Sur les rétractes par déformation des coupures de la surface sphérique

par

M. WOJDYSŁAWSKI (Léopol).

1. On sait que, pour les continus $\mathfrak{X}$ localement connexes situés sur le plan $\mathfrak{E}^2$ (ou sur la surface sphérique $\mathfrak{S}_2$ sans un point), les propriétés suivantes sont équivalentes[1]:

(1.1) $\mathfrak{X}$ est un *rétracte de voisinage*[2]),

(1.2) $\mathfrak{X}$ divise $\mathfrak{E}^2$ en un nombre fini de composantes bornées (ou $\mathfrak{S}_2$ en un nombre fini de composantes),

(1.3) $\mathfrak{X}$ contient un *graphe*[3]) $\mathfrak{G}$ qui en est un *rétracte par déformation*[4]).

[1]) Pour l'équivalence (1.1) $\rightleftarrows$ (1.2) voir K. Borsuk, Fundam. Math. 19 (1932) p. 242. L'implication (1.2) $\to$ (1.3) est une conséquence immédiate d'un théorème de S. Eilenberg, Fundam. Math. 27 (1936) p. 173, th. 2; pour l'implication inverse voir[4]).

[2]) Un ensemble $X \subset \mathfrak{X}$ est dit *rétracte de* $\mathfrak{X}$ s'il existe une fonction continue r transformant $\mathfrak{X}$ en X et telle que $r(x)=x$ pour tout point $x \in X$. Un ensemble $\mathfrak{X}$ s'appelle *rétracte de voisinage* si chaque espace $\mathfrak{Y} \supset \mathfrak{X}$ dans lequel $\mathfrak{X}$ est un ensemble fermé contient un voisinage U de $\mathfrak{X}$ dont $\mathfrak{X}$ est un rétracte. Dans le cas où $\mathfrak{X}$ est un rétracte de chaque espace $\mathfrak{Y} \supset \mathfrak{X}$ dans lequel $\mathfrak{X}$ est fermé, on appelle $\mathfrak{X}$ *rétracte absolu;* cf. K. Borsuk, ibid., p. 222.

[3]) c. à d. image homéomorphe d'un polytope connexe fini à 1 dimension („gewöhnliche Kurve" au sens de K. Menger, Kurventheorie, p. 63).

[4]) L'ensemble X est dit *rétracte de* $\mathfrak{X}$ *par déformation* s'il existe une fonction $r(x,t)$ continue pour $x \in \mathfrak{X}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, telle que $r(x,t) \in \mathfrak{X}$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, que $r(x,0)=x$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $r(x,t)=x$ pour tout $x \in X$ et $r(x,1) \in X$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$; cf. K. Borsuk, Fundam. Math. 21 (1933) p. 91. On a le théorème suivant, qui — comme la définition précédente — n'exige pas la compacité de $\mathfrak{X}$:

(1.4) *Si X est un rétracte par déformation d'un ensemble connexe $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{S}_2$, chaque composante de $\mathfrak{S}_2 - X$ contient une et une seule composante de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$.*

En effet, si $\mathfrak{X}$ divise $\mathfrak{S}_2$ entre les points p et p', tout ensemble s'obte-

Or, pour les ensembles connexes non compacts $\mathfrak{X}$, même localement connexes par arcs, les implications (1.1) $\longrightarrow$ (1.2) et (1.1) $\longrightarrow$ (1.3) peuvent être en défaut, comme le montre l'exemple formé de la suite des circonférences sur $\mathfrak{E}^2$ de rayon $1/2^n$ et de centre $(3/2^n, 0)$ où $n=1,2,\ldots$

Dans cette Note, je donne donc une autre caractérisation des rétractes de voisinage $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{S}_2$ quelconques (th. 1). Je démontre ensuite que les implications (1.2) $\longrightarrow$ (1.3) et (1.3) $\longrightarrow$ (1.1) subsistent pour les v r a i s sous-ensembles $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{S}_2$, connexes et localement connexes par arcs (th. 3), ce qui donne en particulier, en vertu de l'implication (1.3) $\longrightarrow$ (1.2)[5]), la généralisation de l'équivalence entre les propriétés (1.2) et (1.3)[6]). Enfin, je montre que l'on peut pousser davantage la spécialisation du graphe $\mathfrak{G}$ figurant dans (1.3).

2. Dans une Note antérieure[7]), j'ai établi une condition suffisante pour qu'un ensemble $\mathfrak{X}$ soit un rétracte absolu[2]). Par une légère modification, cette condition devient une condition suffisante pour que $\mathfrak{X}$ soit un rétracte de voisinage. A savoir, (9.2) y est à remplacer par

(2.2) *Si $\lim\limits_{k=\infty} W_{i_k} = x$, l'ensemble A_{i_k} est contractile dans B_{i_k} à partir d'un k suffisamment grand.*

Le lemme en question prendra alors la forme suivante:

Soit $Q=(q_1, q_2, \ldots)$, où $q_i \neq q_j$ pour $i \neq j$, un ensemble dénombrable quelconque, dense dans $\mathfrak{X}$. Soit $W_1, W_2, \ldots$ la suite de tous les sous-ensembles finis de Q.

Pour que $\mathfrak{X}$ soit un rétracte de voisinage, il suffit qu'il existe deux suites $A_1, A_2, \ldots$ et $B_1, B_2, \ldots$ de sous-ensembles de $\mathfrak{X}$, telles que:

(2.1) $$W_i \subset A_i,$$

nant de $\mathfrak{X}$ par une déformation continue dans $\mathfrak{S}_2 - (p) - (p')$ divise $\mathfrak{S}_2$ entre les mêmes points. Cf. S. Eilenberg, Fundam. Math. 26 (1936) p. 77, 5.

