STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXVI. (1987)

Sur les espaces de Musielak–Orlicz non localement convexes intransitifs

par

ALBERT K. KALINDE (Lusaka)

Sommaire. Soient Ω un espace mesuré muni d'une mesure σ-finie sans atome et φ une fonction de Musielak–Orlicz sur Ω. En convenant de noter par $L_0^{\varphi}(\Omega)$ le sous-espace de l'espace de Musielak–Orlicz $L^{\varphi}(\Omega)$ associé à φ, constitué de fonctions scalaires mesurables u définies sur Ω à une fonction négligeable près pour lesquelles les λu sont φ-intégrables quel que soit le réel λ strictement positif, nous examinons d'abord à quelle condition tout opérateur linéaire continu de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ est nul, où $\varphi^1(t,x)$ est une fonction de t concave pour tout x pris dans Ω_1. Nous appliquons ensuite ce résultat à la caractérisation des sous-espaces fermés non triviaux invariants par rapport à tous les endomorphismes continus d'une classe d'espaces de Musielak–Orlicz généralement non localement convexes $L_0^{\varphi}(\Omega)$, où Ω est un espace métrique complet séparable dont la mesure est positive, bornée, régulière et sans atome.

§ 0. Introduction. En considérant un espace mesuré Ω de mesure sans atome, Ph. Turpin (cf. [14], théorème 3.4.8) a établi que $\varrho_1(t)$ et $\varrho_0(t)$ étant des fonctions d'Orlicz respectivement concave et vérifiant la condition Δ_2 (cf. [13]), s'il existe un opérateur linéaire continu non nul de $L^{\varrho_0}(\Omega)$ dans $L^{\varrho_1}(\Omega)$, alors $\limsup_{t\to\infty} \varrho_1(t)/\varrho_0(t) < +\infty$.

Pour une fonction de Musielak–Orlicz φ sur Ω, notons $L_0^{\varphi}(\Omega)$ le sous-espace de l'espace de Musielak–Orlicz $L^{\varphi}(\Omega)$ formé de fonctions scalaires mesurables u sur Ω, définies à une fonction négligeable près, telles que les λu soient φ-intégrables sur Ω quel que soit le réel λ strictement positif. L'ensemble des fonctions simples contenues dans $L_0^{\varphi}(\Omega)$ est dense dans ce sous-espace. Dans ce travail, nous nous limitons essentiellement à ces sous-espaces et les appelons espaces de Musielak–Orlicz.

Lorsque φ^0 et φ^1 sont des fonctions de Musielak–Orlicz respectivement sur les espaces mesurés Ω_0 et Ω_1 de mesures σ-finies sans atome, où $\varphi^1(t,x)$ est une fonction de t concave pour tout x dans Ω_1, dans le théorème 2.3 nous généralisons aux espaces de Musielak–Orlicz le résultat de Turpin mentionné ci-dessus, en démontrant que si φ^0 et φ^1 satisfont aux conditions C_0 et C_1 respectivement (cf. définition 9), alors l'existence d'un couple (x, y) dans $\Omega_0 \times \Omega_1$ tel que $\limsup_{t\to\infty} \varphi^1(t, y)/\varphi^0(t, x) < +\infty$ est une condition nécessaire d'existence d'un opérateur linéaire continu non nul de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$.

Dans le cas où φ^0 et φ^1 sont des fonctions de Musielak–Orlicz quelconques sur respectivement les espaces métriques complets séparables Ω_0 et Ω_1 dont les mesures sont bornées, sans atome et régulières, la condition $\limsup_{t\to\infty} \varphi^1(t, y)/\varphi^0(t, x) < +\infty$ pour tout couple (x, y) dans $\Omega_0 \times \Omega_1$ a comme conséquence dans le corollaire 3.2 que lorsque φ^0 et φ^1, puis Ω_0 et Ω_1 sont identiques respectivement à φ et Ω, l'espace de Musielak–Orlicz $L_0^\varphi(\Omega)$ est transitif, c'est-à-dire qu'il n'admet comme sous-espaces fermés invariants par rapport à tous ses endomorphismes continus que les sous-espaces triviaux. Comme cas particulier, tout espace d'Orlicz $L^\varrho([0, 1])$ engendré par une fonction d'Orlicz ϱ vérifiant la condition Δ_2 (cf. définition 2) est aussi transitif.

Quand φ est une fonction de Musielak–Orlicz sur un espace métrique complet séparable muni d'une mesure positive σ-additive bornée, régulière et sans atome, de plus telle que $\varphi(t, x)$ est une fonction de t concave pour tout x dans Ω et vérifie les conditions C_0 et C_1, nous montrons dans le théorème 3.5 que les seuls sous-espaces fermés non triviaux de $L_0^\varphi(\Omega)$ invariants par rapport à tous les endomorphismes continus de cet espace sont du type $L_0^\varphi(H)$, où H est un ensemble mesurable de mesure strictement positive plus petite strictement que celle de Ω et tel que pour tout y dans H, l'ensemble des x dans Ω vérifiant la condition $\limsup_{t\to\infty} \varphi(t, x)/\varphi(t, y) < +\infty$ est entièrement contenu dans H.

Cette note fait suite à l'article [17] dans lequel fut construit pour la première fois un espace vectoriel topologique rigide, c'est-à-dire dont les seuls endomorphismes continus sont des multiples de l'identité par les nombres complexes.

§ 1. Preliminaires.

Définition 1. On appelle *fonction d'Orlicz* (cf. [15]) toute application ϱ de $[0, +\infty]$ dans $[0, +\infty]$ non identiquement nulle, croissante, continue à gauche sur $(0, +\infty]$, nulle et continue en 0.

Définition 2. Une fonction d'Orlicz ϱ vérifie la *condition* Δ_2 (cf. [13]) *partout* (respectivement *au voisinage de* 0, *de* $+\infty$) lorsqu'il existe une constante m strictement positive telle que $\varrho(2t) \leqslant m\varrho(t)$ pour tout t (respectivement pour t dans le voisinage de 0, de $+\infty$).

Définition 3. Étant donné un espace mesuré Ω, c'est-à-dire un ensemble non vide muni d'une tribu de parties ainsi que d'une mesure positive σ-additive, une *fonction de Musielak–Orlicz* φ sur Ω (cf. [9]) est une application de $[0, +\infty] \times \Omega$ dans $[0, +\infty]$ telle que pour chaque x fixé dans Ω, $\varphi(t, x)$ est une fonction d'Orlicz et pour chaque $t \geqslant 0$ fixé, $\varphi(t, x)$ est une fonction de x mesurable sur Ω.

Remarque 1. Dans cet article, les mesures considérées sont toutes positives non nulles et σ-additives.

