

Pour toute fonction  $x(t) \in (C)$  et pour tout  $n = 1, 2, \dots$ , il existe en vertu de (II) un et un seul système de nombres  $\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$  satisfaisant aux relations

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} x_i(t^{(n)}) = x(t) \quad \text{où } j = 1, 2, \dots, n.$$

Posons

$$U_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} x_i(t).$$

Les fonctions  $U_n(x, t)$  porteront le nom d'*interpolations de la fonction  $x(t)$  relatives à la suite de fonctions  $\{x_i(t)\}$* . Telles sont p. ex. les interpolations polynômiales (relatives à la suite  $\{t^n\}$ ), trigonométriques (relatives à la suite  $\{\sin nt, \cos nt\}$ ), etc.

J'établis dans cet ouvrage les théorèmes suivants:

**Théorème 1.** *Etant donnée dans l'espace (C) une suite quelconque  $\{x_i(t)\}$  de fonctions assujetties aux conditions (I) et (II), il existe une fonction  $x(t) \in (C)$  et une suite d'ensembles  $\{T_n\}$  telles que*

- (1)  $T_n \subset T_{n+1}$  pour  $n = 1, 2, \dots$ ;
- (2) l'ensemble  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$  est dense dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ ;
- (3)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_n(x, t)| = +\infty$  presque partout dans cet intervalle.

**Théorème 2.** *Etant données une suite quelconque  $\{x_i(t)\}$  de fonctions de (C) assujetties aux conditions (I) et (II) et une suite  $\{T_n\}$  d'ensembles dont la somme  $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$  n'est pas dense dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ , il existe une fonction  $x(t) \in (C)$  telle que*

- (4)  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_n(x, t)| = +\infty$  presque partout en dehors du dérivé<sup>1)</sup>  $\Sigma'$  de  $\Sigma$ .

Pour chaque  $n = 1, 2, \dots$ , introduisons dans la famille  $\Phi_n$  une distance entre deux systèmes de points:

- (A)  $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1$ ,
- (B)  $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n \leq 1$

<sup>1)</sup> c. à. d. de l'ensemble des points d'accumulation.

## Sur la divergence des interpolations

par

S. BANACH (Léopol).

1. Soit (C) l'espace des fonctions  $x(t)$ , continues dans l'intervalle fermé  $0 \leq t \leq 1$ . L'espace (C) est vectoriel, normé et complet avec la norme

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

Considérons dans l'espace (C) une suite de fonctions  $\{x_i(t)\}$  assujettie aux conditions:

(I) La suite  $\{x_i(t)\}$  est *complète dans (C)*, c. à. d. que pour toute fonction  $x(t) \in (C)$  et pour tout nombre  $\varepsilon > 0$ , il existe un système fini de nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que

$$\|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\| < \varepsilon;$$

(II) Pour tout système de nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  et de points

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1,$$

les relations

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t_j) = 0 \quad \text{où } j = 1, 2, \dots, n$$

entraînent

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

En désignant par  $\Phi_n$  la famille de tous les systèmes (T) de  $n$  points de l'intervalle fermé  $0 \leq t \leq 1$ , considérons une suite arbitraire  $T_1, T_2, \dots$  où  $T_n \in \Phi_n$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , à savoir où le système  $T_n$  est composé de points

$$(T_n) \quad 0 \leq t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq 1.$$

par la formule:

$$(A, B) = |a_1 - b_1| + \sum_{i=1}^{n-1} |(a_{i+1} - a_i)^{-1} - (b_{i+1} - b_i)^{-1}|.$$

La famille  $\mathcal{W}_n$  devient alors un espace métrique complet.

De même, introduisons dans la famille  $\mathcal{W}$  de toutes les suites  $\{T_n\}$  telles que  $T_n \in \mathcal{W}_n$  pour  $n=1, 2, \dots$ , une distance entre deux suites  $\{A_n\}$  et  $\{B_n\}$  par la formule:

$$(\{A_n\}, \{B_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(A_n, B_n)}{1 + (A_n, B_n)}.$$

Alors la famille  $\mathcal{W}$  devient aussi un espace métrique complet.