Pour les $\mathfrak{X}$ connexes et localement connexes par arcs, la réciproque de (1.4) est aussi vraie; voir plus loin, th. 2.

[5]) qui résulte du th. (1.4), voir[4]).

[6]) Cette question m'a été posée par M. C. Kuratowski et c'était le point de départ de la Note présente.

[7]) M. Wojdysławski, Fundam. Math. 32 (1939) p. 187, § 9.

(2.2) *Si* $\lim_{k=\infty} W_{i_k} = x$, *l'ensemble* A_{i_k} *est contractile dans* B_{i_k} *à partir d'un* k *suffisamment grand,*

(2.3) $W_j \subset W_i \neq W_j$ *entraîne* $B_j \subset A_i$,

(2.4) $\lim_{k=\infty} W_{i_k} = x$ *entraîne* $\lim_{k=\infty} B_{i_k} = x$.

La démonstration en est la même que celle du lemme primitif.

Dans la suite, nous n'aurons d'ailleurs besoin que du cas particulier de la condition en question, à savoir où $A_i = B_i$ pour $i = 1, 2, \dots$ Le lemme peut alors être énoncé comme suit:

Lemme 1. *Pour que* $\mathfrak{X}$ *soit un rétracte de voisinage, il suffit qu'il existe une suite* $A_1, A_2, \dots$ *telle que*:

(2.5) $W_j \subset W_i$ *entraîne* $W_j \subset A_j \subset A_i$,

(2.6) $\lim_{k=\infty} W_{i_k} = x$ *entraîne* $\lim_{k=\infty} A_{i_k} = x$,

(2.7) *Si* $\lim_{k=\infty} W_{i_k} = x$, *l'ensemble* A_{i_k} *est un rétracte absolu à partir d'un* k *suffisamment grand.*

3. Désignons désormais par $\mathfrak{X}$ un vrai sous-ensemble connexe de $\mathfrak{S}_2$ et, pour tout $X \subset \mathfrak{X}$, par X_c l'ensemble X augmenté de toutes les composantes de $\mathfrak{S}_2 - X$ contenues dans $\mathfrak{X}$[8]. Cela correspond, sur le plan, à ajouter à $X \subset \mathfrak{X} \subset \mathfrak{E}^2$ toutes les composantes bornées de $\mathfrak{E}^2 - X$ contenues dans $\mathfrak{X}$.

On a par définition pour tout $X \subset \mathfrak{X}$ les propositions suivantes (qui subsistent en y remplaçant $\mathfrak{S}_2$ par $\mathfrak{E}^2$):

(3.1) $X \subset X^*$ *entraîne* $X \subset X_c \subset X^*_c \subset \mathfrak{X}$,

(3.2) *Chaque composante de* $\mathfrak{S}_2 - X_c$ *contient au moins une composante de* $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$,

(3.3) *Si* X *est un continu localement connexe,* X_c *l'est aussi,*

(3.4) *Si,* X *étant un continu localement connexe,* $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$ *est connexe,* X_c *est un rétracte absolu,*

car X_c est alors un continu localement connexe d'après (3.3) et $\mathfrak{S}_2 - X_c$ est connexe d'après (3.2)[9].

[8]) Je dois cette idée à M. S. Eilenberg.

[9]) K. Borsuk, Fundam. Math. 19 (1932) p. 229, § 13 et p. 232, § 33.

(3.5) $\lim_{k=\infty} X_k = x \in \mathfrak{X}$ *entraîne* $\lim_{k=\infty} (X_k)_c = x$,

car, le diamètre de $X \subset \mathfrak{E}^2$ ne changeant pas lorsqu'on ajoute à X des composantes bornées de $\mathfrak{E}^2 - X$, on a $\delta(X_c) = \delta(X)$.

4. Lemme 2. *Si* $\mathfrak{X}$ *est un ensemble connexe et localement connexe par arcs, pour tout couple* R_1, R_2 *de composantes distinctes de* $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$, *il existe une courbe simple fermée* $S_1 \subset \mathfrak{X}$ *qui divise le plan entre* R_1 *et* R_2. *Si en outre* $\delta(R_1) < \varepsilon$, *on peut avoir toujours* $\delta(S_1) < 2\varepsilon$.

En effet, soient R un cercle ouvert de diamètre 2ε contenant $\overline{R}_1$, et S la circonférence de R. Un sous-ensemble ouvert de l'ensemble localement connexe par arcs étant lui même de ce genre, $\mathfrak{X}R$ est localement connexe par arcs. D'autre part, $\mathfrak{X}R$ divise $\mathfrak{S}_2$ entre R_1 et R_2, car R contient la frontière $F(R_1)$ de R_1 (sans contenir des points de $R_1 + R_2$). L'existence d'une courbe simple fermée $S_1 \subset \mathfrak{X}R$ divisant $\mathfrak{S}_2$ entre R_1 et R_2 résulte alors d'un théorème connu[10]).

Lemme 3. *Soit* $\mathfrak{X}$ *un ensemble connexe et localement connexe par arcs; soient* $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ *toutes les composantes de* $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$. *Alors, pour tout sous-continu localement connexe* C *de* $\mathfrak{X}$, *il existe un rétracte compact de voisinage* Σ *tel que* $C \subset \Sigma$ *et que les* n *régions-composantes* $R_1, R_2, \dots, R_n$ *de* $\mathfrak{S}_2 - \Sigma$ *satisfont à la condition*

(4.1) $Q_k \subset R_k$ *pour* $k = 1, 2, \dots, n$.

