Про алгебри з скінченною базою

Д. Вайнштейн (Рівне).

(Резюме)

Відомо, що кожна алгебра з скінченною базою є ізоморфна з певною алгеброю матриць. В цій ноті доводиться, що алгебра матриць степена 2^n є ізоморфна з алгеброю чисел Clifforda з 4^n одиницями. Звідси випливає, що кожна алгебра з скінченною базою є ізоморфна з певною підалгеброю чисел Clifforda.

Sur les fonctions indépendantes (VI)

(Équipartition)

par

H. STEINHAUS (Léopol).

Dans la suite nous aurons à faire aux fonctions $f(t)$ relativement mesurables dans l'intervalle infini, comme il a été expliqué dans la Communication (IV) [1]. Au lieu de considérer l'intervalle entier, nous nous bornerons à la demi-droite $(0, \infty)$ — une simplification peu essentielle.

Nous aurons à utiliser les définitions, les lemmes et les théorèmes de (IV). Or, quelques énoncés devront être modifiés pour servir au but actuel, à savoir à la démonstration des théorèmes 3 et 4 sur l'équipartition (mod. 1) de valeurs d'une fonction $f(t)$ pour $0 < t < \infty$ et à la solution d'une question posée par M. Kampé de Fériet au sujet du mouvement turbulent de fluides [2].

Voici les modifications à effectuer dans (IV):

Le lemme 3 doît être remplacé par le suivant

Lemme 3′: Si la fonction $f(t)$ est bornée, mesurable R, si b et B désignent les deux bornes de $f(t)$ et si $g(x)$ est une fonction de Dirichlet [3]) dans $\langle b, B\rangle$, alors $g(f(t))$ est une fonction bornée et mesurable R.

Démonstration: $g(x) \leqslant a$ équivaut à $x \in \Sigma I_n$, les intervalles I_n étant situés dans $\langle b, B\rangle$ et n'empiétant pas les uns sur

---

[1]) M. Kac et H. Steinhaus, Stud. Math. 7 (1938) p. 1—15.

[2]) Ann. de la Soc. scientifique de Bruxelles 59 (1) (1939) p. 145. Le problème fût posé oralement; dans l'ouvrage cité on trouve les notions nécessaires.

[3]) Fonction continue n'ayant qu'un nombre fini des maxima et minima.

les autres. La relation $f(t) \in I_n$ définit un ensemble E_n des t; selon la remarque à la définition 2 de (IV), cet ensemble est mesurable R. La somme ΣI_n n'ayant qu'un nombre fini de termes, la somme correspondante ΣE_n est mesurable R, c. q. f. d.

Le lemme 4 doît être remplacé par

Lemme 4′: Si $\{f_k(t)\}$ est un système de fonctions indépendantes dans $(0, \infty)$, ces fonctions étant bornées et mesurables R, et si $g_k(x)$ sont de fonctions de Dirichlet définies dans $\langle b_k, B_k \rangle$, les nombres b_k, B_k étant les bornes de $f_k(t)$, alors $\{g(f_k(t))\}$ constitue un système de fonctions bornées, mesurables R, indépendantes dans $(0, \infty)$.

Démonstration: Nous avons à établir la relation

$$(1) \qquad |\underset{t}{E}\{g_1(f_1(t)) \in I_1 \dots g_n(f_n(t)) \in I_n\}|_R = \prod_{k=1}^{n} |\underset{t}{E}\{g_k(f_k(t)) \in I_k\}|_R.$$

Or, $g(f(t)) \in I$ équivaut à $f(t) \in J$ où J est un système fini d'intervalles de toute sorte, ouverts ou fermés, finis ou infinis, mais n'empiétant pas les uns sur les autres. On aura donc à remplacer dans (1) les $g_k(f_k(t))$ par les $f_k(t)$ et les I_k par des J_k. La relation étant valable pour les f_k et I_k à cause de l'indépendance des f_k, il s'ensuit immédiatement que l'on peut y remplacer les I_k par des J_k.

Le théorème 2 est à modifier comme il suit:

Théorème 2′: Si les fonctions $u(t)$, $v(t)$, bornées et mesurables R, sont indépendantes, on a

$$(2) \qquad M_B\{u^m(t)\, v^n(t)\} = M_B\{u^m(t)\} \cdot M_B\{v^n(t)\}$$

pour tous les nombres naturels m, n, l'existence de moyennes M_B faisant partie de la thèse. Réciproquement, si ces moyennes existent et satisfont à (2), les fonctions $u(t), v(t)$ ayant des distribuantes continues, ces fonctions sont indépendantes.

