wir hyperkomplexe Einheiten).

Poincaré [1]) hat folgenden Satz bewiesen:

Jede hyperkomplexe Algebra ist einer Matrizenalgebra isomorph.

0.2. W. K. Clifford [2]) hat hyperkomplexe Zahlensysteme mit 2^n Einheiten untersucht. Er erklärt die hyperkomplexen Einhei-

[1]) L. E. Dickson, Algebras and their arithmetics, p. 92.

[2]) W. Clifford, American Journ. of Baltimore 1 (1878) p. 350—358; Enzykl. der Math. Wiss. III A—B, p. 1410—1419. D. Wajnsztejn, Annales de la Soc. Pol. de Math. 16 (1937) p. 65.