Про одну рівно розложену послідовність

Р. Фортет (Париж).

(Резюме)

Послідовність $\{a^n x\}$, де $a>1$ натуральне число, є за модулом 1 рівно розложена (в розумінні Вейля) для майже всіх x, то значить, що числа членів тої послідовності, які падають в рівні проміжки (mod 1), є асимптотично рівні. Райков довів сильнішу властівість, впроваджуючи замість проміжків множини рівної міри (L). Якщо через $\{x_n\}$ позначимо послідовність $\{a^n x\}$ зредуковану mod 1, то (Райков) реляція (2) заходить для інтегровної функції $f(x)$. Автор випроваджує ті висновки з теорії льосових змінних залежних і прецизує висновки Райкова; досліджує також частинні послідовності з послідовності $\{x_n\}$.

Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité

par

W. DOEBLIN (Paris).

1. Introduction. Soient $x_1, \ldots\ldots, x_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité L. De nombreux auteurs ont étudié depuis presque deux siècles la forme de la loi de probabilité de $S_n = \sum_1^n x_i$ ou, ce qui revient au même, la forme de la fonction de répartition $F_n(x)$ de S_n, lorsque $n \to \infty$. Ce problème peut être considéré comme résolu à l'heure actuelle (au moins en première approximation) et ne fait pas l'objet de ce mémoire. Les premières recherches avaient pour but de montrer que, sous des hypothèses très larges, la loi de probabilité de $[S_n - nE(x)]/\sqrt{n}$ converge vers la loi de Gauss; toutefois l'exemple de la loi de Cauchy montrait qu'il pouvait y avoir d'autres lois limites. Dans son livre „Calcul des Probabilités“ [1]) M. P. Lévy a indiqué toute une famille de lois de probabilités — les lois stables — qui sont, lorsque L satisfait à certaines conditions, les limites des lois de $(S_n - a_n)/b_n$, a_n et b_n étant choisis convenablement. Le même auteur montrait plus tard [2]) que, si pour une suite d'entiers $\{n_\varrho\}$ la loi de $(S_{n_\varrho} - a_{n_\varrho})/b_{n_\varrho}$ tend vers une loi limite, celle-ci est indéfiniment divisible et M. Khintchine [3]) a prouvé que toutes les lois indéfiniment divisibles peuvent être obtenues de cette façon. Une expression asymptotique de la loi de S_n a été indiquée

---

[1]) Gauthier-Villars, 1925.

[2]) Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937.

[3]) Zur Theorie der unendlich-teilbaren Verteilungsgesetze. Rec. Math. Moscou 1 (nouvelle série) (1937) p. 71-120.

dans notre Note „Etude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité" [4]).

Toutefois, dans le cas général, il existe seulement sur l'ensemble des lois de S_n, lorsque n varie, et sur l'ensemble des lois l, limites de lois de $(S_{n_Q} - a_{n_Q})/b_{n_Q}$, quelques remarques que M. Lévy a consacrées dans ses livres à ce qu'il appelle le *groupe* d'une loi de probabilité. C'est cette lacune que nous nous sommes efforcés de combler dans nos recherches sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, dont la première partie est exposée dans ce mémoire [5]).

2. L'espace des classes de lois de probabilité. Soient L la loi de probabilité d'une variable aléatoire, $F(x)$ sa fonction de répartition: $\Pr\{|x_1| > X\} = 1 - F(X+0) + F(-X-0)$. On appelle *dispersion* pour la probabilité α d'une variable aléatoire x, ou d'une loi de probabilité L, la longueur du plus petit intervalle fermé auquel L affecte une probabilité $\geqq \alpha$. Nous noterons $(a^2 L + b)$ la loi de probabilité de la variable aléatoire $a^2 x + b$, dont la fonction de répartition est $F(Xa^{-2} - ba^{-2})$. Les lois $(a^2 L + b)$ sont dites du même type (généralisé) que L; leur ensemble, si a et b varient, $a \neq 0$, s'appelle suivant M. A. Khintchine la *classe* $K[L]$ de L [6]).

La courbe $y = F(x)$ n'est pas nécessairement continue; elle le devient si à chaque valeur de x pour laquelle $F(x)$ est discontinue nous ferons correspondre le segment $F(x-0) \leqq y \leqq F(x+0)$. La courbe Γ ainsi obtenue est manifestement coupée en un point et un seul par n'importe quelle parallèle à la droite $x + y = 0$. Deux lois L et L' étant ainsi représentées par deux courbes Γ et Γ' que la droite $x + y = c$ coupe en A et A', nous appellerons avec M. P. Lévy *distance* $d(L, L')$ de ces deux lois le maximum de AA' quand c varie de $-\infty$ à $+\infty$. Ce maximum est sûrement atteint à cause de la continuité des courbes Γ et Γ'. $d[L, L']$ satisfait à l'inégalité triangulaire, et ne s'annule que pour $L = L'$. On dit qu'une suite de lois L_n converge vers une

[4]) C. R. Acad. Sc. Paris 206 (1938) p. 718—720.

[5]) La plupart des théorèmes démontrés dans ce qui suit ont été énoncés dans deux Notes aux Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris: le 31 janvier et le 7 Mars 1938.

[6]) Mitt. d. Inst. f. Math. u. Mech. d. Univ. Tomsk 1 (1937) p. 258—261.

loi limite L, si les fonctions de répartition $F_n(x)$ convergent vers la fonction de répartition $F(x)$ de L en chaque point de continuité de $F(x)$ (ceci correspond à la convergence en mesure) et on a $d[L, \lim_{n\to\infty} L_n] = \lim_{n\to\infty} d[L, L_n]$. Un ensemble de fonctions de répartition est *compact* (ou forme une famille *normale*) si, pour une certaine fonction $\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$, on peut écrire

$$1 - F(x) + F(-x) < \varepsilon(x),$$

quelle que soit la fonction $F(x)$ appartenant à l'ensemble considéré.

Envisageons maintenant une suite infinie de classes

$$K[L_1], \dots, K[L_n], \dots$$

Il peut arriver que pour un choix convenable des L_n de $K[L_n]$, L_n converge vers une loi L. Si L n'est pas du type de la loi impropre dont la fonction de répartition est $E(x) = 0$ si $x < 0$, $= 1$ si $x > 0$, nous dirons que $K[L]$ est la *limite de* $K[L_n]$. On prouve alors simplement [7]) qu'on ne peut pas trouver une autre suite de lois L'_n de $K[L_n]$ convergeant vers une loi L' non impropre, avec $K[L] \neq K[L']$. Par contre, on peut trouver dans toute classe $K[L_n]$ une loi L''_n avec $F''_n(-1/n) < 1/n$, $F''(1/n) > 1 - 1/n$ et les lois L''_n convergent vers la loi impropre. La classe $K[E]$ joue donc ici un rôle tout à fait particulier; nous dirons que $\{K[L_n]\}$ *converge vers* $K[E]$ seulement dans le cas où aucune sous-suite dénombrable $\{K[L_{n_i}]\}$ ne converge vers une classe limite non impropre.

Étant donné un ensemble de classes $\neq K[E]$, nous dirons que $K[L] (\neq K[E])$ est une *classe d'cacumulation* de cet ensemble s'il existe une suite infinie de classes de l'ensemble convergeant vers $K[L]$. Nous dirons qu'un ensemble de classes (différant de $K[E]$) est *compact* si toute suite dénombrable de classes de l'ensemble a au moins une classe d'accumulation différant de la classe impropre. L'ensemble des classes d'accumulation différant de la classe impropre est appelé l'*ensemble dérivé* de l'ensemble en question..

Soient $L \bar{\in} K[E]$, $\beta(L) = \beta(F)$ le maximum de $F(x+0) - F(x-0)$ $(\beta < 1)$. Dans la classe $K[L]$ nous allons choisir la loi $\bar{L}$ dont la médiane est nulle (il est facile de définir la médiane d'une façon univoque) et dont la dispersion pour la pro-

[7]) Cf. A. Khintchine, loc. cit. [6]).

babilité $(1+\beta)/2$ est 1. L' étant une loi quelconque, nous appellerons *écart* $e[L', L]$ de la classe de L' à celle de L la borne inférieure des distances $d((a^2 L' + b), L)$ quand a et b varient. L'écart $e[L', L]$ est généralement différent de $e[L, L']$. Il a les propriétés suivantes: Si $K[L_n] \to K[L]$, $e[L_n, L] \to 0$, et inversement. $e[L', L] \neq 0$ si $K[L] \neq K[L']$. $K[L_n] \to K[L]$ entraîne $e[L_n, L] \to e[L', L]$.