Démonstration: D'après le théorème 1 de (IV) les moyennes M_B existent et remplissent (2) si les fonctions $u^m(t)$, $v^n(t)$ de t sont bornées, mesurables R et indépendantes; or, ces propriétés découlent immédiatement de l'hypothèse et du lemme 4′, x^m étant une fonction monotone de x. Quant à la réciproque, la démonstration que l'on trouve dans (IV) n'exige aucune modification.

Les définitions de la mesure relative (mesure R), de la distribuante, de la moyenne relative M_R et de la moyenne M_B sont

contenues dans la Communication (IV); la seule modification est l'emploi de l'intervalle $(0, \infty)$ au lieu de $(-\infty, \infty)$; d'ailleurs, le raisonnement subsiste pour l'intervalle total.

Il est à remarquer que MM. Ph. Hartman, E. R. van Kampen et A. Wintner ont proposé dans un travail récent[4]) une modification de la définition de l'indépendance pour l'intervalle infini; cependant nous ne sommes pas parvenus à tourner toutes les difficultés et nous avons choisi la voie de la Communication (IV) en y apportant les retouches qui viennent d'être énumerées.

Définition 1. $f(t)$ sera dite *régulière* si la distribuante $\mu(\lambda)$ de $f(t)$ est égale à λ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Définition 2. Nous écrirons $[x]$ pour $x - Ex$, où Ex désigne le plus grand entier qui ne surpasse pas x.

Définition 3. Nous appelons *équipartition* de $f(t)$ (mod. 1) la propriété consistant en ce que la fonction $[f(t)]$ est régulière.

Si $f(t)$ est la longueur de l'arc entre un point initial et la position au moment t d'un point mobile sur la circonférence de longueur 1, l'équipartition traduit le fait que les séjours totaux du point mobile dans deux arcs quelconques sont dans un rapport qui tend vers celui de leurs longueurs.

Le théorème suivant correspond au critère connu de M. H. Weyl pour l'équipartition des suites:

Théorème 1. *La mesurabilité relative de* $[f(t)]$, *conjointement avec la relation*

$$(3) \qquad M_B\{e^{2\pi i k f(t)}\} = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots,$$

constitue une condition nécessaire et suffisante pour l'équipartition de $f(t)$ (mod. 1).

Démonstration. Admettons l'équipartition. D'après la définition 3, $[f(t)]$ est alors une fonction régulière, donc, d'après la définition 1, mesurable R, et sa distribuante est identique à celle de la fonction $[t]$. On pourra donc écrire pour un k naturel quelconque

[4]) Asymptotic distributions and statistical independence, Am. Journal of Math. 61 (1939) p. 477—486.

$$M_B\{e^{2\pi ikf(t)}\}=M_B\{e^{2\pi ik[f(t)]}\}=M_R\{e^{2\pi ik[f(t)]}\}$$
$$=M_R\{e^{2\pi ik[t]}\}=M_R\{e^{2\pi ikt}\}=M_B\{e^{2\pi ikt}\}=0.$$

La première et la quatrième égalité résultent de ce que k est un entier, la deuxième et la cinquième de la mesurabilité R de $[f]$, du lemme 3′ et du lemme 2 de (IV), la troisième de l'égalité des distribuantes, la dernière du calcul direct.

Réciproquement, admettons que $[f(t)]$ est mesurable R et que $f(t)$ satisfait à (3). Il s'ensuit que

$$M_B\{\cos 2\pi k[f(t)]\}=0,\quad M_B\{\sin 2\pi k[f(t)]\}=0 \quad \text{pour } k=1,2,\dots \tag{4}$$

Posons

$$W_n(u)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos 2\pi ku+b_k\sin 2\pi ku). \tag{5}$$