Démonstration. Soient $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ les composantes de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$. $\mathfrak{X}$ étant un ensemble connexe et localement connexe par arcs, il existe d'après le lemme 2 des courbes simples fermées $S_{ij} \subset \mathfrak{X}$ qui divisent $\mathfrak{S}_2$ entre Q_i et Q_j. Posons $\Sigma = (C + \sum_{i,j \leq n} S_{ij})_c$. On conclut de la définition de S_{ij} que chaque région-composante de $\mathfrak{S}_2 - (C + \sum_{i,j \leq n} S_{ij})_c$ contient tout ou plus une des composantes $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$; d'autre part, toute région-composante de $\mathfrak{S}_2 - \Sigma$ contient en vertu de (3.2) au moins une des composantes $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. Les régions-composantes $R_1, R_2, \dots$ de $\mathfrak{S}_2 - \Sigma$ sont donc au nombre n et on peut les ranger de façon à avoir (4.1).

[10]) S. Eilenberg, Fundam. Math. 26 (1936) p. 84.

5. Théorème 1. *Pour que $\mathfrak{X}$ soit un rétracte de voisinage, il faut et il suffit qu'il soit localement connexe par arcs et que*

(5.1) $$\lim_{k=\infty} Q_{i_k} = p \quad \textit{entraîne} \quad p \text{ non} \in \mathfrak{X}$$

pour chaque suite $\{Q_{i_k}\}$ *des composantes de* $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$.

Pour que $\mathfrak{X}$ *soit en outre un rétracte absolu, il faut et il suffit que* $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$ *soit connexe.*

Démonstration. La condition est suffisante. Soit en effet $Q = (q_1, q_2, \ldots)$, où $q_i \neq q_j$ pour $i \neq j$, un ensemble dénombrable dense dans $\mathfrak{X}$. Soit $W_1, W_2, \ldots$ la suite de tous les sous-ensembles finis de Q. Désignons par $\delta_{i_1 i_2}$ la borne inférieure des diamètres de tous les arcs simples unissants dans $\mathfrak{X}$ les points q_{i_1} et q_{i_2} [11]. Soit enfin $L_{i_1 i_2}$ l'un de ces arcs, tel que $\delta(L_{i_1 i_2}) \leqslant 2\,\delta_{i_1 i_2}$. Alors la condition (2.5) est réalisée pour l'ensemble

(5.2) $$A_i = \Big(\sum_{q_{i_1}, q_{i_2} \in W_i} L_{i_1 i_2}\Big)_c$$

en substituant dans (3.1) à X et X^* les ensembles $\sum\limits_{q_{i_1}, q_{i_2} \in W_i} L_{i_1 i_2}$ et $\sum\limits_{q_{i_1}, q_{i_2} \in W_j} L_{i_1 i_2}$ respectivement.

Il en est de même de la condition (2.6). En effet, supposons que $\lim\limits_{k=\infty} W_{i_k} = x$; l'ensemble $\mathfrak{X}$ étant localement connexe par arcs, on a $\lim\limits_{k=\infty} L_{i_{1_k} i_{2_k}} = x$ pour $q_{i_{1_k}}, q_{i_{2_k}} \in W_{i_k}$, d'où

$$\lim_{k=\infty} \sum_{q_{i_1}, q_{i_2} \in W_{i_k}} L_{i_1 i_2} = x.$$

On en conclut en vertu de (3.5) et (5.2) que $\lim\limits_{k=\infty} A_{i_k} = x$.

Passons à la démonstration de la condition (2.7). Admettons donc que $\lim\limits_{k=\infty} W_{i_k} = x$; en vertu de la condition (2.6), qui vient d'être établie, on a alors $\lim\limits_{k=\infty} A_{i_k} = x$ où $x \in \mathfrak{X}$. L'ensemble $\sum\limits_{q_{i_1}, q_{i_2} \in W_{i_k}} L_{i_1 i_2}$ étant un continu localement connexe, on conclut de

[11]) Comme ensemble connexe et localement connexe par arcs, $\mathfrak{X}$ est, comme on voit facilement, connexe par arcs.

(3.3) que A_{i_k} l'est aussi. Or, si parmi les A_{i_k} il y avait une infinité de coupures de $\mathfrak{S}_2$, il existerait d'après (3.2) et (5.2) une suite infinie $\{Q_{i_{k_m}}\}$ de composantes de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$ contenues respectivement dans les composantes $Q^*_{i_{k_m}}$ de $\mathfrak{S}_2 - A_{i_{k_m}}$; on aurait donc $\lim\limits_{m=\infty} Q^*_{i_{k_m}} = \lim\limits_{m=\infty} Q_{i_{k_m}} = x \in \mathfrak{X}$, contrairement à (5.1). Par conséquent, il n'y a qu'un nombre fini de A_{i_k} qui divisent $\mathfrak{S}_2$; tous les autres sont donc [9]) des rétractes absolus et la condition (2.7) se trouve établie. En vertu du lemme 1, il est donc démontré que $\mathfrak{X}$ est un rétracte de voisinage.

Enfin, si en particulier $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$ est connexe, tous les A_i sont en vertu de (3.4) des rétractes absolus et par conséquent [12]) il en est de même de $\mathfrak{X}$.

La condition est nécessaire. En effet, si $\mathfrak{X}$ est un rétracte de voisinage, $\mathfrak{X}$ est localement connexe par arcs. Supposons que $\lim\limits_{k=\infty} Q_{i_k} = x \in \mathfrak{X}$. D'après le lemme 2, il existerait donc une suite $S_1, S_2, \ldots$ de courbes simples fermées divisant $\mathfrak{S}_2$ entre la composante Q_{i_k} et une autre composante de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$, la suite $S_1, S_2, \ldots$ satisfaisant à la condition $\lim\limits_{k=\infty} S_k = x \in \mathfrak{X}$. Or, aucune des courbes S_k n'est homotope à un point dans $\mathfrak{S}_2 - Q_k$ [13]), donc à plus forte raison au point $x \in \mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$, de sorte que $\mathfrak{X}$ ne serait pas [14]) un rétracte de voisinage, contrairement à l'hypothèse.