L'espace $\mathcal{K}$ des classes différant de $K[E]$ avec la définition de la limite que nous y avons donnée est un espace $\mathcal{E}$ de M. Fréchet, c'est à dire, à chaque point $K[L]$ de cet espace nous pouvons faire correspondre une fonction $e[L', L]$ tendant vers zéro si et seulement si $L' \to L$. L'espace $\mathcal{K}$ n'est pas distanciable, car nous verrons plus loin un exemple d'un ensemble qui n'est pas compact et qui est dérivé d'un ensemble compact, et cela serait impossible dans un espace distancié.

Nous dirons qu'un ensemble de classes est *fortement compact*, s'il est compact ainsi que son ensemble dérivé. Notons que l'ensemble dérivé H' d'un ensemble de classes H est toujours fermé, comme on vérifie aisément.

3. Définition de l'ensemble de puissances. n étant un entier positif, on désigne par L^n la loi dont la fonction caractéristique est la $n^{\text{ième}}$ puissance de celle de L; c'est la loi de probabilité de S_n. L'ensemble des classes des lois L^n $(n = 1, 2, \ldots)$ est appelé l'*ensemble de puissances de la loi L* (ou *de la classe* $K[L]$) (M. P. Lévy l'appelle le *groupe* de cette loi).

4. Notations. On dit qu'une loi de probabilité I est *indéfiniment divisible* (ind. div.) si sa fonction caractéristique $\varphi(t)$ est de la forme

$$\exp\Big\{iat - \sigma^2\frac{t^2}{2} + \int_0^{\infty}\Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big)\,dN^{(+)}(x)$$

$$(1) \qquad + \int_{-\infty}^{0}\Big(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\Big)\,dN^{(-)}(x)\Big\} - N^{+}(x)$$

$$= \int_{x+0}^{\infty} dN(x),\quad N^{(-)}(-x) = \int_{-\infty}^{-x-0} dN(x) \qquad (x > 0).$$

Si I est ind. div., $[(\varphi t)]^u$ $(u > 0)$ est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité que nous appellerons I^u.

Nous allons supposer dans tout ce qui suit que

$$K[L] \neq K[E]$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dF(x) = \infty.$$

Les deux cas que nous écartons ainsi sont deux cas banaux bien connus. Rappelons que si $K[L] \neq K[E]$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) < \infty$, $K[L^n]$ converge, si n augmente indéfiniment, vers la classe de la loi de Gauss (cf. P. Lévy, loc. cit.).

Soit $D_n(\alpha)$ la dispersion de L^n pour la probabilité α. Il résulte du théorème sur l'augmentation de la dispersion [8]) que $D_n(\alpha)$ augmente au moins aussi vite que $\sqrt{n}$ si $n \to \infty$. De plus on a les deux inégalités, si $n > n_0[\alpha, F(x)]$:

$$(2) \qquad n \Pr\{|x| > \eta D_n(\alpha)\} < K(\alpha)\,\eta^{-2} \qquad (\eta < 1),$$

$$(3) \qquad n\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^{\alpha}\,dF(x) - n\Big(\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\Big)^2 < K'(\alpha)\,D_n^2(\alpha),$$

démontrées par nous autre part [9]).

Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dF(x) = \infty,$$

on a

$$(4) \qquad n\Big(\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\Big)^2 = o[D_n^2(\alpha)].$$

En effet

$$\Big|\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\Big| < \Big|\int_{-C}^{C} x\,dF(x)\Big| + \Big|\int_{C \leq |x| \leq D_n(\alpha)} x\,dF(x)\Big|.$$

[8]) Cf. W. Doeblin et P. Lévy, Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement. C. R. Acad. Sc. 202 (1936) p. 2027—2029.

[9]) W. Doeblin, Sur les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes, Bull. Sc. Math. 63 (1939) p. 23—62. Abbréviation: Var. ind.

Choisissons C tel que $1-F(C+0)+F(-C-0)<\varepsilon$. En appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left|\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\right| < C+\varepsilon\sqrt{\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2 dF(x)},$$

d'où résulte (4). Ceci permet de transformer (3) en

$$(3') \qquad n\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2 dF(x) < K''(\alpha)\, D_n^2(\alpha).$$

Pour qu'il existe une suite de constantes A_ϱ telle que l'ensemble des lois $(L^{n_\varrho}/T_\varrho - A_\varrho)$ soit compact (ou forme une famille normale) il faut et il suffit (cf. Var. Ind.) que

$$n_\varrho \Pr\{|x|>T_\varrho\}<K,$$
$$n_\varrho \Pr\{|x|>l T_\varrho\}<\varepsilon(l) \qquad \text{pour } l>1 \text{ avec } \lim_{l\to\infty}\varepsilon(l)=0,$$
$$\int_{-T_\varrho}^{T_\varrho} x^2\,dF(x)<K.$$

Nous comprendrons dans ce qui suit par A_ϱ des constantes convenables dont les valeurs ne seront pas toujours spécifiées. Une intégrale comme

$$\int_{-x}^{x} t^2\,dF(t) = \int_{|t|\leqq x} t^2 dF(t)$$

est par définition égale à $\int_{-x-0}^{+x+0} t^2 dF(t)$, et

$$\int_{|t|<x} t^2 dF(t) = \int_{-x+0}^{x-0} t^2 dF(t).$$

5. En appliquant le théorème principal de notre mémoire cité, on obtient le

Lemme principal. *Soit T_n un nombre $\geqslant a\,D_n(\alpha)$ $(a>0)$, soit $I(x)$ la fonction de répartition de la loi de probabilité définie*

par la fonction caractéristique (1) *avec*

$$a=n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dF(xT_n), \qquad \sigma^2=\frac{n}{T_n^2}\int_{-\eta T_n}^{\eta T_n} x^2\,dF(x),$$
$$dN^{(+)}(x)=n\,dF(xT_n) \quad \text{si } x>\eta_n, \qquad =0 \text{ si } x\leqslant\eta_n,$$
$$dN^{(-)}(x)=n\,dF(xT_n) \quad \text{si } x<-\eta_n, \qquad =0 \text{ si } x\geqslant-\eta_n,$$

alors, si η_n tend suffisamment lentement vers zéro, on a

$$F_n(xT_n)=I_n[x+\theta'\varphi(\eta_n)]+\theta''\varphi(\eta_n),$$

où $\varphi(\eta_n)\to 0$, $-1<\theta'$ *et* $\theta''<1$.

6. Théorème I. *Si $K[L^{n_p}]\to K[M]$, la fonction caractéristique d'une loi de $K[M]$ est*

$$\exp\left\{-\sigma^2\frac{t^2}{2}+\int\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)dN(x)\right\},$$

où

$$\sigma^2=\lim_{\eta\to 0}\ \overline{\lim_{p\to\infty}}\int_{|x|<\eta D_{n_p}(\alpha)} x^2\,dF(x),$$

$$\int_x^\infty dN(x)=\lim_{(\text{en mesure})}\int_{-\infty}^{x} dN(x)=\lim_{(\text{en mesure})} n_p\Pr\{X<xD_{n_p}(\alpha)\}$$

si $x<0$, α étant un nombre convenable.