Je montre qu'on a les théorèmes suivants:

**Théorème 3.** Pour toute suite  $\{T_n\} \in \mathcal{W}$ , sauf une famille de suites qui est de I-e catégorie dans  $\mathcal{W}$ , l'ensemble  $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$  est dense dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ .

**Théorème 4.** Soit dans  $(C)$  une suite quelconque  $\{x_i(t)\}$  de fonctions assujetties aux conditions (I) et (II). Alors pour toute suite de systèmes  $\{T_n\} \in \mathcal{W}$ , sauf une famille de suites qui est de I-e catégorie dans  $\mathcal{W}$ , les interpolations  $U_n(x, t)$  relatives à cette suite satisfont à la condition

$$(5) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_n(x, t)| = +\infty$$

presque partout dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$  pour toute fonction  $x(t) \in (C)$ , sauf une famille de fonctions qui est de I-e catégorie dans  $(C)$ .

Soit enfin  $\mathcal{W}_0$  le sous-espace de  $\mathcal{W}$  composé de toutes les suites  $\{T_n\}$  assujetties à la condition (1). En gardant la distance introduite dans  $\mathcal{W}$ , l'espace  $\mathcal{W}_0$  est évidemment aussi métrique et complet.

Je montre le

**Théorème 5.** Les théorèmes 3 et 4 subsistent en remplaçant  $\mathcal{W}$  par  $\mathcal{W}_0$ .

Il en résulte aussitôt le théorème 1.

**2.** Considérons un espace quelconque  $E$  vectoriel, normé et complet, et l'espace  $S_\omega$  de toutes les fonctions  $u(t)$  mesu-

rables  $(L)$  dans l'ensemble  $\omega \subset (0,1)$  avec la norme

$$(5)_1 \quad \|u\| = \int_{\omega} \frac{|u(t)|}{1 + |u(t)|} dt.$$

**Lemme 1.** Soient  $H$  un ensemble dense dans  $E$  et

$$y_n(t) = U_n(x, t) \quad \text{où } n=1, 2, \dots, \quad x \in E, \quad t \in \omega \quad \text{et } y_n(t) \in S_\omega$$

une suite d'opérations linéaires. Si pour tout  $x \in H$  la suite de fonctions  $\{y_n(t)\}$  converge presque partout dans  $\omega$ , il existe un ensemble  $\tau \subset \omega$  ayant les propriétés suivantes:

1°  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, t)$  existe presque partout dans  $\tau$  pour tout  $x \in E$ ;

2°  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_n(x, t)| = +\infty$  presque partout dans  $\omega - \tau$  pour tout  $x \in E$ , sauf un ensemble des  $x$  de I-e catégorie dans  $E$ ;

3° l'opération  $y(t) = U(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, t)$ , où  $x \in E$ ,  $t \in \tau$  et  $y(t) \in S_\tau$ , est linéaire;

4° pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un  $M > 0$  tel que

$\text{mes}_{t \in \tau} E [|U_n(x, t)| < M \|x\| \text{ pour } n=1, 2, \dots] \geq (1 - \varepsilon) \text{ mes } \tau$  pour tout  $x \in E$ .

**Démonstration.** Les propriétés 1° et 2° ont été établies par M. S. Saks<sup>2)</sup>. La propriété 3° résulte immédiatement du théorème d'après lequel la limite d'opérations linéaires en est également une<sup>3)</sup>. Pour démontrer 4°, posons

$$V_n(x, t) = \max |U_i(x, t)| \quad \text{pour } i=1, 2, \dots, n, \quad x \in E \quad \text{et } t \in \tau.$$

L'opération

$$z_n(t) = V_n(x, t) \quad \text{où } n=1, 2, \dots, \quad x \in E, \quad t \in \tau \quad \text{et } z_n(t) \in S_\tau$$

est quasi-linéaire, c. à d. continue et satisfaisant aux conditions:

$$\|V_n(x_1 + x_2, t)\| \leq \|V_n(x_1, t)\| + \|V_n(x_2, t)\|,$$

$$\|V_n(\lambda x, t)\| = \|\lambda V_n(x, t)\|.$$

<sup>1)</sup> S. Saks, Fundam. Math. 10 (1924), p. 192.