Définition 4. Soient Ω un espace mesuré de mesure μ, φ une fonction de Musielak–Orlicz sur Ω et $\mathcal{M}_\Omega$ l'ensemble des (classes de) fonctions scalaires mesurables, définies à une fonction négligeable près et finies presque partout. L'ensemble

(1) $$L^\varphi(\Omega) = \{u \in \mathcal{M}_\Omega\colon \exists \varepsilon > 0,\ \int_\Omega \varphi(\varepsilon|u(x)|, x)\,d\mu < +\infty\}$$

est un espace vectoriel. Lorsqu'il est muni de la topologie vectorielle métrisable engendrée par la F-norme (cf. [15])

(2) $$\nu_\varphi(u) = \inf\{\varepsilon > 0\colon \int_\Omega \varphi(|u(x)|/\varepsilon, x)\,d\mu \leqslant \varepsilon\},$$

il est appelé *espace de Musielak–Orlicz*. Il est complet pour cette topologie dont une base de voisinages de 0 est constituée des ensembles $\varepsilon B_\Omega^\varphi(\varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$, où

(3) $$B_\Omega^\varphi(\varepsilon) = \{u \in L^\varphi(\Omega)\colon \int_\Omega \varphi(|u(x)|, x)\,d\mu \leqslant \varepsilon\}.$$

Lorsque $\varphi(t, x)$ est une fonction de t concave pour tout x dans Ω, $L^\varphi(\Omega)$ n'est généralement pas localement convexe.

Remarque 2. Il est important de noter que pour toute fonction de Musielak–Orlicz φ sur Ω, par espace de Musielak–Orlicz associé à φ nous entendons dans cette note essentiellement le sous-espace de $L^\varphi(\Omega)$ formé de fonctions $u \in \mathcal{M}_\Omega$ telles que les λu sont φ-intégrables, c'est-à-dire

(4) $$\int_\Omega \varphi(\lambda|u(x)|, x)\,d\mu < +\infty$$

pour tout réel λ strictement positif, muni de la topologie induite par celle de $L^\varphi(\Omega)$. Nous le notons ici $L_0^\varphi(\Omega)$. L'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions caractéristiques des ensembles mesurables de mesures finies (autrement appelé ensemble des fonctions simples) appartenant à $L_0^\varphi(\Omega)$ est dense dans cet espace pour la topologie de $L^\varphi(\Omega)$. Cette propriété se démontre exactement comme dans le cas des espaces d'Orlicz.

Remarque 3. Si $\varphi(t, x)$ est une fonction de t sous-additive pour tout x dans Ω, ce qui est le cas lorsque $\varphi(t, x)$ est une fonction de t concave pour tout x dans Ω, alors on a $L_0^\varphi(\Omega) = L^\varphi(\Omega)$. Rappelons que pour les espaces d'Orlicz $L^\varrho(\Omega)$, on a aussi $L_0^\varrho(\Omega) = L^\varrho(\Omega)$ si ϱ vérifie la condition Δ_2 (cf. [10]).

Définition 5. Dans le cas où Ω est l'ensemble $\boldsymbol{N}$ des entiers naturels muni de la mesure cardinale, l'espace d'Orlicz engendré par une fonction d'Orlicz ϱ se définit par

(5) $$l^\varrho = \{(\lambda_n)_{n\in\boldsymbol{N}} \in \boldsymbol{K}^{\boldsymbol{N}}\colon \exists \varepsilon > 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \varrho(\varepsilon|\lambda_n|) < +\infty\}$$

où $\boldsymbol{K}$ est le champ des scalaires réels ou complexes. Cet espace se réduit à

(6) $$l^{\varrho} = \{(\lambda_n)_{n\in N} \in \boldsymbol{K}^{N}\colon \sum_{n=0}^{\infty} \varrho(|\lambda_n|) < +\infty\}$$

lorsque ϱ vérifie la condition Δ_2.

Définition 6. A la fonction d'Orlicz ϱ, on peut associer la fonction $\varrho_{(-1)}$ définie par

(7) $$\varrho_{(-1)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0, \\ 1/\varrho(t^{-1}) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

$\varrho_{(-1)}$ est une fonction croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, de plus elle vérifie la condition Δ_2 s'il en est ainsi de la fonction ϱ.

Notation. Si B est une partie d'un espace vectoriel et $\lambda = (\lambda_n)_{n\in N}$ une suite de scalaires, nous pouvons poser

(8) $$\sum_{n\geq 0}{}' \lambda_n B = \bigcup_{N\geq 0} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n B.$$

La partie (a) de la proposition 2 dans [13] (cf. [14], corollaire 3.4.2) peut être modifiée comme suit, en supprimant la condition Δ_2 faite sur la fonction d'Orlicz:

Proposition 1.1. *Étant donnés un espace mesuré Ω de mesure sans atome, une fonction d'Orlicz ϱ et une suite $(\lambda_n)_{n\in N}$ de scalaires, si $(\lambda_n)_{n\in N} \notin l^{\varrho(-1)}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\sum_{n\geq 0}{}' \lambda_n \varepsilon B_{\Omega}^{\varrho}(\varepsilon) \cap L_0^{\varrho}(\Omega) = L_0^{\varrho}(\Omega).$$

Sachant que l'ensemble des $U_\varepsilon = \sum_{n\geq 0}' \lambda_n \varepsilon B_{\Omega}^{\varrho}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, est un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie vectorielle sur $L^{\varrho}(\Omega)$ (cf. (1)) moins fine que la topologie de la F-norme v_{ϱ} associée à ϱ (cf. (2)) et en tenant compte de la remarque 2, on démontre exactement comme dans [13] que l'adhérence de 0 dans cette topologie, soit l'ensemble $\bigcap_{\varepsilon>0} \sum_{n\geq 0}' \lambda_n \varepsilon B_{\Omega}^{\varrho}(\varepsilon)$, contient l'ensemble des fonctions caractéristiques appartenant à $L_0^{\varrho}(\Omega)$ des sous-ensembles mesurables de Ω.

Remarque 4. Grâce à cette propriété, la condition nécessaire d'existence d'une application linéaire continue non nulle de $L^{\varrho_0}(\Omega)$ dans $L^{\varrho_1}(\Omega)$ démontrée par Ph. Turpin (cf. [14], théorème 3.4.8), avec ϱ_1 concave et ϱ_0 vérifiant la condition Δ_2, est préservée si on abandonne cette dernière condition et qu'à la place de $L^{\varrho_0}(\Omega)$ on envisage plutôt $L_0^{\varrho}(\Omega)$ où ϱ est une fonction d'Orlicz quelconque.

Notation. Pour tout sous-ensemble mesurable $A \subset \Omega$, la fonction caractéristique de A sera notée 1_A tandis que le sous-espace de $L_0^{\varrho}(\Omega)$ formé de (classes de) fonctions mesurables appartenant à $L_0^{\varrho}(\Omega)$ mais presque partout nulles sur $\Omega \backslash A$ sera désigné par $L_0^{\varrho}(A)$.

Définition 7. Si φ est une fonction de Musielak–Orlicz sur Ω, on dit que x (ou φ_x) est *dominé par* x_0 (ou par φ_{x_0}) lorsque $\limsup_{t\to\infty} \varphi(t, x)/\varphi(t, x_0) < +\infty$ et on note cela par $x \prec x_0$ ou $\varphi_x \prec \varphi_{x_0}$.

Cette définition permet d'envisager une relation de préordre sur l'espace mesuré Ω ou sur l'ensemble des fonctions d'Orlicz φ_x, $x \in \Omega$.