Démonstration. La dispersion pour la probabilité β de M, soit $d(\beta)$, est une fonction monotone de β. Nous pouvons choisir une valeur α de β avec $d(\alpha)\neq 0$, $d(\beta)$ étant continue pour $\beta=\alpha$. Je dis que si $(T_{n_p}^{-1}L^{n_p}-A_{n_p})\to M$, $\lim_{p\to\infty} D_{n_p}(\alpha)/T_{a_p}$ existe. De (1) résulte l'existence d'un intervalle (x_1,x_2), $x_2-x_1=d(\alpha+\varepsilon)$, tel que, pour $p>p(\varepsilon)$,

$$\Pr\left\{x_1-\varepsilon\leqslant\frac{S_{n_p}}{T_{n_p}}-A_{n_p}\leqslant x_2+\varepsilon\right\}>\alpha,$$

donc

$$D_{n_p}(\alpha)/T_{n_p}\leqslant d(\alpha+\varepsilon)+2\varepsilon;$$

d'autre part, quel que soit u, (1) entraîne

$$\Pr\{u \leqslant \frac{S_{n_p}}{T_{n_p}} - A_{n_p} \leqslant u + d(\alpha-\varepsilon) - \varepsilon\} < \alpha,$$

d'où

$$D_{n_p}(\alpha) / T_{n_p} > d(\alpha-\varepsilon) - \varepsilon.$$

Par conséquent $D_{n_p}(\alpha)/T_{n_p}$ tend vers une limite $\neq 0$. En apliquant alors le lemme principal, on obtient immédiatement le théorème.

7. Théorème II. *$EP'[L]$ est fermé et composé uniquement de lois ind. div* [9a]*). Si* $\exp\{\psi(t)\}$ *est la fonction caractéristique d'une loi de $EP'[L]$,* $\exp\{u\,\psi(t)\}$ *est aussi, quel que soit* $0 < u < \infty$, *la fonction caractéristique d'une loi de $EP'[L]$.*

$EP'[L]$ est fermé, étant l'ensemble dérivé d'un ensemble de classes. Si $K[L^{n_j}] \dashrightarrow K[I]$, il suffit d'envisager $K[L^{m_j}]$ où $m_j/n_j \dashrightarrow u$ et de tenir compte du lemme principal pour vérifier le reste de la proposition.

8. Théorème III. *Pour que $EP'[L]$ contienne la loi ind. div. I dont la fonction caractéristique est (1), il faut, si I n'est pas la loi de Gauss, qu'il existe une suite de nombres $\{b_n\} \dashrightarrow \infty$, b_1 étant un point de continuité de $N^{(+)}(x)$ et de $N^{(-)}(-x)$ [avec $|N^{(+)}(b_1)| + N^{(-)}(-b_1) > 0$] telle que, en tout point de continuité de $N(x)$, on ait:*

$$\frac{1-F(x b_n)}{1-F(b_n)+F(-b_n)} \dashrightarrow \frac{|N^{(+)}(x b_1)|}{|N^{(+)}(b_1)| + N^{(-)}(-b_1)} \quad (x>0), \tag{5}$$

$$\frac{F(x b_n)}{1-F(b_n)+F(-b_n)} \dashrightarrow \frac{N^{(-)}(x b_1)}{|N^{(+)}(b_1)| + N^{(-)}(-b_1)} \quad (x<0), \tag{6}$$

$$\lim_{\eta\to 0}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{|N^{+}(b_1)| + N^{(-)}(-b_1)}{1-F(b_n)+F(-b_n)}\ \frac{1}{b_n^2}\int_{-\eta b_n}^{\eta b_n} x^2\, dF(x) = \sigma^2. \tag{7}$$

Corollaire. *Pour que la loi ind. div. L, différente de la loi de Gauss, dont la fonction caractéristique est (1), soit un élément de $EP'[L]$, il faut et il suffit qu'on ait (5), (6) et (7), où $F(-x b_n)$, resp. $1-F(x b_n)$, peut être remplacé par $N^{(-)}(-x b_n)$, resp. $|N^{(+)}(x b_n)|$.*

[9a]) Cf. P. Lévy — loc. cit. [3]).

Démonstration. Si I est ind. div., différente de la loi de Gauss, on peut prendre b_1 tel que l'indique le théorème. En écrivant les conditions du théorème I et en éliminant n_p, on obtient (5) — (7). C. q. f. d.

Notons parmi les lois L avec $L \in EP'[L]$ les lois stables et semi-stables [9]). Ces dernières sont caractérisées par le fait que b_n / b_{n-1} tend vers une limite.

9. Théorème IV [9b]). *Soit G la loi de Gauss. Pour que $K[G] \in EP'[L]$, il faut et il suffit que*

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\Pr\{|X| > X\}\, x^2}{\int_{-X}^{X} x^2\, dF(x)} = 0.$$

Démonstration. Soit $\{X_\varrho\}$ une suite de nombres $\dashrightarrow \infty$. Faisons correspondre à X_ϱ des nombres n_ϱ [10]) par la convention

$$n_\varrho \Pr\{|x| > X_\varrho\} \backsimeq 1.$$

Pour que $K[L^{n_\varrho}] \longrightarrow K[G]$, il faut (Var. Ind. § 3) que

$$\frac{n_\varrho}{X_\varrho^2} \int_{-X_\varrho}^{X_\varrho} x^2\, dFx(x) \longrightarrow \infty,$$

c'est-à-dire que

$$\varphi(X_\varrho) = \frac{\Pr\{|x| > X_\varrho\}\, X_\varrho^2}{\int_{-X_\varrho}^{X_\varrho} x^2\, dF(x)} \longrightarrow 0.$$

D'autre part, si pour une suite $\{X_\varrho\}$ $\varphi(x_\varrho) \longrightarrow 0$ nous pouvons trouver une suite d'entiers m_ϱ avec $m_\varrho \Pr\{|x| > X_\varrho\} \longrightarrow 0$, on a

$$m_\varrho X_\varrho^{-2} \int_{-X_\varrho}^{X_\varrho} x^2\, dF(x) \longrightarrow \infty,$$

ce qui entraine $K[L^{m_\varrho}] \longrightarrow K[G]$ (cf. Var. Ind. § 3).

[9b]) Cf. P. Lévy — loc. cit. [1])

[10]) On prendra pour n_ϱ l'entier le plus voisin de $\Pr\{|x| > X_\varrho\}^{-1}$.

Corollaire. *Pour que $K[L^n] \to K[G]$, il faut et il suffit que*

$$\lim_{X\to\infty} \frac{Pr\{|x|>X\}\,X^2}{\int_{-X}^{X} x^2\,dF(x)} = 0. \tag{7}$$

Démonstration. La nécessité de la condition (7) résulte de la démonstration ci-dessus. Pour que $K[L^n] \to K[G]$, il suffit que, quel que soit η, $n\Pr\{|x|>\eta D_n(\alpha)\} \to 0$. Or soit

$$\gamma_n = n\Pr\{|x|>\eta D_n(\alpha)\}.$$

On a (formule (3'))

$$\frac{n}{D_n^2(\alpha)} \int_{-\eta D_n(\alpha)}^{\eta D_n(\alpha)} x^2\,dF(x) < K''(\alpha),$$

d'où, si $\varphi(x) \to 0$,

$$\gamma_n \eta^2 < K''(\alpha)\varphi[\eta D_n(\alpha)] \to 0.$$

γ_n tendant vers zéro quel que soit η, $K[L^n] \to K[G]$. C. q. f. d.

10. Lemme. *Si*

$$\int_{-\eta D_n(\alpha)}^{\eta D_n(\alpha)} x^2\,dF(x) > \varepsilon D_n^2(\alpha),$$

où $\eta \leqslant p^{-p/2}$, il y a un nombre n' avec

$$np^{-p} < n' < n,$$

tel que la classe $K[L^{n'}]$ est d'autant plus voisine de $K[G]$ que $\varepsilon\sqrt{p}$ est plus grand. $G \in EP'[L]$, si $EP'[L]$ contient la loi I de la fonction caractéristique (1) *avec $\sigma \neq 0$.*

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$\frac{KD_n^2(\alpha)}{n} > \int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2\,dF(x) = I_1 + I_2 + \ldots + I_p + \int_{-L_p}^{L_p} x^2\,dF(x),$$

où

$$I_i = \int_{L_i < x \leqq L_{i-1}} x^2\,dF(x).$$

Il y a au moins un $L_j < KD_n^2(\alpha)n^{-1}p^{-1}$, d'où

$$\Pr\{L_{j-1} \geqslant |x| > L_j\} < p^{-1}KD_n^2(\alpha)\,n^{-1}L_j^{-2}.$$

D'autre part,

$$\Pr\{|x|>L_{j-1}\} = Pr\{|x|>p^{-j-1/2}D_n(\alpha)\} < K(\alpha)\,p^{j-1}n^{-1},$$

donc

$$\Pr\{|x|>L_j\} < k'(\alpha)\,n^{-1}\ {}^{j-1}.$$

Soit $n' \approx p^{-j+1/2}n$; la quantité

$$n'\Pr\{|x|>L_j\} + \frac{L_j^2}{n'\int_{-L_j}^{L_j} x^2\,dF(x)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\varepsilon^2 p}\right)$$

tend vers 0 si $\varepsilon\sqrt{p} \to \infty$. Il en résulte la première partie du lemme en vertu d'une proposition connue [11]. La deuxième partie en découle aussi facilement en tenant compte du théorème I.