En admettant en particulier que $\mathfrak{X}$ est un rétracte absolu, chaque courbe simple fermée $S \subset \mathfrak{X}$ y serait homotope à un point et $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$ serait connexe, c. q. f. d.

Corollaire 1. *Si* $\mathfrak{X}$ *est un ensemble localement connexe par arcs et divise* $\mathfrak{S}_2$ *en un nombre fini de composantes,* $\mathfrak{X}$ *est un rétracte de voisinage.*

6. Soient $S_{t,\bar{t}} \subset \mathfrak{E}^2$ l'anneau circulaire $\underset{z}{E}[t \leqslant |z| \leqslant \bar{t}]$ et S_t la circonférence $S_t = S_{t,t}$. Considérons un cas particulier de la situation de $\mathfrak{X}$: admettons notamment que $S_1 \subset \mathfrak{X} \subset S_{7/8,1}$ et $b_0(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{X}) = 2$ [15]). Posons enfin $\varphi(z) = z/|z|$ pour $z \neq (0,0)$.

[12]) D'après mon lemme précité dans [7]), en y posant $B_i = A_i$.

[13]) S. Eilenberg, Fundam. Math. 26 (1936) p. 75, th. 1.

[14]) tout rétracte absolu de voisinage étant localement connexe en toute dimension. Cf. C. Kuratowski, Fundam. Math. 24 (1935) p. 273, 3.

[15]) b_0 ($\mathfrak{X}$) désigne le nombre de composantes de $\mathfrak{X}$.

Dans ces hypothèses, on a les énoncés suivants:

(6.1) *Si $\mathfrak{Y}$ est un continu localement connexe, toute fonction continue $f(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X}$ est homotope dans $\mathfrak{X}$ à la fonction $\varphi f(\mathfrak{Y}) \subset S_1 \subset \mathfrak{X}$ (en symboles $f \sim \varphi f$ dans $\mathfrak{X}$).*

En effet, soit L un arc simple tel que $S_1 L \neq 0 \neq L f(\mathfrak{Y})$. Le continu $K = [L + S_1 + f(\mathfrak{Y})]_c$ étant localement connexe et remplissant d'après (3.2) la condition $b_0(\mathfrak{E}^2 - K) = 2$, S_1 est un rétracte par déformation de K[16]. Comme S_1 est aussi un rétracte de l'anneau $S_{7/8,1}$ et comme $S_1 \subset K$, on conclut que K est un rétracte de $S_{7/8,1}$. Les fonctions f et φf étant homotopes dans $S_{7/8,1}$, elles le sont aussi dans $K \subset \mathfrak{X}$.

(6.2) *Si $\mathfrak{Y}$ est un polytope infini et $f(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X}$, alors $f \sim \varphi f$ dans $\mathfrak{X}$.*

En effet, $\mathfrak{X}$ étant un rétracte de voisinage et les fonctions f et φf étant homotopes dans tout sous-polytope fini de $\mathfrak{Y}$ (en vertu de (6.1)), ces fonctions sont homotopes aussi dans $\mathfrak{Y}$ tout entier.

(6.3) *Si $\mathfrak{Y}$ est un polytope infini et $f_1(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X}$, $f_2(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X}$ sont des fonctions continues telles que $|f_1 - f_2| < 3/4$, on a $f_1 \sim f_2$.*

En effet, selon (6.2) on a $f_1 \sim \varphi f_1$ et $f_2 \sim \varphi f_2$. En outre

$$|\varphi f_1 - \varphi f_2| \leqslant |\varphi f_1 - f_1| + |f_1 - f_2| + |f_2 - \varphi f_2|$$
$$\leqslant 1/8 + 3/4 + 1/8 = 1,$$

ce qui entraîne $\varphi f_1 \sim \varphi f_2$ sur S_1, car $\delta(S_1) = 2 > 1$.

(6.4) *Si $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}^*$ sont des polytopes infinis tels que $\mathfrak{Y}^* \subset \mathfrak{Y}$, et $f_1(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X}$, $f^*(\mathfrak{Y}^*) \subset \mathfrak{X}$ sont des fonctions continues, alors l'homotopie dans $\mathfrak{X}$ entre f^* et la fonction partielle $f_1/\mathfrak{Y}^*$ entraîne l'existence d'un prolongement $f_2(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X}$ de f^**[17].

(6.5) *La circonférence S_1 est un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$.*

En effet, soit $\mathfrak{T}$ le segment $0 \leqslant t \leqslant 1/8$. Posons $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$;

[16]) cf. S. Eilenberg, Fundam. Math. 27 (1936) p. 173, th. 2.
[17]) cf. S. Eilenberg, Fundam. Math. 32 (1939) p. 167, (2.2).

c'est l'ensemble des points (z, t) où $z \in \mathfrak{X}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1/8$. Il suffit de construire une fonction continue $r(x, t) \in \mathfrak{X}$ pour $t \in \mathfrak{T}$, telle que

(6.6) $\quad r(z, 0) = (z, 0) \quad$ *pour* $z \in \mathfrak{X}$,

(6.7) $\quad r(z, t) = (z, 0) \quad$ *pour* $z \in S_1$,

(6.8) $\quad r(z, 1/8) = (\varphi(z), 0)$ *pour* $z \in \mathfrak{X}$.