<sup>2)</sup> S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Monografie Matematyczne 1, Warszawa 1932, p. 23-24.

Par conséquent<sup>4)</sup> l'opération

$$z(t) = V(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t) \quad \text{où } x \in E, t \in \tau \text{ et } z(t) \in S_x$$

est aussi quasi-linéaire; il existe donc pour tout  $\varepsilon > 0$  un  $\delta > 0$  tel que  $\|x\| < \delta$  entraîne  $\|z\| < \varepsilon$ <sup>5)</sup>. Il en résulte facilement 4° en vertu de (5)<sub>1</sub>.

Lemme 2. La famille de toutes les suites de systèmes  $\{T_n\}$  pour lesquelles le dérivé  $\Sigma'$  de l'ensemble  $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$  est de mesure nulle est dense dans  $\Psi$ .

Démonstration. Soient  $\{A_n\}$  une suite appartenant à  $\Psi$  et  $\varepsilon > 0$  un nombre réel donné d'avance. Fixons un entier positif  $m$  de façon à avoir  $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$  et posons  $T_n = A_n$  pour  $n=1, 2, \dots, m$ . On peut évidemment choisir les systèmes de points  $T_{m+1}, T_{m+2}, \dots$  de manière que la suite  $\{T_n\}$  appartienne à  $\Psi$  et que l'on ait mes  $\Sigma' = 0$ . On aura alors

$$(\{A_n\}, \{T_n\}) \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon, \quad \text{c. q. f. d.}$$

3. Démonstration du théorème 2. Posons

$$y_{n,i}(t) = U_n(x_i, t) \quad \text{pour } n=1, 2, \dots \text{ et } i=1, 2, \dots$$

Nous aurons évidemment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,i}(t) = x_i(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } i=1, 2, \dots$$

Désignons par  $H$  l'ensemble de tous les polynômes

$$(6) \quad z(t) = \sum_{i=1}^j \alpha_i x_i(t) \quad \text{pour } j=1, 2, \dots$$

En posant

$$Z_n(t) = U_n(z, t),$$

<sup>4)</sup> S. Mazur et W. Orlicz, *Studia Math.* 4 (1933), p. 157, th. 6.1.

<sup>5)</sup> Ibid. p. 157, th. 3.1. Cf. aussi S. Saks, *Transactions Amer. Math. Soc.* 41 (1937), p. 160-170.

nous avons donc

$$(6)_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(t) = z(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } z \in H.$$

Or, l'ensemble  $H$  étant dense dans l'espace  $(C)$ , il existe en vertu du lemme 1 (pour  $E=(C)$  et  $\omega=(0,1)$ ) un ensemble  $\tau \subset (0,1)$  ayant les propriétés 1°-4°. Nous allons montrer que

$$(7) \quad \text{mes}(\tau - \Sigma') = 0$$

où  $\Sigma'$  désigne l'ensemble dérivé de  $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$ .

Soit à ce but

$$(8) \quad \zeta \subset (0,1) - (\Sigma + \Sigma')$$

un ensemble fermé. Considérons une fonction arbitraire  $v(t)$ , continue dans  $(0,1)$  et telle que

$$(9) \quad v(t) \begin{cases} \neq 0 & \text{pour } t \in \zeta \\ = 0 & \text{pour } t \in \Sigma + \Sigma' \end{cases}$$

Comme ensemble dense dans  $(C)$ ,  $H$  contient une suite  $\{z_i(t)\}$  de polynômes, telle que

$$(10) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|z_i - v\| = 0.$$

En posant

$$Z_{n,i}(t) = U_n(z_i, t), \quad v_n(t) = U_n(v, t),$$

nous avons en vertu de (6)<sub>1</sub>

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n,i}(t) = z_i(t) \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1 \text{ et } i=1, 2, \dots$$

En vertu de (9), on a d'autre part  $v_n(t) = 0$ , d'où

$$(12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = 0.$$

On conclut de (10) et (11) en vertu de la propriété 3° de  $\tau$  que

$$v(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} z_i(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \quad \text{presque partout dans } \tau.$$

Comme, selon (9),  $v(t) \neq 0$  pour  $t \in \zeta$ , on a selon (12) mes  $\tau \zeta = 0$ . Il en résulte aussitôt (7), puisque  $\zeta$  est par définition un ensemble fermé arbitraire satisfaisant à (8). Or, les propriétés 2° et (7) de  $\tau$  entraînent la relation (4), c. q. f. d.