(4) et (5) impliquent

$$M_B\{W_n[f(t)]\}=a_0. \tag{6}$$

Soit $\mu(\lambda)$ la distribuante de $[f(t)]$, α et β deux points de continuité de $\mu(\lambda)$, $0<\alpha<\beta<1$, $\varphi(u)$ la fonction périodique qui est égale à 1 pour $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ et à 0 dans le reste de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, enfin $W_n(u)$ le polynôme d'ordre n de Fejér du developpement de $\varphi(u)$ en série de Fourier. Alors a_0 dans (5) aura la valeur $\beta-\alpha$ et (6) devient

$$M_B\{W_n[f(t)]\}=\beta-\alpha. \tag{7}$$

Il est connu que l'on a

(8) $\quad 0\leqslant W_n(u)\leqslant 1 \qquad$ pour tout u réel,

(9) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} W_n(u)=1 \qquad$ „ $\quad \alpha+\varepsilon\leqslant u\leqslant\beta-\varepsilon$,

(10) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} W_n(u)=0 \qquad$ „ $\quad 0\leqslant u\leqslant\alpha-\varepsilon,\ \beta+\varepsilon\leqslant u\leqslant 1$

et que, pour un $\varepsilon>0$ fixé, la convergence affirmée dans (9) et (10) est uniforme.

L'ensemble de tous les t positifs est égal à la somme $A+B+C$ de trois ensembles disjoints:

$$A=\underset{t}{E}\{\alpha+\varepsilon\leqslant[f(t)]\leqslant\beta-\varepsilon\},$$
$$B=\underset{t}{E}\{[f(t)]\leqslant\alpha-\varepsilon\}+\underset{t}{E}\{[f(t)]\geqslant\beta+\varepsilon\},$$
$$C=\underset{t}{E}\{\alpha-\varepsilon<[f(t)]<\alpha+\varepsilon\}+\underset{t}{E}\{\beta-\varepsilon<[f(t)]<\beta+\varepsilon\}.$$

$W_n(x)$ étant une fonction de Dirichlet, les lemmes 1, 2, 3′ et la mesurabilité relative de $[f(t)]$ permettent d'écrire

$$M_B\{W_n[f(t)]\}=M_R\{W_n[f(t)]\}; \tag{11}$$

de plus, en désignant par M_R^A la moyenne relative étendue à A, l'existence de la moyenne $M_R^A\{W_n[f(t)]\}$ est une conséquence de ce que $W_n(x)$ est une fonction de Dirichlet: en effet, il s'agit de démontrer la mesurabilité relative des produits

$$\underset{t}{E}\{l_k\leqslant W_n[f(t)]<l_{k+1}\}\times A \quad (\dots<l_{-1}<l_0<l_1<l_2<\dots); \tag{12}$$

or, un tel produit est identique à $\underset{t}{E}\{[f(t)]\in\Sigma AI\}$, la somme étant finie et les I étant des intervalles. Les AI sont donc aussi des intervalles en nombre fini et la mesurabilité R de $[f(t)]$ implique celle des produits (12). Nous pouvons donc écrire suivant (11)

$$M_B\{W_n[f(t)]\}=M_R^A+M_R^B+M_R^C, \tag{13}$$

en traitant B et C de la même manière que A.

(8), (9), 10) et (13) conduisent à

$$M_B\{W_n[f(t)]\}=|A|_R(1+\eta_n(\varepsilon))+B_R\zeta_n(\varepsilon)+|C|_R\vartheta_n(\varepsilon) \tag{14}$$

avec

$$\lim_{n\to\infty}\eta_n(\varepsilon)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\zeta_n(\varepsilon)=0,\quad 0\leqslant\vartheta_n(\varepsilon)\leqslant 1. \tag{15}$$

La distribuante $\mu(\lambda)$ de $[f(t)]$ étant continue pour $\lambda=\alpha$ et $\lambda=\beta$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|A|_R=|\underset{t}{E}\{\alpha\leqslant[f(t)]<\beta\}|_R=\mu(\beta)-\mu(\alpha),\ \lim_{\varepsilon\to 0}|C|_R=0. \tag{16}$$

