$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(f(\omega_n x+\vartheta_n)+g(\omega_n x+\vartheta_n)\right)$$
$$=\text{спр. макс.}\, f(x)+\text{спр. макс.}\, g(x).$$

Як застосування наведених теорем, одержуємо, між іншим:

1) Якщо $f(x)$ вимірна, періодична функція, то для кожної послідовності чисел $\{a_n\}$ маємо майже всюди

$$\varlimsup_{n\to\infty}|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)|=\text{спр. макс.}\,|f(x)|\cdot\varlimsup_{n\to\infty}|a_n|,$$

виявши випадок, у якому один чинник правої сторони дорівнює нулеві, а другий безконечний.

2) Якщо $f(x)$, $g(x)$ вимірні, обмежені функції, з неспільномірними періодами, та спр. макс. $f(x)=$ спр. макс. $(-f(x))$, спр. макс. $g(x)=$ спр. макс. $(-g(x))$ то майже всюди:

$$\varlimsup_{n\to\infty}|a_n f(\omega_n x+\vartheta_n)+b_n g(\omega_n x+\vartheta_n)|$$
$$=\varlimsup_{n\to\infty}\left(|a_n|\,\text{спр. макс.}\,|f(x)|+|b_n|\,\text{спр. макс.}\,|g(x)|\right).$$

Sur une propriété caractéristique de l'ellipsoïde

par

H. AUERBACH (Léopol).

Dans cette Note, nous nous proposons d'établir le théorème:

Soit, dans l'espace affine à $n+1$ dimensions ($n>0$), S une surface close bornée jouissant de la propriété suivante: étant donnés deux points quelconques P, P' de S, il existe une projectivité laissant invariante la surface et faisant correspondre au point P le point P'. Alors la surface S est un ellipsoïde.

Nous ne supposons pas que la surface soit régulière ou connexe, mais seulement qu'elle soit une variété à n dimensions au sens topologique, close et sans point commun avec le plan à l'infini.

Ce théorème contient comme cas particuliers un théorème analogue relatif aux transformations affines[1]), et un théorème de M. E. Otto[2]), où l'on suppose que S est une surface convexe et possède la propriété suivante: étant donnés deux points P, P' de la surface et un point R situé à l'intérieur du segment PP', il existe une projectivité laissant invariants la surface et le point R et transformant P en P'.

1. Nous emploierons un système de coordonnées affines ayant pour l'origine un point de la surface S. On peut alors représenter les projectivités transformant la surface en elle-même

[1]) H. Auerbach, Sur les groupes bornés de substitutions linéaires, Comptes Rendus 195 (1932) p. 1367—1369.

[2]) Peut-être non publié jusqu'à présent.

sous la forme

$$x_i' = \frac{a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in+1}x_{n+1} + a_{in+2}}{a_{n+21}x_1 + \ldots + a_{n+2\,n+1}x_{n+1} + 1} \quad (i=1,\ldots,n+1).$$

L'ensemble Γ de toutes ces projectivités est évidemment un sous-groupe fermé du groupe projectif général. D'après un théorème fondamental de M. Cartan[3]), c'est un groupe de Lie. Il est formé d'un sous-groupe invariant connexe G et d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de composantes:

$$\Gamma = G + a_1G + a_2G + \ldots$$

En effectuant sur un point quelconque P de la surface toutes les transformations du groupe G, on obtient une variété analytique partout régulière $G(P)$[4]), située sur S. On a

$$S = G(P) + a_1G(P) + a_2G(P) + \ldots$$

Toutes les variétés au second membre ont évidemment la même dimension, nécessairement égale à n. L'ensemble $G(P)$ est donc ouvert sur la surface S. Par conséquent, cette surface est analytique, partout régulière.

2. Il existe évidemment un ellipsoïde entourant la surface S et ayant avec elle au moins un point commun. Le plan tangent de l'ellipsoïde en un pareil point est en même temps celui de la surface et ne contient pas d'autres points de celle-ci. En vertu des hypothèses du notre théorème, il en résulte que chaque plan tangent de la surface n'a avec elle qu'un seul point commun. En outre, tous les points d'un certain voisinage du point de contact sont situés du même côté du plan tangent. Puisque les plans tangents en deux points différents sont toujours différents, on peut considérer la surface S comme l'enveloppe de ∞^n plans.

Il suffit de démontrer notre théorème dans l'hypothèse que la surface S est connexe. En effet, on pourra alors affirmer que, dans le cas général, elle se compose d'un nombre fini d'ellipsoïdes,

[3]) E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs, Mém. Sc. Math. 42 (1930) p. 24.

[4]) Voir L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni (Pisa, Spoerri 1918) § 63.

sans point commun deux à deux. Or, si ce nombre était >1, il existerait évidemment des plans tangents ayant avec la surface plusieurs points communs.