Définition 8. Étant donné une fonction de Musielak–Orlicz φ sur un espace mesuré Ω, nous appelons les ensembles $\{x \in \Omega\colon \varphi_x \prec \varphi_{x_0}\}$ et $\{x \in \Omega\colon \varphi_{x_0} \prec \varphi_x\}$ la *section commençante* et *section finissante de borne* x_0 respectivement.

Ces ensembles sont mesurables car la fonction $g(x, y) = \limsup_{t\to\infty} \varphi(t, y) \times \varphi(t, x)^{-1}$ est mesurable par rapport à chaque variable séparément.

Définition 9. Une fonction de Musielak–Orlicz φ sur un espace mesuré Ω vérifie la *condition* C_0 (respectivement la *condition* C_1) lorsque pour tout sous-ensemble mesurable A dans Ω de mesure non nulle, il existe un point x_A de A tel que la trace sur A de la section commençante de borne x_A (respectivement la trace sur A de la section finissante de borne x_A) est de mesure non nulle.

Exemple 1. Soit φ la fonction de Musielak–Orlicz $\varphi(t, x) = t^x$ pour x appartenant à $\Omega =]0, 1]$ et pour $0 \leq t$. C'est une fonction de t concave pour tout x fixé dans $]0, 1]$. Pour tout x dans $]0, 1]$, les sections commençantes de borne x sont du type $]0, x]$ tandis que les sections finissantes de borne x s'écrivent $[x, 1]$. Les conditions C_0 et C_1 sont trivialement vérifiées par cette fonction.

Exemple 2. De manière plus générale, on peut considérer une fonction monotone croissante p définie sur $\Omega = \boldsymbol{R}$ et à valeurs dans $]0, 1]$ et envisager la fonction définie sur $[0, \infty[\times \boldsymbol{R}$ par $\varphi(t, x) = t^{p(x)}$. C'est de nouveau une fonction de Musielak–Orlicz telle que pour chaque x fixé dans $\boldsymbol{R}$, $\varphi(t, x)$ est une fonction de t concave. Comme $]0, 1]$ est un ensemble totalement ordonné par la relation usuelle d'inégalité, toutes les fonctions d'Orlicz φ_x, $x \in \boldsymbol{R}$, associées à cette fonction sont comparables par la relation définie précédemment. Les sections commençantes et finissantes s'écrivent respectivement $]-\infty, x]$ et $[x, +\infty[$ pour tout x dans $\boldsymbol{R}$ et il est tout aussi évident que les conditions C_0 et C_1 sont satisfaites par la fonction φ.

Définition 10. Un ensemble mesurable H dans Ω est dit *héréditaire* lorsque quel que soit y dans H, la section commençante de borne y est entièrement contenue dans H.

Les sections commençantes dans Ω sont naturellement des sous-ensembles héréditaires de Ω.

Notation. $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ et $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ étant deux espaces de Musielak–Orlicz, l'ensemble des opérateurs linéaires continus de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ sera noté $\mathscr{L}[L_0^{\varphi^0}(\Omega_0), L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)]$ tandis que $\mathscr{L}[L_0^{\varphi}(\Omega)]$ désignera l'algèbre des endomorphismes continus de $L_0^{\varphi}(\Omega)$.

DÉFINITION 11. Nous dirons d'un espace de Musielak–Orlicz $L_0^{\varphi}(\Omega)$ qu'il est *transitif* lorsque les seuls sous-espaces fermés invariants par rapport à tous les endomorphismes continus de $L_0^{\varphi}(\Omega)$ sont les sous-espaces triviaux. Dans le cas contraire, l'espace sera dit *intransitif*.

§ 2. Opérateurs linéaires continus entre espaces de Musielak–Orlicz non localement convexes. Lorsque φ et ϱ sont respectivement une fonction de Musielak–Orlicz et une fonction d'Orlicz sur Ω, nous pouvons poser:

(9) $$1 \vee \varphi_x(t) = \sup\{1, \varphi(t,x)\}$$

(10) $$U_{\varrho,h}^{\varphi} = \{x \in \Omega\colon \sup_{t>0} \varphi(t,x)/1 \vee \varrho(t) \leqslant h\}, \qquad h \in N_0,$$

(11) $$V_{\varphi,h}^{\varrho} = \{x \in \Omega\colon \sup_{t>0} \varrho(t)/1 \vee \varphi_x(t) \leqslant h\}$$

où $N_0 = N\backslash\{0\}$.

LEMME 2.1. *Soient Ω un espace mesuré de mesure bornée μ sans atome et $L_0^{\varrho}(\Omega)$ et $L_0^{\varphi}(\Omega)$ des espaces respectivement d'Orlicz et de Musielak–Orlicz.*

(i) *Si φ_x est dominé par ϱ pour presque tous les x dans Ω, alors l'union de tous les $L_0^{\varrho}(U_{\varrho,h}^{\varphi})$ lorsque h varie dans N_0 est dense dans $L_0^{\varphi}(\Omega)$.*

(ii) *Si ϱ est dominé par φ_x pour presque tous les x dans Ω, alors $L_0^{\varphi}(\Omega)$ s'injecte continûment dans le produit topologique de tous les $L_0^{\varrho}(V_{\varphi,h}^{\varrho})$ lorsque h varie dans N_0.*

Démonstration. (i) Nous savons que les conditions

(12) $$\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi(t,x)}{\varrho(t)} < +\infty \quad \text{et}$$

(13) $$\sup_{t>0} \frac{\varphi(t,x)}{1 \vee \varrho(t)} < +\infty$$

sont équivalentes, donc on peut écrire

(14) $$\mu(\Omega) = \mu(\{x \in \Omega\colon \varphi_x \prec \varrho\}) = \mu\big(\bigcup_{h\in N_0} U_{\varrho,h}^{\varphi}\big),$$

où la suite $(U_{\varrho,h}^{\varphi})_{h\in N_0}$ est croissante par inclusion. Par conséquent, les ensembles $\bigcup_{h\in N_0} L_0^{\varrho}(U_{\varrho,h}^{\varphi})$ et $\bigcup_{h\in N_0} L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h}^{\varphi})$ sont des sous-espaces respectivement de $L_0^{\varrho}(\Omega)$ et $L_0^{\varphi}(\Omega)$. Puisque pour tout nombre naturel $h \geqslant 1$ on a

(15) $$\varphi(t,x) \leqslant h(1+\varrho(t)) \qquad \forall x \in U_{\varrho,h}^{\varphi},$$

le théorème d'inclusion des espaces de Musielak–Orlicz (cf. [2], p. 879) implique que $L_0^{\varrho}(U_{\varrho,h}^{\varphi}) \subset L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h}^{\varphi})$ pour tout h dans N_0 et par conséquent nous obtenons aussi

$$\bigcup_{h\in N_0} L_0^{\varrho}(U_{\varrho,h}^{\varphi}) \subset \bigcup_{h\in N_0} L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h}^{\varphi}).$$

Il est évident que $\bigcup_{h\in N_0} L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h}^{\varphi})$ est dense dans $L_0^{\varphi}(\Omega)$. Alors, pour prouver (i), il suffit de montrer que l'inclusion précédente est dense.