En déterminant d'abord $\varepsilon>0$ suffisamment petit pour que $|A|_R$ et $|C|_R$ soient très proches de leurs limites respectives (16); et ensuite en déterminant n assez grand pour que η_n et ζ_n soient très petits suivant (15); enfin en remarquant que $|A|_R\leqslant 1$, $|B|_R\leqslant 1$ et $|C|_R\leqslant 1$, on tire de (14) la relation

$$\lim_{n\to\infty}M_B\{W_n[f(t)]\}=\mu(\beta)-\mu(\alpha),$$

qui donne par suite de (7) l'égalité

(17) $$\mu(\beta)-\mu(\alpha)=\beta-\alpha$$

pour tous les points α, β où $\mu(\lambda)$ est continue. Or, la fonction $\mu(\lambda)$ est monotone, $\mu(0)=0$ et $\mu(\lambda)=1$ pour $\lambda>1$, ce qui implique que (17) subsiste pour tous les α, β de $\langle 0,1\rangle$. Il s'ensuit que

$$\mu(\lambda)\equiv\lambda \text{ pour } 0\leqslant\lambda\leqslant 1, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

On remarquera l'analogie du théorème suivant avec le théorème 2′:

Théorème 2. *Si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$, mesurables R, telles que $0\leqslant f(t)\leqslant 1$ et $0\leqslant g(t)\leqslant 1$, sont indépendantes, on a*

(18) $$M_B\{e^{2\pi i(hf(t)+kg(t))}\}=M_B\{e^{2\pi ihf(t)}\}\,.\,M_B\{e^{2\pi ikg(t)}\}$$

pour tous les entiers h et k, l'existence de moyennes M_B faisant partie de la thèse. Réciproquement, si les fonctions $f(t), g(t)$, mesurables R, aux distribuantes continues, telles que $0\leqslant f(t)\leqslant 1$ et $0\leqslant g(t)\leqslant 1$, satisfont à (18) pour tous les entiers h et k, elles sont indépendantes.

Démonstration. L'égalité (18) sera établie quand on aura démontré l'égalité

(19) $$\begin{aligned} &M_B\{\cos 2\pi hf(t)\,.\,\cos 2\pi kg(t)\} \\ &=M_B\{\cos 2\pi hf(t)\}\,.\,M_B\{\cos 2\pi kg(t)\}\end{aligned}$$

et trois égalités analogues (pour cos... sin..., sin... cos... et sin... sin...). D'après le lemme 4′, les fonctions $\cos 2\pi hf(t)$, $\cos 2\pi kg(t)$ sont bornées, mesurables R et indépendantes. Le théorème 1 de (IV) devient donc applicable. Il assure l'existence des moyennes et implique la relation (19). Les trois relations analogues résultent du même raisonnement.

Réciproquement, admettons (18). Remplaçons y k par $-k$; il en résulte une formule que l'on ajoute à (18) ou bien soustrait de (18); on obtient ainsi deux relations, auxquelles il faut joindre deux autres, gagnées en changeant h en $-h$, pour avoir les quatre égalités (19). On en tire, pour deux polynômes trigonométriques $W_n(u), V_n(u)$ de type (5),

(20) $$M_B\{W_n(f(t))\,.\,V_n(g(t))\}=M_B\{W_n(f(t))\}\,.\,M_B\{V_n(g(t))\}.$$

On peut dès maintenant suivre la démonstration de la seconde partie du théorème 2 de (IV); le seul changement à y apporter est l'emploi des polynômes de Fejér au lieu des polynômes ordinaires pour approcher les fonctions caractéristiques des intervalles. La continuité des distribuantes intervient de la même manière que dans la démonstration citée; les formules (19) et (20) jouent ici le même rôle que les formules analogues pour puissances et polynômes dans la démonstration primitive.

Théorème 3. *Les fonctions $[f(t)]$ et $[g(t)]$ étant indépendantes et la fonction $[f(t)+g(t)]$ mesurable R, si $f(t)$ jouit de l'équipartition, il en est de même de $f(t)+g(t)$.*

Démonstration. On a en vertu de la première partie du théorème 2

(21) $$M_B\{e^{2\pi i(h[f]+k[g])}\}=M_B\{e^{2\pi ih[f]}\}\,.\,M_B\{e^{2\pi ik[g]}\}$$

pour tous les h et k entiers. D'après l'hypothèse sur $f(t)$ et le théorème 1, on a

(22) $$M_B\{e^{2\pi ihf(t)}\}=0, \qquad M_B\{e^{2\pi ih[f(t)]}\}=0$$

pour tout h naturel. En posant $k=h$, on tire de (21) et (22)

(23) $$M_B\{e^{2\pi ih(f+g)}\}=M_B\{e^{2\pi ih([f]+[g])}\}=0$$

pour tout h naturel. L'hypothèse sur $[f+g]$ fournit la thèse en vertu de (23) et du théorème 1.