11. Théorème V. *Si $K[L^n]$ converge vers une classe limite (non impropre), celle-ci est soit la classe de Gauss, soit celle d'une autre loi quasi-stable* [12]. *La condition nécessaire et suffisante pour le dernier cas est qu'on puisse écrire, si $X \to \infty$,*

$$F(-X) = h_1(X)X^{-\alpha}, \quad 1 - F(X) = h_2(X)X^{-\alpha},$$

avec $h_i(kX)/h_i(X) \to 1$ quel que soit k, et que $\lim(h_1/h_1 + h_2)$ existe.

Démonstration. Par définition des lois quasi-stables, si I est quasi-stable et que x_1 et x_2 ont I pour loi de probabilité, la loi de $c_1^2x_1 + c_2^2x_2$ est du même type que I, quels que soient c_1 et c_2. On prouve facilement (cf. p. ex. P. Lévy, loc. cit. [2]), que si $K[L^n] \to K[I]$, I est quasi-stable. Si $K[I] \neq K[G]$, la fonction

[11]) Soient $x_{n1}, \ldots, x_{nn}$ des variables aléatoires indépendantes. Soit $\bar{x}_{ni} = x_{ni}$ si $|x_{ni}| \leqslant L_n$, $\bar{x}_{ni} = 0$ si $|x_{ni}| > L_n$; σ_{ni} désignant l'écart-type de $\bar{x}_{ni}$, si

$$\Sigma\Pr\{|x_{ni}|>L_n\} + L_n^2(\Sigma\sigma_{ni}^2)^{-1} \to 0,$$

la classe de $\sum_i x_{ni}$ tend vers $K[G]$ Cf. p. ex. S. Bernstein, Théorème limite du calcul des probabilités. Math. Ann. 97 (1927) p. 1-21.

[12]) Bien connu; cf. P. Lévy. loc. cit. [2]).

caractéristique de I peut s'écrire d'après les résultats classiques de M. P. Lévy

$$(8)\qquad \begin{aligned}\varphi(t) = {} & C_1\int_{-\infty}^{0}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}} \\ & + C_2\int_{0}^{\infty}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\end{aligned}\qquad (0<\alpha<2),$$

d'où l'on déduit la nécessité des conditions du théorème en utilisant la démonstration du théorème III.

Remarquons que la forme de $N(x)$ peut encore être déduite du théorème II en montrant que la condition $K[I^n]=K[I]$ entraîne $u^{\alpha(u)}N^{(+)}(ux)=N^{(+)}(x)$, ce qui donne $\alpha(u/n)=\alpha(u)=\alpha$, ou encore tout à fait directement.

Avant de démontrer que les conditions indiquées sont suffisantes, nous allons établir le

Lemme. *Si* $k>1$, $0<\alpha<2$ *et pour* $u>u_0$

$$(9)\qquad \Pr\{|x|>ku\}\geqslant k^{-\alpha}\,Pr\{|x|>u\},$$

alors

$$(10)\qquad \varlimsup_{X\to\infty}\int_{-X}^{X}x^2\,dF(x)/X^2\,Pr\{|x|>X\}\leqslant\frac{k^\alpha}{1-k^{\alpha-2}}.$$

Démonstration. U étant un nombre convenable entre u_0 et ku_0, nous pouvons écrire, si $X>ku_0$, $X=k^iU$,

$$\int_{-X}^{X}x^2\,dF(x)=\int_{-U}^{U}x^2\,dF(x)+\int_{U<|x|\leq kU}x^2\,dF(x)+\ldots+\int_{k^{i-1}U<x\leq X}x^2\,dF(x).$$

Si $j<i$,

$$\int_{k^{j-1}U<X\leq k^jU}x^2\,dF(x)<k^{2j}U^2\,Pr\{|x|>k^{j-1}U\}$$

et $Pr\{|x|>k^{j-1}U\}$ est majoré selon (9) par $k^{\alpha(i-j+1)}\Pr\{|x|>k^iU\}$; donc

$$\int_{-X}^{X}x^2\,dF(x)<\int_{-ku_0}^{ku_0}x^2\,dF(x)+k^\alpha Pr\{|x|>X\}X^2\sum_{l=0}^{\infty}k^{l(\alpha-2)}.$$

Or $X^2\Pr\{|x|>X\}>X^2k^{-i\alpha}\Pr\{x>U\}$ en vertu de (9). α étant <2, U borné, $X^2\Pr\{|x|>X\}$ augmente indéfiniment, de telle sorte que (9) donne bien (10). C. q. f. d.

Il résulte de la démonstration que, si $\eta<k^{-l}$, on a

$$(11)\qquad \int_{-\eta X}^{\eta X}x^2\,dF(x)<C+\frac{k^\alpha k^{(\alpha-2)l}}{1-k^{\alpha-2}}X^2\Pr\{|x|>X\}.$$

Revenons à la démonstration de la suffisance de nos conditions. n étant très grand, nous pouvons trouver X_n tel que

$$(12)\qquad n\Pr\{|x|>X_n\}\simeq 1.$$

Appliquons le lemme principal à la loi de probabilité de S_n/X_n. Cette loi de probabilité est sensiblement celle d'une loi indéfiniment divisible (1) où σ^2 et $N(x)$ ont les valeurs résultant du lemme principal. Or, nous avons $\Pr\{|x|>X\}=[h_1(X)+h_2(X)]X^{-\alpha}$ et $h_i(kx)/h_i(x)$ est par hypothèse compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ si $k<C_1'$, $x>X(\varepsilon, C)$. Si nous prenons $k=2$ et pour β un nombre quelconque entre 2 et α ($>\alpha$), on aura $\Pr\{|x|>kX\}>\Pr\{|x|>X\}X^{-\beta}$ pour $X>X_0$ et, en vertu de (11) et (12), si $\eta<2^{-\varrho}$, $n>n(\varrho)$,

$$\sigma^2\leqslant\frac{n}{X^2}\int_{-\eta X}^{\eta X}x^2\,dF(x)<4\,\frac{2^{(\beta-2)\varrho}}{1-2^{\beta-2}}<\varepsilon$$

et $|N^{(+)}(u)|\simeq n\Pr\{x>uX_n\}\simeq\Pr\{x>uX_n/\Pr\{|x|>X_n\}\simeq k_1u^\alpha$.

$K[L^n]$ tend donc, si $n\to\infty$, vers la loi quasi-stable (8), ce qui prouve la suffisance des conditions indiquées.

12. Les lois universelles. Nous avons vu que toutes les lois de $EP'[L]$ sont ind. div.; inversement, si nous nous donnons une loi ind. div. I, existe-t-il une loi L telle que $I\in EP'[L]$? Ainsi que M. Khintchine l'a prouvé[3]), la réponse est affirmative. Nous allons même montrer qu'il existe des lois, que nous appelons *lois universelles*, dont l'ensemble de puissances a pour dérivé l'ensemble de toutes les lois ind. div.

Théorème VI. *Un exemple d'une loi universelle est donné par la loi U dont la fonction caractéristique est de la forme*

$$\varphi(t) = \exp\{\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2} \int\limits_{k_\nu/\nu<|x|<\nu k_\nu} (e^{itx}-1)\, dN_\nu(k_\nu^{-1}x)\},$$

où $k_\nu = \exp \nu^3$ *et où l'ensemble des lois* I_ν *correspondant à*

$$\exp\{ita_\nu t\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,dN_\nu(x)\}$$

est partout dense dans l'ensemble des lois ind. div.