En effet, pour tout u dans le sous-espace $\bigcup_{h\in N_0} L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h}^{\varphi})$, il existe un nombre naturel $h_u \geqslant 1$ tel que u soit un élément de $L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h_u}^{\varphi})$. La mesure étant finie, il est clair que toutes les fonctions simples (combinaisons linéaires finies des fonctions caractéristiques des ensembles mesurables) appartenant à $L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h_u}^{\varphi})$ appartiennent aussi à $L_0^{\varrho}(U_{\varrho,h_u}^{\varphi})$. Ainsi, en vertu de la remarque 2, l'inclusion $L_0^{\varrho}(U_{\varrho,h_u}^{\varphi}) \subset L_0^{\varphi}(U_{\varrho,h_u}^{\varphi})$ est dense pour la topologie de $L_0^{\varphi}(\Omega)$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $u_\varepsilon \in L_0^{\varrho}(U_{\varrho,h_u}^{\varphi})$ tel que $v_\varphi(u-u_\varepsilon) < \varepsilon$, ce qui en vertu de (2) établit l'assertion (i).

(ii) En vertu de l'équivalence entre les conditions (12) et (13), nous avons aussi

$$\mu(\Omega) = \mu(\{x \in \Omega\colon \varrho \prec \varphi_x\}) = \mu\big(\bigcup_{h\in N_0} V_{\varphi,h}^{\varrho}\big).$$

Sur chaque $V_{\varphi,h}^{\varrho}$ l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\varrho(t) \leqslant h(1+\varphi(t,x)) \qquad \forall x \in V_{\varphi,h}^{\varrho},$$

qui nous permet d'appliquer à nouveau le théorème d'inclusion des espaces de Musielak–Orlicz à chaque $V_{\varphi,h}^{\varrho}$ pour obtenir l'inclusion continue $L_0^{\varphi}(V_{\varphi,h}^{\varrho}) \subset L_0^{\varrho}(V_{\varphi,h}^{\varrho})$ pour tout h naturel $\geqslant 1$.

Soit p_h l'opérateur de projection de $L_0^{\varphi}(\Omega)$ sur $L_0^{\varphi}(V_{\varphi,h}^{\varrho})$ pour chaque h naturel $\geqslant 1$ défini par

$$p_h(u) = u \cdot 1_{V_{\varphi,h}^{\varrho}} = u_h$$

où la multiplication est à comprendre dans le sens suivant:

(16) $$(u \cdot 1_{V_{\varphi,h}^{\varrho}})(x) = u(x) \cdot 1_{V_{\varphi,h}^{\varrho}}(x),$$

où $1_{V_{\varphi,h}^{\varrho}}$ est la fonction caractéristique de $V_{\varphi,h}^{\varrho}$. Posons à présent $p = \prod_{h\in N_0} p_h$.

Alors l'image que p prend sur un élément quelconque u de $L_0^{\varphi}(\Omega)$ se définit comme suit:

(17) $$p(u) = \prod_{h\in N_0} p_h(u) = (u_h)_{h\in N_0}.$$

L'application p ainsi définie est linéaire et injective de $L^{\varphi}_0(\Omega)$ dans le produit topologique $\prod_{h\in N_0} L^{\varphi}_0(V^{\varrho}_{\varphi,h})$. Compte tenu de la continuité des p_h, p est aussi continu par définition d'une topologie produit. Donc, si I désigne l'inclusion continue

$$\prod_{h\in N_0} L^{\varphi}_0(V^{\varrho}_{\varphi,h}) \subset \prod_{h\in N_0} L^{\varrho}_0(V^{\varrho}_{\varphi,h}),$$

$I\circ p$ est une application linéaire continue injective de $L^{\varphi}_0(\Omega)$ dans le produit topologique $\prod_{h\in N_0} L^{\varrho}_0(V^{\varrho}_{\varphi,h})$.

LEMME 2.2. *Si φ est une fonction de Musielak–Orlicz sur un espace mesuré Ω de mesure finie sans atome, vérifiant la condition C_0 (respectivement la condition C_1), alors il existe une suite $(x_n)_{n\in N}$ d'éléments de Ω telle que Ω et $\bigcup_{n\in N}\{x\in\Omega\colon \varphi_x \prec \varphi_{x_n}\}$ (respectivement Ω et $\bigcup_{n\in N}\{x\in\Omega\colon \varphi_{x_n} \prec \varphi_x\}$) soient de même mesure.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des familles finies ou dénombrables $(A_i)_{i\in I}$ où les A_i sont des ensembles mesurables de mesures non nulles et deux à deux disjoints, chaque A_i étant contenu dans une section commençante. La condition C_0 sur φ permet de construire facilement une telle famille à partir de la trace sur un ensemble mesurable de mesure non nulle et cela par les sections commençantes.

Nous pouvons définir sur $\mathfrak{A}$ une relation d'ordre comme suit: $\forall \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1\in\mathfrak{A}$: $\mathcal{M}_0 \leqslant \mathcal{M}_1$ si les éléments de $\mathcal{M}_0$ sont dans $\mathcal{M}_1$.

$\mathfrak{A}$ ainsi ordonné est un inductif. En effet, soit $\mathfrak{F}$ une partie quelconque totalement ordonnée dans $\mathfrak{A}$. La réunion de toutes les familles appartenant à $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles mesurables de mesures non nulles et deux à deux disjoints est un majorant de $\mathfrak{F}$ pour la relation d'ordre définie ci-dessus. Ce majorant appartient à $\mathfrak{A}$, car la mesure μ sur Ω est bornée. Alors en vertu de l'axiome de Zorn, il existe au moins une famille maximale $\mathcal{M}\in\mathfrak{A}$, avec $\mathcal{M} = (M_n)_{n\in N}$ telle que $\mu(\Omega\setminus\bigcup_{n\in N} M_n) = 0$, car sinon, compte tenu de la condition C_0, $\Omega\setminus\bigcup_{n\in N} M_n$ contiendrait un élément y tel que l'ensemble

$$(\Omega\setminus\bigcup_{n\in N} M_n)\cap\{x\in\Omega\colon \varphi_x\prec\varphi_y\} = A$$

soit de mesure non nulle. $\mathcal{M}\cup\{A\}$ serait une famille de $\mathfrak{A}$ contenant $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ ne serait pas maximal. Par conséquent, en vertu de la définition des familles de $\mathfrak{A}$, à $\mathcal{M} = (M_n)_{n\in N}$ nous pouvons associer une suite des sections commençantes $(\{x\in\Omega\colon \varphi_x\prec\varphi_{x_n}\})_{n\in N}$ telle que $M_n\subset\{x\in\Omega\colon \varphi_x\prec\varphi_{x_n}\}$ pour chaque $n\in N$ et $\mu(\Omega\setminus\bigcup_{n\in N}\{x\in\Omega\colon \varphi_x\prec\varphi_{x_n}\}) = 0$.

Lorsque la condition C_1 sur φ est satisfaite, on montre de manière similaire l'existence d'une suite d'éléments $(y_m)_{m\in N}$ de Ω telle que $\mu(\Omega\setminus\bigcup_{m\in N}\{x\in\Omega\colon \varphi_{y_m}\prec\varphi_x\}) = 0$.