Théorème 4. *Si les fonctions $hf(t)+kg(t)$ jouissent de l'équipartition* (mod 1) *quels que soient les entiers h, k (sauf pour $h=k=0$), les fonctions $[f(t)]$ et $[g(t)]$ sont indépendantes.*

Démonstration. On a d'après le théorème 1

$$M_B\{e^{2\pi i(hf+kg)}\}=0 \qquad \text{pour } h,k \text{ entiers, } h^2+k^2>0,$$

donc aussi

$$M_B\{e^{2\pi ihf(t)}\}=0 \qquad \text{pour } h \text{ entier} \neq 0.$$

Il s'ensuit que

(24) $$M_B\{e^{2\pi i(h[f]+k[g])}\}=M_B\{e^{2\pi ih[f]}\}\,.\,M_B\{e^{2\pi ik[g]}\}$$

pour tous les entiers h, k, l'égalité (24) étant évidente pour $h=k=0$. Or, l'hypothèse sur $hf+kg$ implique pour $h=1, k=0$ la régularité de $[f(t)]$. Ainsi la distribuante de $[f(t)]$ est continue;

il en est de même de celle de $[g(t)]$. Cette remarque et (24) permettent d'appliquer la seconde partie du théorème 2 et d'aboutir à l'indépendance de $[f(t)]$ et $[g(t)]$.

Applications.

1°. Soit $P(t)$ un polynôme de la forme

$$P(t)=c_1(t+a_1)^{s_1}+c_2(t+a_2)^{s_2}+\ldots+c_k(t+a_k)^{s_k}, \tag{25}$$

avec $k\geqslant 1$. Les nombres réels c, s sont assujettis aux conditions suivantes: $c_1 \neq 0$; $s_1>s_2>\ldots>s_k\geqslant 0$; $s_1\neq 0$ pour $k=1$. Un raisonnement direct montre l'équipartition de $P(t)$ (mod. 1):

Supposons $c_1>0$. $P(t)$ est une fonction positive et croissante à partir d'un t assez grand. En posant $E(n)=\underset{t}{E}\{\alpha+n<P(t)<\beta+n\}$, on obtient

$$\underset{t}{E}\{\alpha<[P(t)]<\beta\}=\Sigma E(n).$$

Pour $n>N$, on aura

$$|E(n)|=t''_n-t'_n, \tag{26}$$

les nombres t'_n, t''_n étant déterminés par les équations

$$P(t''_n)=\beta+n,\quad P(t'_n)=\alpha+n,\quad (0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant 1). \tag{27}$$

Il s'ensuit que

$$\beta-\alpha=(t''_n-t'_n)\left(\frac{dP(t)}{dt}\right)_{t=r_n},\quad \text{où } t'_n<r_n<t''_n.$$

En raison de $P(t'_{n+1})=\alpha+n+1$, on obtient

$$1=(t'_{n+1}-t'_n)\left(\frac{dP(t)}{dt}\right)_{t=v_n},\quad \text{où } t'_n<v_n<t''_n,$$

$$\frac{t''_n-t'_n}{t'_{n+1}-t'_n}=(\beta-\alpha)\,\frac{s_1c_1(v_n+a_1)^{s_1-1}+\ldots}{s_1c_1(r_n+a_1)^{s_1-1}+\ldots}. \tag{28}$$

(27) implique

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(t'_{n+1})}{P(t'_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+n+1}{\alpha+n}=1,$$

ce qui entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_1t'^{s_1}_{n+1}+\ldots}{c_1t'^{s_1}_n+\ldots}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{t'_{n+1}}{t'_n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{t'_{n+1}-t'_n}{t'_n}=0. \tag{29}$$

Les inégalités évidentes $0<t'_n<r_n<t''_n\leqslant t'_{n+1}$ et $t'_n<v_n<t'_{n+1}$ donnent

$$|v_n-r_n|<t'_{n+1}-t'_n,\qquad \frac{|v_n-r_n|}{r_n}<\frac{t'_{n+1}-t'_n}{t'_n};$$

on en tire en vertu de (29)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|v_n-r_n|}{r_n}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{r_n}=1.$$

En revenant sur (28), on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t''_n-t'_n}{t'_{n+1}-t'_n}=\beta-\alpha. \tag{30}$$