On peut supposer — et cela a été supposé dans la formule — que $dN_\nu(x)=0$ en dehors des intervalles $(1/\nu, \nu)$ et $(-\nu, -1/\nu)$ et que $|N_\nu^{(+)}(x)|$ et $N_\nu^{(-)}(x) < \nu$ [12]).

Démonstration. Soit J une loi ind. div., $J = \lim I_{n_p}$. Soit $t_p = \exp\{n_p^2\}$. Je dis que $KLJJ = \lim_{p\to\infty} K[U^{t_p}]$. Soient u_i des variables aléatoires indépendantes suivant U. Considérons la fonction caractéristique de $\sum_1^{t_p} u_i/k_{n_p}$ qui est égale à $\varphi(t/k_{n_p})^{t_p}$:

$$\log \varphi(t/k_{n_p})^{t_p} = t_p \sum_{\nu<n_p} e^{-\nu^2}\int\dots + t_p e^{-n_p^2}\int\dots + t_p\sum_{\nu>n_p}\int\dots$$

Or

$$|t_p \sum_{\nu>n_p} e^{-\nu^2}\int\dots| < 2\sum_{\nu>n_p}\nu e^{-\nu^2}e^{n_p^2}\to 0,$$

$$|t_p\sum_{\nu<n_p}e^{-\nu^2}\int(e^{itx/k_{n_p}}-1)\,dN_\nu(xk_\nu^{-1})|$$

$$< t_p\sum_{\nu<n_p}e^{-\nu^2}\nu^2|t|\frac{k_\nu}{k_{n_p}} < |t|\sum_{\nu=1}^{\infty}2\nu^2e^{-\nu^2}\exp\{n_p^2+(n_p-1)^3-n_p^3\}\to 0.$$

Donc, si $|t|<1$,

$$\varphi_n(t) = \varphi\left(\frac{t}{k_{n_p}}\right)^{t_p} \simeq \exp\{\int(e^{itx}-1)\,dN_{n_p}(x)\}.$$

On en déduit immédiatement que les fonctions de répartition des grandeurs $\frac{1}{k_{n_p}}\sum_1^{t_p}u_{n_p}+a_{n_p}$ convergent vers celle de J, ce qui démontre le théorème.

12) Le lecteur vérifiera facilement qu'une telle suite de lois I_ν existe.

13. Théorème VII. *Pour que* $EP'[L]$ *soit vide, il suffit que*

(13) $$\alpha = \lim_{l\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{\Pr\{|x|>lX\}}{\Pr\{|x|>X\}} \neq 0.$$

Démonstration. Admettons que (13) soit satisfait et que $K[L^{n_p}]$ converge vers une classe limite différente de $K[G]$. Alors il existe l, une suite de nombres X_p et une suite d'entiers n_p, telles que

$$n_p\Pr\{|x|>X_p\}\sim\beta,\quad n_p\Pr\{|x|>lX_p\}<\beta\frac{\alpha}{2},$$

ce qui est contraire à (13). $K[L^{n_p}]$ ne peut pas davantage converger vers $K[G]$, car il résulte du lemme du n° 11 que (13) est incompatible avec

$$\varliminf_{x\to\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{X^2\Pr\{x>X\}}{\int_{-X}^{X}x^2\,dF(x)} = 0.$$

14. Théorème VII'. *Pour que* $EP'[L]$ *soit vide, il faut et il suffit que, quelle que soit la fonction* $G(l)$ *donnée d'avance avec* $\lim_{l\to\infty}G(l)=0$, $\Pr\{|x|>lX\}/\Pr\{|x|>X\}>G(l)$ *pour au moins un* l *(dépendant de* X*) si* $X>X_0[G(l)]$, *et que* $\varliminf_{x\to\infty}\varphi(x)\neq 0$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Si $\varliminf\varphi(x)=0$, $EP'[L]$ contient G. Supposons que $\varliminf\varphi(x)\neq0$ et que, pour une fonction $G(l)$ avec $\lim_{l\to\infty}G(l)=0$, on a $\Pr\{|x|>lX_\varrho\}/\Pr\{|x|>X_\varrho\}<G(l)$ pour une suite $\{X_\varrho\}\to\infty$. Posons $n_\varrho\sim1/\Pr\{x>X_\varrho\}$; comme $\varliminf\varphi(x)\neq0$, il vient

$$n_\varrho\int_{-X_\varrho}^{X_\varrho}x^2\,dF(x)<KX_\varrho^2$$

et $n_\varrho\Pr\{|x|>lX_\varrho\}<2G(l)$. Les lois $(L^{n_\varrho}/X_\varrho - A_{n_\varrho})$ forment donc une famille normale. C. q. f. d.

La condition est suffisante. $EP'[L]$ ne peut pas contenir G; l'éventualité $K[L^{n_\varrho}]\to K[I]$, $I\neq G$ est également incompatible avec les conditions du théorème, en vertu du raisonnement du n° précédent.

15. Théorème VIII. *Pour que $EP(L)$ soit compact, il faut et il suffit que, $\{n_i\}$ étant une suite quelconque d'entiers positifs, on puisse extraire de $\{n_i\}$ une sous-suite $\{n_\varrho\}$ à laquelle on puisse faire correspondre une suite de nombres X_ϱ telle que*

$$(14') \qquad 1 \geqslant n_\varrho \Pr\{|x| > X_\varrho\}, \qquad \underline{\lim}\; n_\varrho \Pr\{|x| \geqslant X_\varrho\} \neq 0$$

et

$$(14'') \qquad \lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\; n_\varrho \Pr\{|x| > kL(X_\varrho)\} = 0,$$

où

$$(14''') \qquad L(X)^2 = \max\{X^2,\ n_\varrho \int_{-X}^{X} x^2\, dF(x)\}.$$

Démonstration. La condition est nécessaire. Si $EP(L)$ est compact, $\{n_i\}$ étant une suite quelconque d'entiers positifs, on peut extraire de $\{n_i\}$ une suite $\{n_\varrho\}$ telle que $K[L^{n_\varrho}]$ tende vers une classe limite $K[I]$. Si I est la loi de Gauss, $I = G$, alors, en déterminant X_ϱ par la convention

$$1 \geqslant n_\varrho \Pr\{|x| > X_\varrho\}, \quad 1 \leqslant n_\varrho \Pr\{|x| \geqslant X_\varrho\}\ ^{12)},$$

on a

$$X_\varrho^2 = o\,(n_\varrho \int_{-X}^{X} x^2\, dF(X)), \quad L^2(X_\varrho) = n_\varrho \int_{-X_\varrho}^{X_\varrho} x^2\, dF(X),$$

$$\lim_{\varrho\to\infty} \Pr\{|x| > L(X_\varrho)\} = 0.$$

Si I n'est pas la loi de Gauss, il existe $N(x)$ tel que pour une suite $\{b_\varrho\} \to \infty$,

$$(15) \qquad n_\varrho[1 - F(tb_\varrho)] - N(t) \to 0 \qquad \text{en mesure, si } t > 0,$$

$$(15') \qquad n_\varrho F(tb_\varrho) - N(t) \to 0 \qquad \text{en mesure, si } t < 0,$$

$$(16) \qquad n_\varrho \int_{-b_\varrho}^{b_\varrho} x^2\, dF(x) = O(b_\varrho^2).$$

Il y a au moins un t_1, avec $-N^{(+)}(t_1) + N^{(-)}(-t_1) = \beta > 0$.

[12]) Ces nombres ne sont pas toujours bien déterminés, mais cela n'a aucune importance.