La surface S, supposée connexe, est transformée transitivement par le groupe connexe G. En effet, si P est un point quelconque de S, l'ensemble $G(P)$ est ouvert sur S. Pour un point A de sa frontière, on aurait donc $G(A) = G(P)$, ce qui est impossible. Par conséquent $G(P) = S$.

3. Nous écrirons les projectivités du groupe G sous la forme homogène:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n+2} c_{ik}x_k \quad (i=1,\ldots,n+2), \tag{1}$$

en supposant les coefficients fixés de manière que le déterminant $|c_{ik}|$ ait le module 1 et que $c_{n+2\,n+2}$ soit positif.

Les substitutions linéaires ainsi normées forment un groupe. En effet, la substitution inverse s^{-1} et le produit st sont évidemment normés si la substitution s se réduit à l'identité; le groupe G étant connexe, ils le sont aussi dans le cas général. On voit de même que le déterminant $|c_{ik}|$ est toujours égal à $+1$.

Dans la suite, le groupe G sera identifié avec le groupe linéaire qui vient d'être défini.

4. Un morceau suffisamment petit de la surface S admet une représentation paramétrique

$$x_i = f_i(u_1,\ldots,u_n) \quad (i=1,\ldots,n+2),$$

où les f_i sont des fonctions analytiques régulières des variables $u_1,\ldots,u_n$ et le rang de la matrice $\left(x, \frac{\partial x}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial x}{\partial u_n}\right)$ est égal à $n+1$.

La surface S étant l'enveloppe de ∞^n plans, on peut définir les deux formes différentielles F_2, F_3 de M. Fubini[5]). Elles sont invariantes par rapport aux changements des paramètres à jacobien positif, ainsi que par le groupe G. La forme quadra-

[5]) Voir G. Fubini-E. Čech, Geometria proiettiva differenziale (Bologna, Zanichelli 1926—27) t. 2, § 104.

tique F_2 est définie, puisque, comme nous avons vu, tous les points de la surface sont elliptiques.

Supposons, par impossible, que la surface S ne soit pas un ellipsoïde. Alors la forme cubique F_3 ne s'annule identiquement dans aucun point de S. Par conséquent, l'expression différentielle $F_3 . |F_2|^{-3/2}$, positivement homogène de degré zéro en $du_1, \dots, du_n$, admet, dans chaque point de la surface, un maximum positif J, qui est manifestement un invariant absolu des formes F_2, F_3 et dépend d'une façon continue des paramètres u. Si l'on multiplie les coordonnées x par un facteur $\varrho(u_1, \dots, u_n)$, possédant des dérivées continues jusqu'au troisième ordre, les nouvelles formes seront $\varrho^2 F_2$, $\varrho^2 F_3$, et l'invariant J deviendra $|\varrho|^{-1} J$.

5. Supposons que la surface S soit représentée en coordonnées cartésiennes ($x_{n+2} = 1$). L'invariant J, relatif à ce choix des coordonnées, est une fonction du point, $J(P)$, continue sur toute la surface. Pour le calculer dans un point donné, on peut par exemple prendre n des variables $x_1, \dots, x_{n+1}$ comme paramètres.

Soit (1) une transformation quelconque du groupe G. Si $x_1, \dots, x_{n+1}, 1$ sont les coordonnées d'un point variable P de la surface, on peut considérer les x' comme des nouvelles coordonnées homogènes du point correspondant P', rapportées par exemple aux paramètres $x_1, \dots, x_n$ dans un certain morceau de S. Les formes F_2, F_3 au point P' deviennent alors égales à celles au point P; la nouvelle valeur de l'invariant J est donc $J(P)$. D'autre part, les coordonnées x' s'obtiennent en multipliant les coordonnées cartésiennes du point P' par le facteur $\varrho = \sum_{k=1}^{n+2} c_{n+2\,k} x_k$. La nouvelle valeur de l'invariant au point P' est donc $|\varrho|^{-1} J(P')$. Les deux expressions sont égales; on a donc

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+2} c_{n+2\,k}\, x_k\Big| = \frac{J(P')}{J(P)}.$$

La fonction $J(P)$ étant positive et continue et les coordonnées cartésiennes du point P' étant bornées, il existe une constante positive M telle que l'on a

$$\Big|\sum_{k=1}^{n+2} c_{ik}\, x_k\Big| < M \qquad (i = 1, \dots, n+2)$$

pour toute transformation du groupe G et pour tout point $(x_1, \dots, 1)$ de la surface.

Choisissons sur la surface $n+2$ points non situés dans un même plan, représentés en coordonnées cartésiennes. Les coordonnées x' des points qui leur correspondent par une transformation quelconque du groupe G sont toutes de module $< M$ et s'expriment au moyen de $(n+2)^2$ équations linéaires. En résolvant ce système d'équations, on conclut que les coefficients c_{ik} sont uniformément bornés.