THÉORÈME 2.3. *Soient Ω_0 et Ω_1 deux espaces mesurés de mesures respectives μ_0 et μ_1 σ-finies sans atome et φ^0, φ^1 deux fonctions de Musielak–Orlicz sur Ω_0 et Ω_1 respectivement, φ^0 vérifiant la condition C_0, φ^1 satisfaisant à la condition C_1 et de plus telle que pour chaque x fixé dans Ω_1, $\varphi^1(t,x)$ est une fonction de t concave. Si pour tout couple (x,y) dans $\Omega_0\times\Omega_1$ on a*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\varphi^1(t,y)}{\varphi^0(t,x)} = +\infty,$$

alors tout opérateur linéaire continu de $L^{\varphi^0}_0(\Omega_0)$ dans $L^{\varphi^1}_0(\Omega_1)$ est nul.

Démonstration. Puisque les mesures μ_0 et μ_1 sont σ-finies, nous avons

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \bigcup_{h\in N}\Omega^0_h, & \mu(\Omega^0_h) &< +\infty & \forall h\in N,\\ \Omega_1 &= \bigcup_{k\in N}\Omega^1_k, & \mu(\Omega^1_k) &< +\infty & \forall k\in N.\end{aligned} \tag{18}$$

(i) Montrons d'abord que tout opérateur linéaire continu de $L^{\varphi^0}_0(\Omega^0_h)$ dans $L^{\varphi^1}_0(\Omega^1_k)$ est nul pour tout couple $(h,k)\in N\times N$. Soit donc (h,k) un couple quelconque de nombres naturels. Puisque les conditions C_0 et C_1 sont vérifiées respectivement par φ^0 et φ^1, en vertu du lemme 2.2 il existe une suite $(x_n)_{n\in N}$ d'éléments de Ω^0_h et une suite $(y_m)_{m\in N}$ d'éléments de Ω^1_k telles que

$$\mu_0(\Omega^0_h) = \mu_0\Big(\bigcup_{n\in N}\{x\in\Omega^0_h\colon \varphi^0_x\prec\varphi^0_{x_n}\}\Big),$$

$$\mu_1(\Omega^1_k) = \mu_1\Big(\bigcup_{m\in N}\{y\in\Omega^1_k\colon \varphi^1_{y_m}\prec\varphi^1_y\}\Big).$$

Compte tenu de l'équivalence entre les conditions (12) et (13), on sait que pour tout m naturel on a

$$\{y\in\Omega^1_k\colon \varphi^1_{y_m}\prec\varphi^1_y\} = \bigcup_{r\in N_0} V^{\varphi^1_{y_m}}_{\varphi^1,r} \quad (\text{cf. } (11)).$$

Alors, en vertu de la partie (ii) du lemme 2.1 il existe une injection continue notée p de $L^{\varphi^1}_0(\Omega^1_k)$ dans le produit topologique des $L^{\varphi^1}_0(V^{\varphi^1_{y_m}}_{\varphi^1,r})$ pour (m,r) variant dans $N\times N_0$, définie d'après (16) et (17) par

$$p(u) = (u_{mr})_{(m,r)\in N\times N_0} \quad \forall u\in L^{\varphi^1}_0(\Omega^1_k), \tag{19}$$

où $u_{mr}\in L^{\varphi^1_{y_m}}_0(V^{\varphi^1_{y_m}}_{\varphi^1,r})$ pour chaque couple $(m,r)\in N\times N_0$.

D'autre part, pour un $n\in N$ quelconque, la section commençante $\{x\in\Omega_h^0\colon \varphi_x^0\prec\varphi_{x_n}^0\}$ est constituée des éléments $x\in\Omega_h^0$ dominés par x_n et en vertu de la partie (i) du lemme 2.1,

$$\bigcup_{s\in N_0} L_0^{\varphi_{x_n}^0}(U_{\varphi_{x_n}^0,s}^{\varphi^0})$$

est dense dans $L_0^{\varphi^0}(\{x\in\Omega_h^0\colon \varphi_x^0\prec\varphi_{x_n}^0\})$. Dans ce cas, pour tout opérateur linéaire continu T de ce dernier espace dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_k^1)$, le composé $p\circ T$ est linéaire continu de $L_0^{\varphi^0}(\{x\in\Omega_h^0\colon \varphi_x^0\prec\varphi_{x_n}^0\})$ dans

$$\prod_{\substack{m\in N\\ r\in N_0}} L_0^{\varphi_{y_m}^1}(V_{\varphi^1,r}^{\varphi_{y_m}^1})$$

telle que

$$p\circ T(u)=(w_{mr})_{(m,r)\in N\times N_0}\qquad \forall u\in\bigcup_{s\in N_0} L_0^{\varphi_{x_n}^0}(U_{\varphi_{x_n}^0,s}^{\varphi^0})\tag{20}$$

où $w_{mr}\in L_0^{\varphi_{y_m}^1}(V_{\varphi^1,r}^{\varphi_{y_m}^1})$ pour chaque $(m,r)\in N\times N_0$.

Mais par hypothèse, $\limsup\limits_{t\to\infty}\varphi^1(t,y_m)/\varphi^0(t,x_n)=+\infty$ $\forall(m,n)\in N\times N$, alors en vertu de la remarque 4, la condition nécessaire d'existence d'un opérateur linéaire continu non nul entre des espaces d'Orlicz (cf. [14], théorème 3.4.8) est applicable et on obtient $w_{mr}=0$ pour tout couple (m,r) dans $N\times N_0$. Comme p est une injection, on en déduit que T est nul sur

$$\bigcup_{s\in N_0} L_0^{\varphi_{x_n}^0}(U_{\varphi_{x_n}^0,s}^{\varphi^0})$$

qui est un sous-espace dense dans $L_0^{\varphi^0}(\{x\in\Omega_h^0\colon \varphi_x^0\prec\varphi_{x_n}^0\})$. Par conséquent T est nul sur ce dernier espace et on en conclut que

$$\mathscr{L}[L_0^{\varphi^0}(\{x\in\Omega_h^0\colon \varphi_x^0\prec\varphi_{x_n}^0\}),L_0^{\varphi^1}(\Omega_k^1)]=\{0\}.$$

L'égalité ci-dessus est valable quel que soit le 3-uple (h,n,k) dans $N\times N\times N$.

Posons à présent

$$D_m=\bigcup_{n\leqslant m}\{x\in\Omega_h^0\colon \varphi_x^0\prec\varphi_{x_n}^0\}.$$

Puisque $D_0=\{x\in\Omega_h^0\colon \varphi_x^0\prec\varphi_{x_0}^0\}$, on démontre par récurrence que $\mathscr{L}[L_0^{\varphi^0}(D_m),L_0^{\varphi^1}(\Omega_k^1)]=\{0\}$ pour tout $(m,k)\in N\times N$.