$\mathfrak{X}$ étant un ensemble plan, on peut supposer que $\mathfrak{Z}$ est contenu dans un cylindre $S_{7/8,1} \times \mathfrak{T}$.

La „surface" $F = \mathfrak{X} \times (0) + S_1 \times \mathfrak{T} + \mathfrak{X} \times (1/8)$ étant un ensemble fermé dans le produit $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$, il existe[18] une fonction continue $\varkappa(\mathfrak{Z}) \subset S_{6/8,1} \times \mathfrak{T}$ telle $\varkappa(z, t) = (z, t)$ pour $(z, t) \in F$ et que $\mathfrak{Y} = \varkappa(\mathfrak{Z} - F)$ soit un polytope infini satisfaisant à la condition

(6.9) *$\{\Delta_k\}$ étant une suite de simplexes de $\mathfrak{Y}$, si l'on a $x_k \in \Delta_k$ et $\lim\limits_{k=\infty} x_k = x \in F$, alors $\lim\limits_{k=\infty} \Delta_k = x$.*

Posons $f_1(z, t) = (\varphi(z), 0)$ pour $(z, t) \in F + \mathfrak{Y} = \varkappa(\mathfrak{Z})$, et pour $(z, t) \in F$:

$$f_*(z, t) = \begin{cases} \varphi(z, 0) & \textit{pour } t \neq 0 \\ (z, 0) & \textit{pour } t = 0. \end{cases}$$

Le deux fonctions sont évidemment continues. $\mathfrak{X}$ étant un rétracte de voisinage (d'après le théorème 1), il existe un prolongement $f^*(z, t) \in \mathfrak{X}$ de f_*, continu pour $(z, t) \in F + \mathfrak{Y}_*$ où $\mathfrak{Y}_*$ est un polytope infini constituant un voisinage de l'ensemble F. En vertu de (6.9), le plus grand sous-polytope $\mathfrak{Y}^*$ de $\mathfrak{Y}_*$ défini par la formule $|f^*(z, t) - (z, t)| < 1/4$ est aussi un voisinage de F.

En vertu de (6.4), il existe un prolongement $f_2(\mathfrak{Y}) \subset \mathfrak{X}$ de la fonction f^*, car on a $|f^*(z, t) - f_1(z, t) \leqslant |f^*(z, t) - (z, t)| + |(z, t) - f_1(z, t)| \leqslant 1/4 + 1/4 = 1/2 < \delta(S_{7/8})$.

Le polytope $\mathfrak{Y}^*$ étant un voisinage de F, la fonction $f_2(\mathfrak{Y} + F) \subset \mathfrak{X}$ est continue. Posons $r(z, t) = f_2 \varkappa(z, t)$ pour $(z, t) \in \mathfrak{Z}$. On a:

$$r(z, 0) = f_2 \varkappa(z, 0) = f_2(z, 0) = f^*(z, 0) = f_*(z, 0) = (z, 0) \quad \text{pour } z \in \mathfrak{X},$$

$$r(z, t) = f_2 \varkappa(z, t) = f_2(z, t) = f^*(z, t) = f_*(z, t) = (\varphi(z), 0) = (z, 0) \quad \text{pour } z \in S_1,$$

[18]) C. Kuratowski, Fundam. Math. 24 (1935) p. 266, th. 2.

$$r\left(z,\tfrac{1}{8}\right)=f_2\varkappa\left(z,\tfrac{1}{8}\right)=f_2\left(z,\tfrac{1}{8}\right)=f^*\left(z,\tfrac{1}{8}\right)=f_*\left(z,\tfrac{1}{8}\right)=(\psi(z),0)$$
pour $z\in\mathfrak{X}$.

Les conditions (6.6) — (6.8) étant ainsi remplies, S_1 est un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$. L'énoncé (6.5) se trouve donc établi.

Supprimons à présent la restriction supplémentaire que $\mathfrak{X}$ soit situé dans l'anneau circulaire et considérons le cas plus général, à savoir où $\mathfrak{X}$ contient une courbe simple fermée S, est contenu lui-même dans une des régions complémentaires de S et divise le plan en deux composantes. Dans ce cas, il existe une homéomorphie $h(\mathfrak{X})$ de $\mathfrak{X}$ en un sous-ensemble de l'anneau circulaire $S_{7/8,1}$ telle que $h(S)=S_1$; de sorte que

(6.10) *S est un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$.*

7. Lemme 4. *Soit $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{E}^2$ un ensemble connexe et localement connexe par arcs. Soit R une région assujettie aux conditions:*

(7.1) *La frontière $F(R)$ de R est un continu localement connexe,*

(7.2) $$F(R)\subset\mathfrak{X}\subset R+F(R),$$

(7.3) *R contient exactement une composante de $\mathfrak{E}^2-\mathfrak{X}$.*

Alors, $F(R)$ est un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$.

Démonstration. Conservons les notations de **6.** Soit $g(R)=\mathrm{Int}(S_{0,1})$ une transformation conforme de la région R en l'intérieur du cercle $S_{0,1}$. En vertu de (7.1), tous les points de $F(R)$ sont accessibles de R[19]) par des arcs simples; chaque „Primende“ de R sur $F(R)$ se compose donc exactement d'un point[20]). Par conséquent, étant donnée dans R une suite de points $p_1, p_2, \ldots$, convergente vers un „Primende“ représenté par un point $p\in F(R)$, les points $p_1, p_2, \ldots$ étant situés sur un arc simple L à extrémités p_1, p et tel que $L-(p)\subset R$, la suite $g(p_1), g(p_2), \ldots$ converge vers un point de S_1 et l'image $g(L)$ de L est dans ce cas un arc simple[21]). D'autre part, un point de $F(R)$ pouvant représenter plus d'un „Primende“ de R et la correspondance entre les „Primenden“ de R et les points de S_1 étant biunivoque et bicontinue[21]), l'image d'un point de $F(R)$ se compose en tout cas d'un ensemble fermé de points de S_1.