Les points t'_n $(n>N)$ décomposent la demi-droite $t>0$, à partir d'un t assez grand, en intervalles contigus de longueur $t'_{n+1}-t'_n$. Chaque intervalle contient un sous-intervalle $\langle t'_n\, t''_n\rangle$ identique à $E(n)$. (27) implique $\lim t'_n=\infty$; la dernière des relations (29) et la relation (30) suffisent donc pour montrer que la mesure relative de $\sum_{n>N}E(n)$ est $\beta-\alpha$. On aura donc

$$|\underset{t}{E}\{\alpha<[P(t)]<\beta\}|_R=\beta-\alpha, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le cas $c_1<0$ se réduit au cas traité.

2°. Le résultat 1° subsiste pour $s_1\geqslant s_2\geqslant\ldots\geqslant s_k\geqslant 0$, pourvu que le polynôme $P(t)$ ne soit pas borné. Soient donc $P(t)$ et $Q(t)$ deux polynômes de ce genre et supposons que $hP(t)+kQ(t)$ n'est pas borné, si les entiers h, k ne sont pas nuls à la fois. D'après 1° et la remarque de tout à l'heure, le polynôme $hP+kQ$, qui est aussi du même genre, jouit de l'équipartition (mod. 1) pour $h^2+k^2>0$. En vertu du théorème 4, on a donc l'indépendance de $[P(t)]$ et $[Q(t)]$.

Un exemple est fourni par

$$P(t)=(t+a_1)^2,\quad Q(t)=(t+a_2)^2\quad \text{avec } a_1\neq a_2. \tag{31}$$

Nous voyons donc que les fonctions de l'ensemble $[(t+a)^2]$ sont indépendantes deux à deux. Comme a prend toutes les valeurs réelles, l'ensemble en question a la puissance du continu.

En vertu du lemme 4', l'exemple (31) enseigne que les fonctions analytiques $(\sin 2\pi(t+a)^2)_a$ constituent un ensemble (de puissance du continu) dont les éléments sont indépendants deux à deux.

On peut même affirmer que tout sous-ensemble fini de cet ensemble est, en général, constitué par des éléments indépendants „en bloc". En effet, l'expression

$$\sum_{j=1}^{k} h_j (t+a_j)^2$$

n'est bornée, pour des h entiers non nuls, que si les sommes $\sum_{j=1}^{k} h_j$, $\sum_{j=1}^{k} h_j a_j$ s'annulent; or, une dépendance rationnelle entre les a_j peut être considérée comme exceptionnelle. Cette remarque, avec une généralisation facile du théorème 4, conduit à ce qui a été affirmé.

3°. M. Kampé de Fériet a posé le problème de définir une fonction $U(t,s)$ de deux variables, assujettie aux conditions suivantes:

1) $U(t_1,s)$ et $U(t_2,s)$ sont indépendantes en tant que fonctions de s pour $t_1 \neq t_2$;

2) $M_B\{U(t,s)\} = 0$ pour tout t fixe, la moyenne étant prise par rapport à s;

3) $M_B\{U^2(t,s)\} = \text{const.}$, la moyenne étant prise comme dans 2);

4) $M_B\{U(t+h,s)\, U(t,s)\} = \varphi(h)$, fonction de h seul, la moyenne étant prise comme dans 2).

$U(t,s)$ désigne une vitesse dépendant du temps t et de la molécule considérée; s est une variable (stochastique) qui détermine la molécule. 1) signifie que la répartition des vitesses entre les molécules à un instant donné est indépendante de la répartition réalisée à n'importe quel autre instant. 2) exprime le repos du centre des masses et 3) la constance de l'énergie cinétique. 1) et 2) impliquent que la valeur de $\varphi(h)$ est 0 pour $h \neq 0$; elle est égale à la constante 3) pour $h = 0$.

Or, l'exemple 2° fournit une réponse immédiate à ce problème:

à savoir, la fonction

$$U(t,s) = \sin 2\pi (t+s)^2$$

remplit toutes les conditions 1)—4). En effet, 1) a été établi, 2) résulte d'un calcul facile, 3) est vrai avec 1/2 pour la valeur constante et, par conséquent, 4) est aussi rempli; l'existence de la moyenne résulte de la représentation du produit des sinus comme différence des cosinus. Remarquons de plus que, grâce à la symétrie de $U(t,s)$, les conditions 1)—4) subsistent quand on intervertit le rôle de t et s. Cela signifie que la répartition temporelle des vitesses pour une molécule est indépendante de cette répartition pour une autre molécule; que pour toute molécule il y a une position moyenne; que l'énergie cinétique moyenne est la même pour toutes les molécules.