Or on sait que $\Omega_h^0=\bigcup_{m\in N}D_m$ pour un naturel h quelconque, la suite $(D_m)_{m\in N}$ étant croissante; l'ensemble $\bigcup_{m\in N}L_0^{\varphi^0}(D_m)$ est donc un sous-espace dense de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_h^0)$. Par conséquent on a

$$\mathscr{L}[L_0^{\varphi^0}(\Omega_h^0),L_0^{\varphi^1}(\Omega_k^1)]=\{0\}\qquad\forall(h,k)\in N\times N.$$

En posant encore $H_m=\bigcup_{h\leqslant m}\Omega_h^0$ avec $H_0=\Omega_0^0$ et sachant que $(H_m)_{m\in N}$ est une suite croissante de sous-ensembles mesurables de Ω_0 telle que $\Omega_0=\bigcup_{m\in N}H_m$, on montre par récurrence comme précédemment que

$$\mathscr{L}[L_0^{\varphi^0}(\Omega_0),L_0^{\varphi^1}(\Omega_k^1)]=\{0\}\qquad\forall k\in N.\tag{21}$$

Soit à présent p' l'application de $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ dans le produit topologique $\prod_{k\in N}L_0^{\varphi^1}(\Omega_k^1)$ définie d'après (19), injective et continue. Puisque le composé avec p', soit $p'\circ T$, de tout opérateur linéaire continu T de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ est nulle en vertu de (21), T lui-même est nul.

§ 3. Sous-espaces fermés non triviaux invariants dans les espaces de Musielak–Orlicz non localement convexes. Les espaces de Musielak–Orlicz engendrés par des fonctions φ telles que $\varphi(t,x)$ est une fonction de t concave pour tout x appartenant à un certain espace mesuré Ω fournissent des exemples d'espaces vectoriels topologiques généralement non localement convexes. C'est dans ces espaces, lorsque Ω est un espace métrique complet séparable muni d'une mesure bornée non atomique et régulière, que nous caractérisons les sous-espaces fermés non triviaux invariants par rapport à tous les endomorphismes continus de ces espaces.

THÉORÈME 3.1. *Étant donnés deux espaces de Musielak–Orlicz $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ et $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ où Ω_0 et Ω_1 sont des espaces métriques complets séparables munis des mesures respectives μ_0, μ_1 bornées, régulières et sans atome, si*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\varphi^1(t,y)}{\varphi^0(t,x)}<+\infty\tag{22}$$

pour tout couple (x,y) dans $\Omega_0\times\Omega_1$, alors quel que soit l'élément non nul u dans $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$, l'ensemble des images Tu où T parcourt $\mathscr{L}[L_0^{\varphi^0}(\Omega_0),L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)]$ est dense dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$.

Démonstration. Soit $u_1\neq0$ un élément quelconque dans $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ et considérons l'ensemble mesurable

$$S_{u_1,\varepsilon}=\{x\in\Omega_0\colon |u_1(x)|>\varepsilon\},\tag{23}$$

où $\varepsilon>0$ est tel que $S_{u_1,\varepsilon}$ soit de mesure non nulle. μ_0 étant une mesure régulière, il existe un compact $C\subset S_{u_1,\varepsilon}$ de mesure non nulle tel que la mesure de $S_{u_1,\varepsilon}\backslash C$ soit arbitrairement petite.

Prenons un ensemble mesurable $A\subset\Omega_1$ quelconque de mesure non nulle tel que sa fonction caractéristique 1_A soit un élément de $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$. Puisque la mesure μ_1 est également régulière, il existe un nombre naturel $m_0\geqslant1$ tel qu'à tout autre nombre naturel $m\geqslant m_0$ on puisse associer un compact $C_m \subset A$ de mesure non nulle satisfaisant à la condition

$$\mu_1(A \setminus C_m) < \frac{1}{m}. \tag{24}$$

Pour un nombre naturel $m \geqslant m_0$ quelconque mais fixé et pour tout sous-ensemble mesurable $B \subset C_m$, nous pouvons poser: $\bar{\mu}_m(B) = \mu_1(B)/\mu_1(C_m)$. De même, pour tout sous-ensemble mesurable $D \subset C$, nous pouvons écrire: $\bar{\mu}(D) = \mu_0(D)/\mu_0(C)$. $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}_m$ sont des mesures normalisées sans atome respectivement sur C et C_m. Comme C et C_m sont des compacts, en vertu du théorème d'existence d'une équivalence borélienne (cf. [11], Theorem 9, p. 270) nous pouvons trouver des ensembles mesurables $C^0 \subset C$ et $C_m^0 \subset C_m$ tels que

$$\bar{\mu}(C \setminus C^0) = 0, \quad \bar{\mu}_m(C_m \setminus C_m^0) = 0, \tag{25}$$

ainsi qu'une équivalence borélienne q de C_m^0 sur C^0 telle que $\bar{\mu} = \bar{\mu}_m q^{-1}$. Alors en vertu de la condition (22) on a

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\varphi^1(t, q^{-1}(x))}{\varphi^0(t, x)} < +\infty \quad \forall x \in C^0.$$

Posons encore

$$B_h = \left\{x \in C^0 \colon \sup_{t>0} \frac{\varphi^1(t, q^{-1}(x))}{1 \vee \varphi^0(t, x)} \leqslant h\right\}, \quad h \in \boldsymbol{N}_0. \tag{26}$$

On a $C^0 = \bigcup_{h \in \boldsymbol{N}_0} B_h$. D'autre part,

$$q^{-1}(C^0) = \bigcup_{h \in \boldsymbol{N}_0} q^{-1}(B_h) = C_m^0. \tag{27}$$

Prenons un $h_0 \in \boldsymbol{N}_0$ suffisamment grand pour que

$$\bar{\mu}_m(q^{-1}(B_h)) = \bar{\mu}(B_h) > 0 \quad \forall h \geqslant h_0,$$

la suite $(B_h)_{h \in \boldsymbol{N}_0}$ étant croissante. Soit $h \geqslant h_0$ un entier quelconque mais fixé et considérons les fonctions $(u/u_1) \cdot 1_{B_h}$ pour tout élément u de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$. En vertu de (23) et du fait que u/ε est de nouveau un élément de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$, il est clair que $(u/u_1) \cdot 1_{B_h}$ est encore un élément de $L_0^{\varphi^0}(B_h)$ pour tout élément u dans $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$. L'application T_h' de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ dans $L_0^{\varphi^0}(B_h)$ envoyant u sur $(u/u_1) \cdot 1_{B_h}$ est non nulle et linéaire; elle est de plus continue car $(1/u_1) \cdot 1_{B_h}$ est borné. En outre, en appliquant le théorème d'inclusion des espaces de Musielak–Orlicz (cf. [2], p. 879) à B_h défini par (26) et le théorème de changement de variables dans une intégrale (cf. [3], Theorem C, p. 163), $(v \circ q) \cdot 1_{q^{-1}(B_h)}$ est un élément de $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ quel que soit v dans $L_0^{\varphi^0}(B_h)$. L'application $T_{0,h}$ de $L_0^{\varphi^0}(B_h)$ dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ envoyant v sur $(v \circ q) \cdot 1_{q^{-1}(B_h)}$ est linéaire continue non nulle pour la même raison que ci-dessus. Posons encore

$T_h = T_{0,h} \circ T_h'$. Nous avons ainsi un nouvel opérateur linéaire continu non nul de $L_0^{\varphi^0}(\Omega_0)$ dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ et nous obtenons

$$T_h(u_1) = T_{0,h} \circ T_h'(u_1) = T_{0,h}(1_{B_h}) = (1_{B_h} \circ q) \cdot 1_{q^{-1}(B_h)} = 1_{q^{-1}(B_h)}.$$

Nous en déduisons que $1_{q^{-1}(B_h)}$ appartient à l'ensemble $\{Tu_1 \colon T \in \mathscr{L}[L_0^{\varphi^0}(\Omega_0), L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)]\}$ pour tout nombre naturel $h \geqslant h_0$. Or $(q^{-1}(B_h))_{h \geqslant h_0}$ est une suite croissante de sous-ensembles mesurables; donc de (27) il résulte que $1_{C_m^0}$ appartient à l'adhérence de cet ensemble par rapport à la topologie de $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ (cf. (1)). De (25) on conclut qu'il en est de même de 1_{C_m}.