La transformation inverse $h=g^{-1}$, qui est une homéomorphie dans $\mathrm{Int}(S_{0,1})$, est ainsi continue sur S_1. Comme de plus $z=\lim\limits_{k=\infty} z_k$ entraîne $h(z)=\lim\limits_{k=\infty} h(z_k)$ pour $z\in S_1$ et $z_k\in\mathrm{Int}(S_{0,1})$, la fonction h transforme $S_{0,1}=\mathrm{Int}(S_{0,1})+S_1$ en $\overline{R}=R+F(R)$ d'une façon continue. En résumé:

(7.4) *Etant donné un arc simple $L\subset\overline{R}$ à extrémité $p\in F(R)$ et tel que $L-(p)\subset R$, l'ensemble $h^{-1}(L)$ est un arc simple,*

(7.5) *$h[\mathrm{Int}(S_{0,1})]=R$ est une homéomorphie,*

(7.6) *$h(S_{0,1})=\overline{R}$ est une fonction continue.*

Enfin, $\{L_k\}$ étant un suite d'arcs simples satisfaisant aux hypothèses de (7.4),

(7.7) $$\lim_{k=\infty} L_k=p\in F(R) \quad \textit{entraîne} \quad \lim_{k=\infty}\delta[h^{-1}(L_k)]=0,$$

car en cas contraire on pourrait extraire de la suite $\{h^{-1}(L_k)\}$ une suite partielle convergente vers un arc $P\subset S_1$ de longueur positive; en approchant donc P par une ligne sinusoïdale P_s située dans $\mathrm{Int}(S_{0,1})$, le continu P_s+P, qui n'est pas un arc simple, aurait pour l'image $h(P_s+P)$ un arc simple, contrairement à (7.4).

Ceci établi, posons $\mathfrak{X}^*=h^{-1}(\mathfrak{X})$. On a donc selon (7.2), (7.5) et (7.6)

(7.8) $$S_1\subset\mathfrak{X}^*\subset S_{0,1};$$

en outre

(7.9) $$b_0(\mathfrak{E}^2-\mathfrak{X}^*)=2,$$

car $R-\mathfrak{X}$ étant connexe en vertu de (7.2) et (7.3), il en est de même de $S_{0,1}-\mathfrak{X}^*=h^{-1}(R-\mathfrak{X})$ en vertu de (7.5), et comme

[19]) K. Borsuk, Fundam. Math. 19 (1932) p. 233, 19.

[20]) C. Carathéodory, Math. Ann. 73 (1913) p. 353, S. XVIII.

[21]) ibid. p. 350, S. XIII, S. XV et Bemerkung.

ce dernier ensemble est disjoint de $\mathfrak{E}^2 - S_{0,1}$ en vertu de (7.8), le complémentaire de $\mathfrak{X}^*$ se décompose en deux composantes:

$$\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{X}^* = (\mathfrak{E}^2 - S_{0,1}) + (S_{0,1} - \mathfrak{X}^*).$$

$\mathfrak{X}$ étant connexe par arcs[11]), tout point $x \in \mathfrak{X} R$ peut être uni à $F(R) \subset \mathfrak{X}$ par un arc simple L tel que $h^{-1}(L)$ soit un arc simple (cf. (7.4)) unissant le point $h^{-1}(x) \in \mathfrak{X}^*$ à $S_1 \subset \mathfrak{X}^*$. Il en résulte que

(7.10) $\mathfrak{X}^*$ *est connexe.*

Soient $z \in S_1$ et $z_1, z_2, \dots$ une suite de points de $\mathfrak{X}^* - S_1$ convergente vers z. Comme $\mathfrak{X}$ est localement connexe par arcs, il existe dans $\mathfrak{X}$ une suite d'arcs $L_1, L_2, \dots$, l'arc L_k ayant pour extrémités les points $h(z_k)$ et $h(z) = \lim_{k=\infty} L_k$ et remplissant la condition $L_k - h(z_k) \subset \mathfrak{X} - F(R)$. En vertu de (7.2) et (7.4), $h^{-1}(L_k)$ est donc un arc simple à extrémités z_k et z, de diamètre tendant vers 0 en vertu de (7.7). Ainsi tout $z \in S_1$ est un point de connexité locale par arcs de $\mathfrak{X}^*$. Comme en vertu de (7.5) il en est de même des points de $\mathfrak{X}^* - S_1$, il est démontré que

(7.11) $\mathfrak{X}^*$ *est localement connexe par arcs.*

(7.8) — (7.11) réalisent les hypothèses de **6** pour $\mathfrak{X}^*$. En vertu de (6.10), il existe donc une fonction $r(z, t)$ continue pour tout $z \in \mathfrak{X}^*$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, telle que $r(z, t) \in \mathfrak{X}^*$ et que

(7.12) $r(z, 0) = z$ *pour* $z \in \mathfrak{X}^*$,

(7.13) $r(z, t) = z$ *pour* $z \in S_1$,

(7.14) $r(z, 1) \in S_1$ *pour* $z \in \mathfrak{X}^*$.