Si $\varrho > \varrho(\varepsilon)$, on a

$$\varepsilon + |N^{(+)}(t_1 - \varepsilon)| + N^{(-)}(-t_1 + \varepsilon) > n_\varrho \Pr\{|x| > b_\varrho(t_1 - \tfrac{\varepsilon}{2})\} > \beta - \varepsilon,$$
$$-N^{(+)}(t_1 - \varepsilon) + N^{(-)}(-t_1 + \varepsilon) < \beta + \eta,$$

η étant arbitrairement petit si $\varepsilon \to 0$. Si $\beta < 1$, nous prendrons $X_\varrho = b_\varrho(t_1 - \varepsilon/2)$; les conditions (14′) seront réalisées en vertu de (15), et (15), (16) entraînent (14″). On ne peut pas prendre $\beta < 1$ dans le cas où $\int_{|x|>t} dN(x) = 0$ pour $x > t_1$, $\geqslant 1$ pour $x < t_1$. En déterminant X_ϱ par la condition $\Pr\{|x| > X_\varrho\} \leqslant 1$, $\Pr\{|x| \geqslant X_\varrho\} \geqslant 1$, il résulte de (15) que $X_\varrho\, 1/b_\varrho \to t_1$ et les conditions (14) sont encore satisfaites.

La condition est suffisante. Si (14″) est satisfaite, les lois de probabilité de $(S_{n_\varrho} - n_\varrho \int_{-X_\varrho}^{X_\varrho} x\, dF(x))/X_\varrho$ forment une famille normale et, en vertu de (14′), une loi limite quelconque est différente de $E(x)$ (cf. Var. ind.).

16. Théorème IX. *Si $EP'[L]$ est compact, $EP'[L]$ ne comporte pas de lois discontinues et il existe une fonction $\Phi(\alpha)$ avec $0 < \Phi(\alpha) < \infty$ si $0 < \alpha < 1$, telle que le rapport de la dispersion pour la probabilité α d'une loi quelconque de $EP'[L]$ à la dispersion pour la probabilité $^1/_2$ est $< \Phi(\alpha)$ si $\alpha > {}^1/_2$, $> \Phi(\alpha)$ si $\alpha < {}^1/_2$. Si $EP[L]$ est compact, mais non $EP'[L]$, $EP'[L]$ contient des lois discontinues.*

Démonstration. Si I est une loi discontinue, le nombre probable des sauts est $\neq \infty$ et la composante gaussienne est nulle:

$$-N^{(+)}(x) \leqslant -N^{(+)}(+0) < C, \quad N^{(-)}(-x) \leqslant N^{(-)}(-0) < C, \quad \sigma^2 = 0.$$

La fonction caractéristique est

$$\exp\{iat + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1)\, dN(x)\}.$$

Si u est très petit, le nombre probable des sauts pour I^u est très petit, $< 2Cu$. I^u affecte une probabilité voisine de 1 à la valeur Ua, par conséquent l'ensemble dérivé de l'ensemble de classes $K[I^{1/n}]$ $(n=1,2,\ldots)$ est vide, I ne peut pas faire partie d'un $EP'[L]$ compact.

La dispersion pour la probabilité $^1/_2$ est donc différente de 0 pour toute loi de $EP'[L]$. Si le rapport $D(\alpha)/D(^1/_2)$ n'était pas borné inférieurement pour $\alpha < {}^1/_2$ pour toute loi de $EP'[L]$, nous pourrions extraire de $EP'[L]$ une suite de classes convergeant vers une classe non impropre pour laquelle $D(\alpha/2)=0$ [18]) et qui est donc la classe d'une loi discontinue. Ceci montre l'existence d'une fonction $\Phi(\alpha)$ ayant pour $\alpha < {}^1/_2$ les propriétés indiquées. La démonstration est identique pour $\alpha > {}^1/_2$.

Réciproquement, si $EP'[L]$ est tel que, pour toute loi I de $EP'[L]$, $D(\alpha)/D(^1/_2)$ est $> \Phi(\alpha)$ si $\alpha < {}^1/_2$, $< \Phi(\alpha)$ si $\alpha > {}^1/_2$, on voit immédiatement que l'ensemble fermé $EP'[L]$ est compact.

Supposons maintenant que $EP[L]$ soit bien compact, mais non $EP'[L]$; alors $D(\beta)/D(^1/_2)$, p. ex., ne sera pas borné inférieurement. Il y aura une suite de lois $I_1,\ldots,I_n,\ldots$ de $EP'[L]$ avec $D(\beta)/D(^1/_2)\to 0$. Nous pouvons trouver des indices n_p tels que, pour les lois L^{n_p}, $D_{n_p}(\beta-\varepsilon)/D_{n_p}(^1/_2+\varepsilon)\to 0$, puisqu'à chaque loi I_i correspond une suite d'indices $\{l^{(i)}\}$ avec $K[L^{l^{(i)}}]\to K[I_i]$. De la suite $K[L^{n_p}]$ nous pouvons extraire une suite partielle convergeant vers une classe limite, car $EP[L]$ est compact. Pour cette classe limite $D(\beta-2\varepsilon)=0$; c'est la classe d'une loi discontinue.

17. Exemple d'un ensemble dérivé d'un ensemble compact de classes qui n'est pas compact. Soit I^z la loi de probabilité dont la fonction caractéristique est

$$\varphi_z(t)=\exp\{z\cos t\}.$$

Posons $I^\infty = G$. Alors l'ensemble F des classes $K[I^z]$, $0<z\leqslant\infty$, est un ensemble fermé qui n'est pas compact, puisque si $z\to 0$, I^z prend la valeur 0 avec une probabilité de la forme $1-O(z)$.

[18]) En effet, nous pouvons trouver une suite de lois $I_1,\ldots,I_n,\ldots$, $I_n\in EP'[L]$ avec les fonctions de répartition $G_n(x)$ convergeant vers une certaine loi I de $EP'[L]$, le rapport $D(\alpha)/D(^1/2)$ étant $<1/n$ pour I_n. I_n tendant vers I, $D(^1/2)$ est borné supérieurement pour toute la suite I_n et $D(\alpha)$ tend vers zéro; si n est suffisamment grand, on aura $d[I_n,I]<\varepsilon$ et il y aura un intervalle de longueur ε avec $G_n(x+\varepsilon)-G_n(x)>\alpha$, d'où, comme $d[I_n,I]<\varepsilon$ $G(x+2\varepsilon)-G(x-\varepsilon)>\alpha-2\varepsilon$, ce qui entraîne bien $D(^\alpha/2)=0$ pour I.

Déterminons la fonction de répartition $F(x)$ de la loi L par les conventions:

$$\begin{aligned} dF(x)&=0 && \text{pour } x\neq\exp\{p^3\} \\ dF(x)&=C\exp\{-p^2\} && \text{pour } |x|=\exp\{p^3\} \end{aligned} \qquad (p=0,1,\ldots);$$

on vérifie sans peine que $EP[L]$ est compact et que $EP'[L]=F$.

Remarque. Si

$$\int_{-X_\varrho}^{X_\varrho} x^2\,dF(x)/X_\varrho^2\,\Pr\{x>X_\varrho\}\to 0,$$

le lecteur prouvera facilement que, si $K[L^{n_\varrho}]\to K[I]$, où

$$n_\varrho \Pr\{|x|>X_\varrho\}\simeq 1,$$

I est discontinu.

18. Théorème X. *Pour que l'ensemble de puissances soit fortement compact, il faut et il suffit qu'on ait, en désignant par* $T(X)$

$$T(X)=\frac{1}{\Pr\{|x|>X\}}\int_{-X}^{X} x^2\,dF(x), \tag{17}$$

$$\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\Pr\{|x|>lT(X)\}}{\Pr\{|x|>X\}}=0. \tag{18}$$

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, le rapport $T(X)/X$ est borné inférieurement si $EP[L]$ est fortement compact, car $EP'[L]$ ne contient pas de lois discontinues. Supposons, par impossible, que

$$\frac{\Pr\{|x|>l_\varrho T(X_\varrho)\}}{\Pr\{|x|>X_\varrho\}}\to\alpha>0.$$

X_ϱ, l_ϱ tendant vers l'infini, déterminons n_ϱ par

$$n_\varrho \Pr\{x>X_\varrho\}\simeq 1$$

et considérons les lois L^{n_ϱ}. Dans le cas de probabilité $\sim 1-e^{-1}$,

$$S_{n_\varrho}-n_\varrho\int_{-X_\varrho}^{X_\varrho} x\,dF(x)$$

est de l'ordre de $T(X_\varrho)$, donc $D_{n_\varrho}(^1/_5) < KT(X_\varrho)$ et, comme $n \Pr\{|x| > l_\varrho T(X_\varrho)\} \to \alpha$, la dispersion $D_{n_\varrho}(1-{}^\alpha/_3)$ est $\geqslant l_\varrho T(X_\varrho)$. Mais ceci est impossible, puisque $D_{n_\varrho}(1-{}^\alpha/_3)/D_{n_\varrho}(^1/_5)$ doit être borné. On a donc bien (18).