Démonstration du théorème 3. Etant donné un  $\varepsilon > 0$ , désignons par  $\Gamma(\varepsilon)$  la famille de toutes les suites  $\{T_n\}$  de  $\mathcal{W}$  à chacune desquelles on peut faire correspondre un entier positif  $n$  tel que

$$(13) \quad t_1^{(n)} < \varepsilon, \quad t_2^{(n)} - t_1^{(n)} < \varepsilon, \quad \dots, \quad t_{n-1}^{(n)} - t_{n-2}^{(n)} < \varepsilon, \quad 1 - t_n^{(n)} < \varepsilon.$$

Ainsi définie, la famille  $\Gamma(\varepsilon)$  constitue évidemment un ensemble ouvert dans  $\mathcal{W}$ . Par conséquent

$$\Gamma = \prod_{k=1}^{\infty} G(1/k)$$

est un  $G_\delta$  dans  $\mathcal{W}$ .

D'autre part, il est facile de voir que  $\Gamma$  est la famille de toutes les suites  $\{T_n\}$  pour lesquelles les ensembles  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$  sont denses dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ .

Enfin, soient  $\{A_n\}$  une suite appartenant à  $\mathcal{W}$  et  $\eta > 0$  un nombre réel donné d'avance. Fixons un entier positif  $m$  de façon à avoir  $\frac{1}{2^m} < \eta$ . La famille  $\Gamma$  contient évidemment une suite  $\{T_n\}$  telle que  $T_n = A_n$  pour  $n=1, 2, \dots, m$ . Par conséquent

$$(\{A_n\}, \{T_n\}) < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} < \eta,$$

ce qui montre que  $\Gamma$  est dense dans  $\mathcal{W}$ . Or, le complémentaire d'un  $G_\delta$  dense étant de I-e catégorie, le théorème se trouve démontré.

Démonstration du théorème 4. Etant donnés deux nombres  $\varepsilon > 0$  et  $M > 0$ , désignons par  $\Gamma(\varepsilon, M)$  la famille de toutes les suites  $\{T_n\}$  de  $\mathcal{W}$  à chacune desquelles on peut faire correspondre une fonction  $x(t) \in (C)$  de norme  $\|x\| = 1$  et telle que les interpolations correspondantes  $U_n(x, t)$  satisfassent à la condition

$$(14) \quad \text{mes } E_{0 \leq t \leq 1} [|U_n(x, t)| < M \text{ pour } n=1, 2, \dots] < \varepsilon.$$

Ainsi définie, la famille  $\Gamma(\varepsilon, M)$  constitue évidemment un ensemble ouvert dans  $\mathcal{W}$  et par conséquent

$$\Gamma = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{M=1}^{\infty} \Gamma(1/k, M)$$

est un  $G_\delta$  dans  $\mathcal{W}$ .

D'autre part,  $\Gamma$  contient en vertu du théorème 2 toute suite  $\{T_n\}$  pour laquelle on a mes  $\Sigma' = 0$ , de sorte qu'en vertu du lemme 2 la famille  $\Gamma$  constitue un ensemble dense dans  $\mathcal{W}$ ; par conséquent, son complémentaire (comme celui d'un  $G_\delta$  dense) est de I-e catégorie dans  $\mathcal{W}$ . Enfin, soit  $\{T_n\}$  une suite appartenant à  $\Gamma$ . D'après le lemme 1, en prenant pour  $E$  l'espace  $(C)$ , pour  $H$  l'ensemble des polynômes (6) et pour  $\omega$  l'intervalle  $0 \leq t \leq 1$ , cet intervalle contient un ensemble  $\tau$  jouissant des propriétés 1°-4°. Comme il existe pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $M > 0$  une fonction  $x(t) \in (C)$  de norme  $\|x\| = 1$  satisfaisant à (14), on a d'après la propriété 4° mes  $\tau = 0$ . Il en résulte en vertu de la propriété 2° de  $\tau$  que (5) se présente pour toute fonction  $x(t) \in (C)$ , sauf une famille de fonctions qui est de I-e catégorie dans  $(C)$ , c. q. f. d.