Cependant, m étant un nombre naturel quelconque supérieur ou égal à m_0, de (24) on déduit que $(\nu_{\varphi^1}(1_A - 1_{C_m}))_{m \in \boldsymbol{N}_0}$ est une suite qui converge vers 0 lorsque m tend vers l'infini et de ce fait, 1_A appartient aussi à l'adhérence de l'ensemble mentionné ci-dessus. Par conséquent, cet adhérence contient l'ensemble total dans $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ des fonctions caractéristiques appartenant à $L_0^{\varphi^1}(\Omega_1)$ des sous-ensembles mesurables de Ω_1.

Corollaire 3.2. *Soient Ω un espace métrique complet séparable muni d'une mesure bornée régulière sans atome et φ une fonction de Musielak–Orlicz sur Ω. Si*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{\varphi(t, x)}{\varphi(t, y)} < +\infty$$

pour tout couple (x, y) dans $\Omega \times \Omega$, alors $L_0^{\varphi}(\Omega)$ est transitif.

Démonstration. Soit $\boldsymbol{E}$ un sous-espace fermé quelconque non réduit au singleton nul dans $L_0^{\varphi}(\Omega)$ et invariant pour tous les endomorphismes continus de $L_0^{\varphi}(\Omega)$. Pour tout élément non nul u de $\boldsymbol{E}$, il est clair qu'on a $\{Tu \colon T \in \mathscr{L}[L_0^{\varphi}(\Omega)]\} \subset \boldsymbol{E}$ et en vertu du théorème précédent, $\boldsymbol{E}$ est identique à $L_0^{\varphi}(\Omega)$. Nous avons donc prouvé que les seuls sous-espaces fermés de $L_0^{\varphi}(\Omega)$ invariants par rapport à tous les endomorphismes continus de cet espace sont les sous-espaces triviaux.

Remarque 5. On voit en particulier que tout espace d'Orlicz $L_0^{\varphi}([0, 1])$ est transitif au sens de la définition 11. Autrement dit, pour tout élément non nul u de $L_0^{\varphi}([0, 1])$, l'ensemble $\{Tu \colon T \in \mathscr{L}[L_0^{\varphi}([0, 1])]\}$ est dense dans $L_0^{\varphi}([0, 1])$. On montre dans [4] que cet ensemble est généralement strictement contenu dans $L^{\varphi}([0, 1])$.

Lemme 3.3. *Étant donnés un espace mesuré Ω de mesure μ bornée sans atome et une fonction de Musielak–Orlicz φ sur Ω, pour tout sous-espace fermé non nul $\boldsymbol{E}$ de $L_0^{\varphi}(\Omega)$ invariant pour tous les endomorphismes continus de cet espace, il existe un ensemble mesurable $S_{\boldsymbol{E}} \subset \Omega$ de mesure non nulle tel que $\boldsymbol{E} = L_0^{\varphi}(S_{\boldsymbol{E}})$.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{E}$ un sous-espace fermé non nul quelconque de $L_0^{\varphi}(\Omega)$, invariant pour tous les endomorphismes continus de $L_0^{\varphi}(\Omega)$. Montrons d'abord que tout élément u de $L_0^\varphi(\Omega)$ pour lequel il existe une fonction w de $\mathbf{E}$ telle que $|u(x)| \leqslant |w(x)|$ pour presque tous les x dans Ω est aussi un élément de $\mathbf{E}$. Soit $u \in L_0^\varphi(\Omega)$ quelconque vérifiant la propriété ci-dessus et supposons-le différent de la fonction nulle presque partout.

Nous pouvons poser:

$$S_u = \{x \in \Omega: u(x) \neq 0\}, \qquad S_w = \{x \in \Omega: w(x) \neq 0\}.$$

Il est évident que ces ensembles sont mesurables et de plus, comme $S_u \subset S_w$, S_w est de mesure non nulle. Si à tout élément v dans $L_0^\varphi(\Omega)$ nous associons la fonction $(u/w)\cdot(v\cdot 1_{S_w})$, celle-ci appartient à $L_0^\varphi(\Omega)$ car sur S_w on a $|u(x)/w(x)| \leqslant 1$; cela permet d'envisager une application T de $L_0^\varphi(\Omega)$ dans $L_0^\varphi(\Omega)$ définie par

$$Tv = \frac{u}{w}\cdot(v\cdot 1_{S_w}) \quad \text{pour tout } v \text{ dans } L_0^\varphi(\Omega).$$

T est naturellement linéaire et continu. Mais $Tw = (u/w)\cdot(w\cdot 1_{S_w}) = u$ et w appartient à $\mathbf{E}$; il en résulte que u est également un élément de $\mathbf{E}$ puisque ce dernier est un sous-espace invariant pour T. L'assertion est ainsi prouvée.

$\mathbf{E}$ étant donc un sous-espace vectoriel solide fermé de $L_0^\varphi(\Omega)$, on voit comme dans [12], chapitre III, p. 155–156 que $\mathbf{E} = L_0^\varphi(S_{\mathbf{E}})$ pour quelque ensemble mesurable $S_{\mathbf{E}} \subset \Omega$ de mesure non nulle.

Proposition 3.4. *Soient donnés un espace métrique complet séparable Ω muni d'une mesure bornée μ régulière sans atome et une fonction de Musielak–Orlicz φ vérifiant les conditions* C_0 *et* C_1 (cf. Définition 9). *Pour tout sous-espace fermé $\mathbf{E}$ invariant par rapport à tous les endomorphismes continus de $L_0^\varphi(\Omega)$, il existe un sous-ensemble mesurable héréditaire $H \subset \Omega$ tel que $\mathbf{E} = L_0^\varphi(H)$.*

Démonstration. La proposition est triviale si $\mathbf{E} = \{0\}$ ou si $\mathbf{E} = L_0^\varphi(\Omega)$. Considérons donc le cas d'un sous-espace fermé non trivial quelconque $\mathbf{E}$ de $L_0^\varphi(\Omega)$, invariant pour tous les endomorphismes continus de cet espace. En vertu du lemme 3.3, il existe un ensemble mesurable $S_{\mathbf{E}} \subset \Omega$ de mesure non nulle tel que $\mathbf{E} = L_0^\varphi(S_{\mathbf{E}})$.