La condition est suffisante. Considérons les lois $(L_n/T'_n - A_n)$ où

$$A_n = n\int_{-X_n}^{X_n} x\,dF(x), \qquad T'_n = T(X_n),$$

X_n étant déterminé par les conditions

$$n\Pr\{|x| > X_n\} \leqslant 1, \quad n\Pr\{|x| \geqslant X_n\} \geqslant 1.$$

Pour que ces lois forment une famille normale, il faut et il suffit que

(20) $\quad n\Pr\{|x| > T'_n\} < k, \quad n\Pr\{|x| > lT'_n\} < \varepsilon(l) \quad$ pour $\quad l > 1,$

avec $\lim\limits_{l\to\infty} \varepsilon(l) = 0, \quad [\varepsilon(l) < \varepsilon, \quad$ si $l > R(\varepsilon)],\quad$ et

(21) $$n\int_{-T'_n}^{T'_n} x^2\,dF(x) < kT_n'^2.$$

Or, si $X_n > T'_n$, il résulte de l'équation définissant $T(X_n)$, en appliquant l'inégalité de Tchebycheff, que

$$\Pr\{X_n \geqslant |x| > T'_n\} < \Pr\{|x| > X_n\},$$

d'où dans tous les cas

$$n\Pr\{|x| > T'_n\} < 2$$

et

$$n\int_{-T'_n}^{T'_n} x^2\,dF(x) < n\int_{-X_n}^{X_n} x^2\,dF(x) + nT_n'^2\Pr\{|x| > X_n\} \leqslant 2T_n'^2.$$

Il reste à vérifier la séconde des conditions (20).

ε étant donné d'avance, nous distinguons deux cas suivant que $n\Pr\{|x| > X_n\} > \varepsilon$ où $\leqslant \varepsilon$. Dans les premier cas, si $l > R(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$,

$$n\Pr\{|x| > lT'_n\} \leqslant n\Pr\{|x| > l\sqrt{\varepsilon}\,T(X_n)\} \leqslant \frac{\Pr\{|x| > l\sqrt{\varepsilon}\,T(X_n)\}}{\Pr\{|x| > X_n\}}.$$

Dans le second cas on a

$$nPr\{|x| = X_n\} \geqslant 1-\varepsilon,$$

par conséquent

$$T_n'^2 = n\int_{-X_n}^{X_n} x^2\,dF(x) \geqslant (1-\varepsilon)X_n^2$$

et

$$n\Pr\{|x| > 2T'_n\} < n\Pr\{|x| > X_n\} < \varepsilon.$$

La condition (20) est donc une conséquence de (18) et les lois $(L_n/T'_n - A_n)$ forment une famille normale. Pour prouver que $EP'[L]$ est fortement compact, il faudra prouver que les lois d'accumulation ne sont pas impropres et que $EP'[L]$ est compact. Soit $\varphi(t)$ la fonction caractéristique d'une loi limite; on tire du théorème I et de (20), (21):

(22) $$\sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\,dN(x) \leqslant 2, \quad \int_{|x|\geqslant 1} dN(x) < 2, \quad \int_{|x|\geqslant l} dN(x) \leqslant \varepsilon(l)$$

et on a pour toute loi limite

$$\text{soit} \quad \sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\,dN(x) \geqslant 1, \qquad \text{soit} \int_{|x|\geqslant 1} dN(x) \geqslant 1.$$

Les lois I forment par suite une famille normale et ne font pas partie de $K[E]$. Une limite quelconque J de lois I_i satisfait aussi à (22) et ne fait non plus partie ne $K[E]$. $EP'[L]$ est donc fortement compact. C. q. f. d.

19. Théorème XI. *Soit I une loi de $EP'[L]$, $G(x)$ sa fonction de répartition, $D(^1/_2)$ la dispersion de I pour la probabilité $^1/_2$, m la médiane de I.*

Si, quelle que soit la loi I de $EP'(L)$, on a

$$\int |x-m|^{\alpha} dG(x) < KD(1/2)^{\alpha} \qquad (0<\alpha<2),$$

et si $EP'[L]$ est compact, alors

$$\int |x|^{\alpha-\varepsilon} dF(x) < \infty$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

La démonstration utilisera plusieurs lemmes.

Lemme 1. *Si les hypothèses du théorème sont vérifiées, les conditions: $U > U_0$ et*

$$\frac{1}{U^2 \Pr\{|x|>U\}} \int_{-U}^{U} x^2 dF(x) < M^2 \tag{23}$$

entraînent

$$\Pr\{|x|>kU\} < k^{-\alpha+\varepsilon/3} \Pr\{|x|>U\}, \tag{24}$$

$$\int_{U<|x|\leq kU} x^2 dF(x) < \Pr\{|x|>U\}\, U^2 k^{2-\alpha+\varepsilon/3}. \tag{25}$$

Démonstration. Soit X_i une suite de nombres augmentant indéfiniment avec $\varphi(X_i) \geqslant M^{-2}$. Soit I une loi limite des lois $(S_{n_i} - A_{n_i})/X_i$, où

$$A_{n_i} = n_i \int_{-X_i}^{X_i} x\, dF(x), \quad n_i \Pr\{|x|>X_i\} \simeq 1. \tag{26}$$

Y étant une variable aléatoire dépendant de I, on peut considérer Y comme somme de deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2, de fonctions caractéristiques

$$\varphi_1(t) = -\sigma^2 \frac{t^2}{2} + iat + \int_{-1}^{1} [e^{itx} - 1 - itx]\, dN(x)$$

et

$$\varphi_2(t) = \int_{|x|>1} (e^{itx} - 1)\, dN(x).$$

Il résulte de (23) et (26) que

$$E[Y_1] \leqslant 1, \qquad E[Y_1^2] \leqslant M^2 + 2, \qquad \int_{|x|>1} dN(x) \leqslant 1.$$

En vertu de la condition (18), nécessaire et suffisante pour que $EP'[L]$ soit fortement compact, on a $\int_{|x|>L} dN(x) < \varepsilon(l)$, car $T(x) < 2Mx$. Les lois limites I obtenues de la façon indiquée forment donc une famille normale et il y a une constante K telle que

$$m < K, \quad D(1/2) < K.$$

Par conséquent

$$E|Y|^{\alpha} = \int |x|^{\alpha} dG(x) < 2^{\alpha}|m|^{\alpha} + 2^{\alpha} \int_{|x|>2|m|} |x-m|^{\alpha} dG(x)$$

$$< 2^{\alpha}|m|^{\alpha} + 2^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |x-m|^{\alpha} dG(x)$$

et

$$C > E[|Y_1 + Y_2|]^{\alpha} > \Pr\{|X_1| < 3\sqrt{M^2+2}\} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \int_{|x|>3\sqrt{M^2+2}} |x|^{\alpha} dG(x).$$

D'autre part, on a (cf. Var. ind.)

$$dG(x) > e^{-1} dN(x),$$

c'est à dire

$$C' = \left[3\sqrt{M^2+2}\right]^{\alpha} + \frac{4}{3} eC \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} > \int_{|x|>1} |x|^{\alpha} dN(x).$$

Nous en déduisons que si $k^{\varepsilon/4} > 2(1+C') + M^{2-\alpha+\varepsilon/4}$, on a

$$\int_{|x|>k} dN(x) < k^{-\alpha+\varepsilon/4}.$$

Il en résulte facilement qu'on a pour $U > U_0$ et $\varphi(U) > M^{-2}$

$$\Pr\{|x| > Uk\} < k^{-\alpha+\varepsilon/3} \Pr\{|x|>U\}.$$

On peut écrire

$$\int_{1<x\leqq Y} x^2 dN(x) = \int_{1<x\leqq Y} \left[\int_{1<y\leqq Y} y^{\alpha} dN(y) - \int_{1<y\leqq x} y^{\alpha} dN(y)\right] dx^{2-\alpha} < C' Y^{2-\alpha}.$$

La seconde formule du lemme en résulte sans peine.