La remarque qui termine 2° montre que l'indépendance porte, *en général*, sur des systèmes de plusieurs molécules ou plusieurs instants.

Il faut remarquer que la solution du problème, tel qu'il a été posé d'abord par M. Kampé de Fériet, n'exige pas que l'intervalle de s soit infini. D'autre part, il est essentiel que l'intervalle pour t soit infini, si l'on veut avoir toujours pour deux valeurs différentes de s deux fonctions indépendantes de t. En effet, les fonctions indépendantes deux à deux dans un intervalle fini forment un ensemble tout au plus dénombrable.

La théorie exposée tout à l'heure peût être appliquée aux suites. Les notions de l'équipartition et de l'indépendance sont à définir par analogie; la densité asymptotique d'une suite partielle par rapport à la suite totale joue le rôle de la mesure relative.

(Reçu par la Rédaction le 8. 4. 1940).

Про незалежні функції (VI)

Г. Штейнгауз (Львів).

(Резюме)

Нехай Ex позначує „entier de x“, нехай $[x] = x - Ex$; кажемо, що $f(t)$ $(0 < t < \infty)$ має властивість еквіпартиції (mod 1), якщо функція $[f(t)]$ має таку дистрибуанту як $[t]$. Іншими словами, для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ є

$$\left| \underset{t}{E} \{[f(t)] < \lambda\} \right|_R = \lambda ;$$

при цьому через $|E|_R$ позначуємо релятивну міру множини E, як то вияснено в комунікаті (IV') [1]). Показується, що якщо $f(t)$ має властивість еквіпартиції, $[f]$ і $[g]$ є незалежні, а $[f+g]$ релятивно вимірні, то $f(t)+g(t)$ має також цю властивість (Теорема 3). Якщо $hf+kg$ має властивість еквіпартиції при довільних цілих h і k, то $[f(t)]$ і $[g(t)]$ є незалежні (Теорема 4). Як застосування одержуємо напр., що множина функцій $\{\sin 2\pi (t+a)^2\}_a$, одержана звідси, що a приймає всі дійсні значення, має парами незалежні елементи. Звідси доходимо до розв'язку певного питання Кампе де Форіє.

On extreme points of regular convex sets

by

M. KREIN and D. MILMAN (Odessa).

Let E be a Banach space (a linear normed complete space) and let $\bar{E}$ be the space of linear functionals adjoint to it.

A set $K \subset \bar{E}$ is called *regularly convex* [1]) if for every $f_0 \in \bar{E}$ not belonging to K such an element $x_0 \in E$ can be found that

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0).$$

It is obvious that every regularly convex set is convex.

Let $f_0 \in \bar{E}$, $x_i \in E$ $(|x_i| \leqslant 1,\ i = 1, 2, \dots, n)$ and $\varepsilon > 0$; then by the neighbourhood $U(f_0; x_1, \dots x_n, \varepsilon)$ we shall mean the set of all $f \in \bar{E}$ such that

$$|f_0(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

All possible neighbourhoods $U(f_0; x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$, where $f_0 \in E$, $x_i \in \bar{E}$, $|x_i| \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots,)$ and $\varepsilon > 0$, define in $\bar{E}$ a certain topology, which is called *weak topology* (*Tychonoff's topology*) [2]).

From Tychonoff's theorem on bicompactness of the topological product of segments, as it has been pointed out by Vera Gantmacher and V. Šmulyan [3]), results the following proposition:

A. *A bounded convex set $K \subset \bar{E}$ is regularly convex if and only if it is bicompact in the weak topology.*

---

[1]) This definition has been borrowed by us from the work of M. G. Krein and V. J. Šmulyan, On regularly closed sets etc. Annals of Mathematics 41 (1940).

[2]) A. Tychonoff, Über topologische Erweiterung von Raumen, Mathem. Annalen 102 (1929) 548.

[3]) V. Šmulyan, Sur les topologies différentes dans l'espace de Banach, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de l'URSS, 23, 4 (1939).