Démonstration du théorème 5. Le lemme 2 et les théorèmes 3 et 4 se démontrent pour  $\mathcal{W}_0$  exactement de la même manière que pour  $\mathcal{W}$ .

Démonstration du théorème 1. Ce théorème résulte du théorème 5 en vertu du théorème général d'après lequel la partie commune de deux  $G_\delta$  denses est un  $G_\delta$  dense, donc a fortiori non vide.

(Reçu par la Rédaction le 3. 4. 1940).

### Про розбіжність інтерполяцій

С. Банаш (Львів).

(Реузюме)

Нехай  $(C)$  простір неперервних в замкненому проміжку  $0 \leq t \leq 1$  функцій. Простір  $(C)$  є векторіальний, нормований і повний за нормою

$$\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

Розгляньмо в просторі  $(C)$  послідовність  $\{x_n(t)\}$  функцій, що задовольняють умови:

(I) Послідовність  $\{x_i(t)\}$  є повна в  $(C)$ , тобто що для кожної функції  $x(t) \in (C)$  і для кожного числа  $\varepsilon > 0$  існує скінченна система таких чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , що

$$\|x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\| < \varepsilon;$$

(II) Для кожної системи чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  і точок

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$$

зі співвідношень

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t_j) = 0, \text{ де } j = 1, 2, \dots, n$$

випливає

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Позначуючи через  $\Phi_n$  сім'ю всіх систем  $(T)$   $n$  точок замкненого проміжка  $0 \leq t \leq 1$ , розглянемо довільну послідовність  $T_1, T_2, \dots$ , де  $T_n \in \Phi_n$  для  $n = 1, 2, \dots$ , а система  $T_n$  утворюється з точок

$$(T_n) \quad 0 \leq t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq 1.$$

Для кожної функції  $x(t) \in (C)$  і для кожного  $n = 1, 2, \dots$  існує, з уваги на (II), одна і тільки одна система чисел  $\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)}$ , що задовольняє співвідношення:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} x_i(t_j^{(n)}) = x(t_j), \text{ де } j = 1, 2, \dots, n.$$

Покладімо

$$U_n(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} x_i(t).$$

Функції  $U_n(x, t)$  звуться інтерполяцією функції  $x(t)$  відносно послідовності функцій  $\{x_i(t)\}$ . Такими є нир. поліномні інтерполяції (відносно  $\{t^n\}$ ), тригонометричні (відносно послідовності  $\{\sin nt, \cos nt\}$ ) і т. д.

Доводжу в цій роботі такі теореми:

Теорема 1. Якщо дана в просторі  $(C)$  довільна послідовність  $\{x_i(t)\}$  функцій, що задовольняють умови (I) і (II), то існує така функція  $x(t) \in (C)$  і послідовність таких множин  $T_1, T_2, \dots$ , що

$$(1) \quad T_n \subset T_{n+1} \text{ для } n = 1, 2, \dots;$$

$$(2) \quad \text{Множина } \sum_{n=1}^{\infty} T_n \text{ є в проміжку } 0 \leq t \leq 1 \text{ густа};$$

$$(3) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_n(x, t)| = +\infty \text{ майже всюди в цьому проміжку.}$$

Теорема 2. Якщо дані довільна послідовність  $\{x_i(t)\}$  функцій з  $(C)$ , що задовольняють умови (I) і (II) і послідовність  $\{T_n\}$ , для якої сума  $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} T_n$  не є в проміжку  $0 \leq t \leq 1$  густа, то існує така функція  $x(t) \in (C)$ , що

$$(4) \quad \overline{\lim} |U_n(x, t)| = +\infty \text{ майже всюди з винятком точок похідної<sup>1)</sup> } \Sigma' \text{ множини } \Sigma.$$

Врешті подаю загальнення наведених теорем.

<sup>1)</sup> Тобто в множині точок згущення.