Reste à définir une rétraction déformant $\mathfrak{X}$ en $F(R)$. Posons à ce but

(7.15) $\varphi(x, t) = hr[h^{-1}(x), t]$ *pour* $x \in \mathfrak{X}$ *et* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Ainsi définie, la fonction φ est continue. En effet,

$$\lim_{k=\infty} (x_k, t_k) = (x, t)$$

entraîne pour $x \in \mathfrak{X} - F(R) \subset R$

(7.16) $\lim_{k=\infty} \varphi(x_k, t_k) = \varphi(x, t)$

en vertu de (7.5), (7.6) et de la continuité de r; pour $x \in F(R)$ la même égalité entraîne $\lim_{k=\infty} x_k = x$, d'où $\limsup_{k=\infty} h^{-1}(x_k) \subset h^{-1}(x)$, ce qui donne par suite de la continuité de r et de (7.13)

$$\limsup_{k=\infty} r[h^{-1}(x_k), t_k] \subset r[h^{-1}(x), t] = h^{-1}(x),$$

car $h^{-1}(x) \in S_1$. Il en résulte que

$$\limsup_{k=\infty} hr[h^{-1}(x_k), t_k] \subset hr[h^{-1}(x), t] = hh^{-1}(x) = x,$$

c'est à dire

$$\lim_{k=\infty} hr[h^{-1}(x_k), t_k] = x = hr[h^{-1}(x), t],$$

ce qui donne (7.16) en vertu de (7.15). On a enfin selon (7.12) — (7.15) pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$\varphi(x, 0) = hr[h^{-1}(x), 0] = hh^{-1}(x) = x$ *pour* $x \in \mathfrak{X}$,

$\varphi(x, t) = hr[h^{-1}(x), t] = hh^{-1}(x) = x$ *pour* $x \in F(R)$,

$\varphi(x, 1) = hr[h^{-1}(x), 1] \in hr[h^{-1}(F(R)), 1] = h(S_1) = F(R)$ *pour* $x \in \mathfrak{X}$.

8. Théorème 2. *$\mathfrak{X} \subset \mathfrak{S}_2$ étant un ensemble connexe et localement connexe par arcs, pour qu'un sous-continu localement connexe Σ de $\mathfrak{X}$ soit un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$, il faut et il suffit que la condition* (4.1) *soit remplie pour la suite (finie ou infinie) des composantes $Q_1, Q_2, \dots$ de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$ et la suite des régions-composantes (convenablement rangées) $R_1, R_2, \dots$ de $\mathfrak{S}_2 - \Sigma$.*

Démonstration. La condition est nécessaire en vertu de (1.4)[4]). Elle est trivialement suffisante pour $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_2$. Admettons donc que $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{S}_2$ et substituons, dans le lemme 4, $\mathfrak{S}_2$ à $\mathfrak{E}^2$, $\mathfrak{X}\overline{R}_i$ à $\mathfrak{X}$ et R_i à R. Par suite de la connexité locale de Σ, $F(R_i)$ est localement connexe[22]). D'autre part, $F(R_i) \subset \mathfrak{X}\overline{R}_i \subset R_i + F(R_i)$. Enfin, (4.1) ayant lieu par hypothèse, R_i contient exactement une composante de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}$, donc de $\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{X}\overline{R}_i$.

Les hypothèses (7.1) — (7.3) étant ainsi réaliseés, il existe en vertu du lemme 4 une fonction $\varphi_i(x, t)$ continue pour $x \in \mathfrak{X}\overline{R}_i$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, telle que $\varphi_i(x, t) \in \mathfrak{X}\overline{R}_i$ et

[22]) C. Kuratowski, Fundam. Math. 15 (1930) p. 180.

$$(8.1)\qquad \varphi_i(x, 0) = x \quad \textit{pour} \quad x \in \mathfrak{X}\bar{R}_i,$$

$$(8.2)\qquad \varphi_i(x, t) = x \quad \textit{pour} \quad x \in F(R_i),$$

$$(8.3)\qquad \varphi_i(x, 1) \in F(R_i) \quad \textit{pour} \quad x \in \mathfrak{X}\bar{R}_i.$$

Posons

$$(8.4)\qquad \varphi(x, t) = \begin{cases} \varphi_i(x, t) & \textit{pour} \quad x \in \mathfrak{X}R_i, \\ x & \textit{pour} \quad x \in \Sigma. \end{cases}$$

En tenant compte de $F(R_i) \subset \Sigma$, on a en vertu de (8.1), (8.3) et (8.4):

$$(8.5)\qquad \varphi(x, 0) = x \quad \textit{pour} \quad x \in \mathfrak{X},$$

$$(8.6)\qquad \varphi(x, t) = x \quad \textit{pour} \quad x \in \Sigma,$$

$$(8.7)\qquad \varphi(x, 1) \in \Sigma \quad \textit{pour} \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Reste à montrer que la fonction $\varphi(x, t)$ est continue pour tout $x \in \mathfrak{X}$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$. Soit

$$(x, t) = \lim_{k=\infty} (x_k, t_k), \quad \text{d'où} \quad x = \lim_{k=\infty} x_k.$$

Deux cas sont à considérer:

1° $x_k \in R_1$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Alors $x \in \bar{R}_1 = R_1 + F(R_1)$. La fonction φ coïncidant selon (8.2) et (8.4) avec la fonction continue φ_1 sur R_1 et sur $F(R_1) \subset \Sigma$, on a dans ce cas

$$\lim_{k=\infty} \varphi(x_k, t_k) = \lim_{k=\infty} \varphi_1(x_k, t_k) = \varphi_1(x, t) = \varphi(x, t).$$