6. Effectuons toutes les transformations du groupe G sur l'origine $(0, \dots, 0, 1)$. Si l'on considère les coordonnées des points correspondants $(c_{1\,n+2}, \dots, c_{n+2\,n+2})$ comme des coordonnées cartésiennes dans l'espace affine à $n+2$ dimensions, on obtient dans cet espace un ensemble borné E, invariant par le groupe G. Le plus petit ensemble convexe contenant E jouit de la même propriété, ainsi que son centre de gravité. La dernière coordonnée de ce point est positive, puisqu'il en est ainsi pour les points de l'ensemble E. En revenant à l'espace à $n+1$ dimensions, on voit que le groupe G y possède un point invariant O.

Comme le groupe G est borné, il laisse invariante une forme quadratique positive définie $\varphi(x_1, \dots, x_{n+2})$[6]) et, par suite, conserve la polarité par rapport à la quadrique imaginaire $\varphi = 0$. Le plan polaire ω du point O est donc aussi invariant par G. Il est évident que ce plan ne contient pas le point O et qu'il n'a pas de point commun avec la surface.

Soit t une substitution linéaire faisant correspondre au point O l'origine et au plan ω le plan à l'infini. A la surface S correspond par cette projectivité une surface bornée $\bar{S}$, transformée transitivement par le groupe linéaire borné et connexe $\bar{G} = t\,G\,t^{-1}$ qui laisse invariants l'origine et le plan à l'infini et admet une forme quadratique positive définie invariante $\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_{n+2})$.

On a évidemment $\bar{c}_{k\,n+2} = \bar{c}_{n+2\,k} = 0 \quad (k = 1, \dots, n+1)$ pour toute substitution de $\bar{G}$; de plus $\bar{c}_{n+2\,n+2} = 1$, car autrement le groupe ne serait pas borné et connexe. Il s'ensuit que les transformations du groupe $\bar{G}$ s'expriment en coordonnées

[6]) Loc. cit. [1]) ou W. Fenchel, Über beschränkte lineare Gruppen, Matem. Tidsskr. (1936) p. 10.

cartésiennes sous la forme

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n+1} \bar{c}_{ik} x_k \qquad (i=1,\ldots,n+1)$$

et laissent invariante la forme quadratique positive définie de ces coordonnées $\bar{\varphi}(x_1,\ldots,x_{n+1},0)$. Cette forme est donc constante sur la surface $\bar{S}$. Par conséquent, celle-ci est un ellipsoïde. La surface S est donc aussi un ellipsoïde.

(Reçu par la Rédaction le 22. 11. 1939).

Характеристична властивість еліпсоїду

Г. Ауербах (Львів).

(Резюме)

Нехай S позначує обмежену і замкнену поверхню, положену в $(n+1)$-розмірностнім афіннім просторі, що має таку властивість: якщо P і P' довільні, лежачі на S точки, то існує проєктивна трансформація, що перетворює поверхню S в себе, і при якій точка P переходить в точку P'.

Тоді поверхня S є еліпсоїдом.

Une propriété des familles d'ensembles bien ordonnés linéaires

par

G. KUREPA (Glina).

Introduction.

1. J'avais posé le problème[1]) de savoir si chaque famille non dénombrable d'ensembles bien ordonnés de nombres rationnels contient une sous-famille non dénombrable dont aucun élément n'est segment initial d'un autre élément de la sous-famille.

Dans ce qui suit, je prouverai que la réponse au problème précédent est affirmative (v. lemme 1), ce qui me permettra de prouver — pour justifier le titre de l'Article — que *toute famille non dénombrable F d'ensembles linéaires bien ordonnés contient une sous-famille Φ de même puissance que la famille F et jouissant de la propriété qu'aucun élément de Φ n'est un segment initial d'un autre élément de Φ* (v. lemme 2), fait qui à son tour entraîne la normalité[2]) de tout tableau ramifié[3]) dans lequel il existe une fonction réelle uniforme croissante

[1]) G. Kurepa, Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse, Paris, 1935; aussi Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935) p. 1—138, en particulier p. 3 et p. 134 en bas.

[2]) Un ensemble partiellement ordonné est dit *normal* s'il est fini ou a même puissance que l'un de ses sous-ensembles F jouissant de la propriété suivante: quel que soit le point a de F, l'ensemble $[a]_F$ des points de F comparables à a est un sous-ensemble ordonné de F.

[3]) Un ensemble E partiellement ordonné par une relation d'ordre $<$ est dit un *tableau ramifié* par rapport à $<$ si, quel que soit le point a de E, l'ensemble $(\,.\,,a)_E$ des points x de E vérifiant $x<a$ est vide ou un sous-ensemble bien ordonné de E.