Lemme 2. *Sous les hypothèses du théorème, pour* $X > X_0$,

$$\int_{-X}^{X} x^2\, dF(x) < C'' \, |X|^{2-\alpha+\varepsilon/2}.$$

Démonstration. Nous pouvons toujours supposer $M \neq k$. Posons $X_{i+1} = k X_i$ si $\varphi(X_i) > M^{-2}$ et $X_{i+1} = M X_i$ si $\varphi(X_i) \leqslant M^{-2}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Posons

$$y(X) = \int_{-X}^{X} x^2\, dF(x).$$

Si $\varphi(X) \leqslant M^{-2}$, on a

$$y(MX) = y(X) + \int_{MX \geq |x| > X} x^2 dF(x) \leqslant y(X) + \Pr\{|x| > X\}\, X^2 M^2,$$

$$y(MX) \leqslant 2y(X) < M^{2-\alpha} y(X).$$

Supposons $\varphi(X) > M^{-2}$; dans ce cas

$$y(kX) < k^{2-\alpha+\varepsilon/3} \Pr\{|x| > X\}\, X^2 + y(X).$$

$\varphi(X_i) > M^{-2}, \ldots, \varphi(X_{i+\varrho}) > M^{-2}$ entraînent, en tenant compte du lemme 1, si $l \leqslant \varrho$,

$$y(X_{i+l}) < y(X_i) + \Pr\{|x| > X_i\}\, X_i^2 \left(\frac{X_{i+l}}{X_i}\right)^{2-\alpha+\varepsilon/3} \frac{1}{1 - k^{-(2-\alpha+\varepsilon/3)}}.$$

Si le nombre des X_i avec $\varphi(X_i) \leqslant M^{-2}$ (ou celui avec $\varphi(X_i \geqslant M^{-2})$ est limité, il en résulte immédiatement le lemme. S'il y a un nombre infini d'indices j_r tels que

$$y(X_i) \leqslant M^{-2} \quad \text{si} \quad j_{2r-1} < i \leqslant j_{2r},$$

$$y(X_i) > M^{-2} \quad \text{si} \quad j_{2r} < i \leqslant j_{2r+1},$$

il suit pour $j_{2r} < i < j_{2r+1}$, $i = j_{2r} + l$, $l > 1$ que

$$y(X_i) < 2y(X_{j_{2r}}) + \Pr\{|x| > X_{j_{2r}+1}\}\, X^2_{1+j_{2r}} \left(\frac{X_i}{X_{1+j_{2r}}}\right)^{2-\alpha+\varepsilon/2}$$

$$< y(X_{j_{2r}})\, [X_i / X_{1+j_{2r}}]^{2-\alpha+\varepsilon/2},$$

$$\Pr\{|x| > X_{1+j_{2r}}\}\, X^2_{1+j_{2r}} < \Pr\{|x| > X_{j_{2r}}\}\, X^2_{j_{2r}} M^2 < y(X_{j_{2r}})$$

$$u(X_i) < y(X_{j_{2r}})\, [2 + (X_i / X_{1+j_{2r}})^{2-\alpha+\varepsilon/2}]$$

$$< y[X_{j_{2r}}]\, (X_i / X_{j_{2r}})^{2-\alpha+\varepsilon/2}\, (2 + M^{2-\alpha+\varepsilon/2}),$$

$$y(X_i) < y[X_{j_{2r}}]\, (X_i / X_{j_{2r}})^{2-\alpha+3\varepsilon/4}. \tag{28}$$

On obtient immédiatement à partir de (27) et (28)

$$y(X_i) < C X_i^{2-\alpha+3\varepsilon/4}$$

et

$$y(x) < (M + k)\, C_1' x^{2-\alpha+3\varepsilon/4}.$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème XI.

Posons $u(x) = \int_{-x}^{x} |t|^{\alpha} dF(t)$, alors

$$y(x) = \int_{-x}^{x} [u(x) - u(t)]\, d(t^{2-\alpha}),$$

$$y(2x) > [u(2x) - u(x)]\, |x|^{2-\alpha}.$$

Ceci donne, en utilisant le lemme 2 pour $x > x_0$,

$$u(2x) - u(x) < k' |x|^{\varepsilon/2},$$

donc $\Pr\{2U \geqslant x > U\} < k' U^{-\alpha+\varepsilon/2}$, d'où l'on conclut immédiatement que

$$\int |x|^{\alpha-\varepsilon} dF(x) < \infty, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque. Il se peut très bien que $EP'[L]$ contienne des lois sans moments et que quand même

$$\int |x|^{\alpha} dF(x) < \infty \qquad (\alpha < 2).$$

Nous allons en donner un exemple. Soit $2 > \beta > \alpha$:

$dF(x) = 0$ si $|x| < X_1 = 1$,

$$dF(x) = dF(-x) = \begin{cases} \Pr\{x > X_{2i-1}\}\, d(X/X_{2i-1})^{-\beta} & \text{si } X_{2i-1} \leqslant x < X_{2i} \\ \Pr\{x > X_{2i}\}\, d(1/\lg[eX/X_{2i}]) & \text{si } X_{2i} \leqslant x < X_{2i+1}, \end{cases}$$

$$X_{2i+1} = \lg e i \,.\, X_{2i}, \qquad X_{2i} = e^{i} X_{2i-1}.$$

On vérifie aisément que $EP'[L]$ contient la loi dont la fonction de sauts est $N(x)$:

$$dN^{(+)}(x) = dN^{(-)}(-x) = d[x^{-\beta}] \quad \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1,$$
$$= d(\lg e x)^{-1} \text{ si } \quad x > 1,$$

loi qui n'a pas de moments.

Le lecteur pourra prouver (la démonstration est analogue à celle du théorème XI) la proposition:

Pour que $EP[L]$ soit fortement compact, il faut, mais il ne suffit pas, que pour un $\alpha > 0$

$$\int |x|^\alpha dF(x) < \infty .$$

(Reçu par la Rédaction le 1. 8. 1939).

Про сукупність степенів одного закону імовірностей

В. Деблін (Париж).

(Резюме)

Якщо $S_n = \sum^n x_i$, де x_i стохастичні незалежні змінні, то при відповідно дібраних сталих a_n, b_n дистрибуанта $F_n(\xi)$ стохастичної змінної $(S_n - a_n)/b_n$ збігається (для $n \to \infty$) — за певними умовами — до границі. Автор досліджує множину тих граничних функцій розподілу, впроваджуючи відповідний функційний простір і поняття класу $K(L)$ степенів закону розподілу L.

On isomorphisms of rings of linear operators

by

M. EIDELHEIT (Lwow).

This paper is in connection with the researches on general linear rings which are due to S. MAZUR[1]). We consider here especially the rings $\mathfrak{A}(E)$ of linear operators transforming a given BANACH space E into another BANACH space E'. We shall see, (this was suggested by MAZUR), that in any ring $\mathfrak{A}(E)$ the norm is in a certain sense uniquely determined. Furthermore, two rings $\mathfrak{A}(E_1)$, $\mathfrak{A}(E_2)$ are (algebraically) isomorphic if and only if the spaces E_1, E_2 are isomorphic[2]). The isomorphism

$$V = \Phi(U) \quad \text{where} \quad U \in \mathfrak{A}(E_1), \; V \in \mathfrak{A}(E_2),$$

is then of the form

$$V = AUA^{-1},$$

A being a linear operator which yields the isomorphism between E_1 and E_2[3]). In this theorem we may replace the property of $\Phi(U)$ to be additive by the continuity.

§ 1.

1. Consider an arbitrary BANACH space E and denote by $\mathfrak{A}(E)$ the set of all linear operators

$$y = U(x)$$

[1]) S. Mazur, Sur les anneaux linéaires, C. R. Acad. Sc. Paris, 207 (1938) p. 1025—1027.

[2]) As to the definition of isomorphic spaces, see S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografie Matematyczne, Warszawa 1932, p. 180.

[3]) This theorem was proved for maximal rings of matrices by Weber: Isomorphismus maximaler Matrizenringe, Journ. f. Math. 171 (1934) p. 227—242.