2° $x_k \in R_{i_k}$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Alors $x \in \mathfrak{S}_2 - \sum_i R_i = \Sigma$, d'où selon (8.4)

$$(8.8)\qquad \varphi(x, t) = x.$$

En même temps, on a selon (8.4)

$$(8.9)\qquad \varphi(x_k, t_k) = \varphi_{i_k}(x_k, t_k) \in \mathfrak{X}\bar{R}_{i_k}.$$

Enfin, en vertu de la connexité locale de Σ, on a

$$\lim_{k=\infty} \delta(R_{i_k}) = 0\,^{23}), \quad \text{d'où} \quad \lim_{k=\infty} \bar{R}_{i_k} = \lim_{k=\infty} R_{i_k} = \lim_{k=\infty} x_k = x,$$

[23]) A. Schoenfliess, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Zweiter Teil, Leipzig (1908) p. 237.

ce qui donne d'après (8.8) et (8.9)

$$\lim_{k=\infty} \varphi(x_k, t_k) = \lim_{k=\infty} \varphi_{i_k}(x_k, t_k) \in \lim_{k=\infty} R_{i_k} = x = \varphi(x, t).$$

La continuité de φ est ainsi établie, c. q. f. d.

Théorème 3. *$\mathfrak{X}$ étant un vrai sous-ensemble connexe et localement connexe par arcs de $\mathfrak{S}_2$, chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{X}$ divise $\mathfrak{S}_2$ en un nombre fini de composantes:*

(I) *C étant un sous-continu localement connexe quelconque de $\mathfrak{X}$, il existe dans $\mathfrak{X}$ un rétracte compact de voisinage Σ contenant C et étant un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$;*

(II) *$\mathfrak{X}$ contient un rétracte compact de voisinage Σ qui est un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$;*

(III) *$\mathfrak{X}$ contient un graphe $\mathfrak{G}$ qui est un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. La condition (I) est nécessaire en vertu du lemme 3 et du théorème 2.

(I) entraîne (II) comme cas particulier.

(II) entraîne (III). En effet, comme rétracte par déformation de l'ensemble connexe $\mathfrak{X}$, Σ est connexe; comme ensemble compact, Σ est donc un continu; enfin Σ est par hypothèse un rétracte de voisinage. En substituant donc Σ à $\mathfrak{X}$ dans **1**, l'équivalence des propriétés (1.1) et (1.3) pour les continus entraîne l'existence dans Σ d'un graphe $\mathfrak{G}$ qui est un rétracte par déformation de Σ, donc de $\mathfrak{X}$.

La condition (III) est suffisante. En effet, comme un graphe, $\mathfrak{G}$ divise $\mathfrak{S}_2$ en un nombre fini de régions; en vertu d'un théorème connu [4]), il en est donc de même de $\mathfrak{X}$, dont $\mathfrak{G}$ est selon (III) un rétracte par déformation.

Remarque. Le graphe $\mathfrak{G}$ figurant dans la condition (III) du théorème 3 peut être soumis à des conditions supplémentaires plus speciales. On peut exiger p. ex. qu'il soit aussi proche (au sens de *distance de Hausdorff* [24])) que l'on veut de l'ensemble $\mathfrak{X}$. Soit à ce but F un sous-ensemble fini de $\mathfrak{X}$, tel que dist $(F, \mathfrak{X}) \leqslant \varepsilon$, le nombre $\varepsilon > 0$ étant donné d'avance. Soit $F - \mathfrak{G} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

[24]) Voir, par ex. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin (1927), § 28.

En posant $G_0 = \mathfrak{G}$, définissons G_i pour $i = 1, 2, \ldots, n$ comme le graphe formé de G_{i-1} et d'un arc simple $L_i \subset \mathfrak{X}$ unissant p_i à G_{i-1} de façon que seule l'autre extrémité de L_i soit située sur G_{i-1}. L'ensemble $\mathfrak{X}$ étant connexe par arcs, il est facile de voir qu'un tel L_i existe toujours. Le graphe $\mathfrak{G} + \sum_{i=1}^{n} L_i$ ainsi obtenu a $\mathfrak{G}$ pour son rétracte par déformation et, comme son complémentaire contient celui de $\mathfrak{X}$, une simple application de (4.1) et du théorème (1.4) permet de montrer qu'il satisfait encore à la condition (4.1). En vertu du théorème 2, il est donc un rétracte par déformation de $\mathfrak{X}$ et, comme il contient F, la distance entre lui et $\mathfrak{X}$ ne dépasse pas ε.

(Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1940).

Про деформаційні ретракти перетинів сфери

М. Войдиславський (Львів)

(Резюме)

Відомо, що локально зв'язне континуум $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{S}_2$, що ділить сферу $\mathfrak{S}_2$ на скінченну кількість областей, містить у собі граф $\mathfrak{G}$, який є деформаційним ретрактом континуума $\mathfrak{X}$. Являється проблема: визначити таку сім'ю F зв'язних та локально дугово зв'язних множин $\mathfrak{X}$, для яких є також справедлива вище наведена теорема. Доводжу в цій ноті, що сім'я F складається точно з всіх множин $\mathfrak{X}$, яких доповнення $\mathfrak{S}^2 - \mathfrak{X}$ має тільки скінченну кількість компонент. Опираючись на одну лемму з моєї попередньої роботи, подаю наперед характеристику плоских зв'язних ретрактів оточення. Опісля доводжу, що коли такий ретракт $\mathfrak{X}$ ділить сферу на скінченну кількість областей, то $\mathfrak{X}$ містить у собі граф $\mathfrak{G}$, що є його деформаційним ретрактом. В кінці доводжу, що, з другого боку, коли зв'язна та локально дугово зв'язна множина $\mathfrak{X}$ містить у собі такий граф $\mathfrak{G}$, її доповнення складається з скінченної кількості компонент.