Posons

$$(28) \qquad H = \{y \in \Omega: \exists A_y \subset S_{\mathbf{E}} \text{ mesurable}, \ \mu(A_y) > 0, \ \varphi_y \prec \varphi_x \ \forall x \in A_y\}.$$

H est un ensemble mesurable en vertu du théorème de Fubini appliqué à la fonction caractéristique de l'ensemble $\{(x, y) \in \Omega\times\Omega: g(x, y) < +\infty\}$ où $g(x, y) = \limsup_{t\to\infty} \varphi(t, y)/\varphi(t, x)$. De plus, il est de mesure non nulle. D'autre part, si y est un élément quelconque de H, tout z dans Ω tel que $\varphi_z \prec \varphi_y$ appartient à H, car $\varphi_z \prec \varphi_y \prec \varphi_x$ pour tout x dans A_y. H est donc un ensemble héréditaire.

Prouvons que l'ensemble mesurable $S_{\mathbf{E}}\setminus H$ est de mesure nulle. Raisonnons par l'absurde. Si $\mu(S_{\mathbf{E}}\setminus H) > 0$, prenons $D = S_{\mathbf{E}}\setminus H$. Or φ vérifie la condition C_1; il existe donc un $z_D \in D$ tel que

$$\mu(D \cap \{y \in \Omega: \varphi_{z_D} \prec \varphi_y\}) > 0.$$

Comme $D \cap \{y \in \Omega: \varphi_{z_D} \prec \varphi_y\} \subset S_{\mathbf{E}}$, il est clair, compte tenu de (28), que z_D est un élément de H, ce qui est en contradiction avec le fait que z_D a été pris dans $S_{\mathbf{E}}\setminus H$. Donc $S_{\mathbf{E}}\setminus H$ est de mesure nulle. Par conséquent, de

$$S_{\mathbf{E}} = (S_{\mathbf{E}}\setminus H) \cup (S_{\mathbf{E}} \cap H)$$

on déduit que

$$(29) \qquad \mathbf{E} = L_0^\varphi(S_{\mathbf{E}}) = L_0^\varphi(S_{\mathbf{E}} \cap H) \subset L_0^\varphi(H).$$

Prouvons l'inclusion inverse. Partons pour cela de $H = (H\setminus S_{\mathbf{E}}) \cup (H \cap S_{\mathbf{E}})$ et montrons que $H\setminus S_{\mathbf{E}}$ est de mesure nulle. Supposons que $\mu(H\setminus S_{\mathbf{E}}) > 0$. Puisque φ vérifie la condition C_0, il existe un ensemble mesurable $B \subset H\setminus S_{\mathbf{E}}$ de mesure non nulle tel que $1_B \in L_0^\varphi(\Omega)$ dont tous les éléments sont dominés par un point $x_0 \in H\setminus S_{\mathbf{E}}$. Puisque $x_0 \in H$, par définition de H (cf. (28)) x_0 est dominé par tout point d'un ensemble mesurable $C \subset S_{\mathbf{E}}$ de mesure non nulle tel que $1_C \in L_0^\varphi(\Omega)$. Alors on a

$$\forall x \in B, \forall y \in C: \quad \varphi_x \prec \varphi_y.$$

On en déduit en vertu du théorème 3.1 que l'ensemble $\{T(1_C): T \in \mathscr{L}[L_0^\varphi(C), L_0^\varphi(B)]\}$ est dense dans $L_0^\varphi(B)$. Comme $C \subset S_{\mathbf{E}}$, il est clair que $1_C \in \mathbf{E}$.

Soit p_C l'opérateur de projection de $L_0^\varphi(\Omega)$ sur $L_0^\varphi(C)$. Alors pour tout opérateur linéaire continu T de $L_0^\varphi(C)$ dans $L_0^\varphi(B)$, $T\circ p_C$ est un opérateur linéaire continu de $L_0^\varphi(\Omega)$ dans $L_0^\varphi(B)$. Comme $1_B \in L_0^\varphi(B)$, cet élément est approchable par les $T\circ p_C(1_C)$ pour T parcourant $\mathscr{L}[L_0^\varphi(C), L_0^\varphi(B)]$. D'où $1_B \in \mathbf{E}$, car $\mathbf{E}$ est fermé et invariant par tous les endomorphismes continus de $L_0^\varphi(\Omega)$. Il en résulte que $B\setminus S_{\mathbf{E}} = B$ est négligeable, ce qui est une contradiction.

Donc $\mu(H\setminus S_{\mathbf{E}}) = 0$ et par conséquent

$$\mathbf{E} = L_0^\varphi(S_{\mathbf{E}}) = L_0^\varphi(S_{\mathbf{E}} \cap H) = L_0^\varphi(H).$$

Il est évident que dans ce cas $0 < \mu(H) < \mu(\Omega)$.

Théorème 3.5. *Soient Ω un espace métrique séparable complet muni d'une mesure μ bornée régulière sans atome et φ une fonction de Musielak–Orlicz sur Ω vérifiant les conditions C_0 et C_1, de plus telle que $\varphi(t, x)$ est une fonction de t concave pour tout x dans Ω. Alors un sous-espace fermé non trivial $\mathbf{E}$ de $L_0^\varphi(\Omega)$ est invariant pour tous les endomorphismes continus de $L_0^\varphi(\Omega)$ si et seulement si il existe un sous-ensemble mesurable héréditaire H de mesure strictement comprise entre 0 et $\mu(\Omega)$ tel que $\mathbf{E} = L_0^\varphi(H)$.*

Démonstration. La nécessité de la condition est une conséquence de la proposition précédente.

Quant à la suffisance, prenons un ensemble mesurable héréditaire quelconque $H \subset \Omega$ tel que $0 < \mu(H) < \mu(\Omega)$. On démontre facilement par contraposition que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi(t,y)}{\varphi(t,x)} = +\infty \quad \forall (x,y)\in H\times(\Omega\setminus H). \tag{30}$$

Mais $L_0^\varphi(\Omega) = L^\varphi(\Omega)$ (cf. Remarque 3) est une somme topologique directe de sous-espaces $L_0^\varphi(H)$ et $L_0^\varphi(\Omega\setminus H)$. Par conséquent, pour tout u dans $L_0^\varphi(H)$ et pour tout T dans l'algèbre $\mathscr{L}[L_0^\varphi(\Omega)]$ on a

$$Tu = v+w \quad \text{où} \quad v\in L_0^\varphi(H) \text{ et } w\in L_0^\varphi(\Omega\setminus H).$$

La restriction de T à $L_0^\varphi(H)$, soit $T|_{L_0^\varphi(H)}$, et la projection $p_{\Omega\setminus H}$ de $L_0^\varphi(\Omega)$ sur $L_0^\varphi(\Omega\setminus H)$ définie par

$$p_{\Omega\setminus H}(u) = u\cdot 1_{\Omega\setminus H} \quad \forall u\in L_0^\varphi(\Omega)$$

étant linéaires et continues, $p_{\Omega\setminus H}\circ T|_{L_0^\varphi(H)}$ est un opérateur linéaire continu de $L_0^\varphi(H)$ dans $L_0^\varphi(\Omega\setminus H)$. De plus, pour tout u dans $L_0^\varphi(H)$, en tenant compte de (30), le théorème 2.3 implique que $(p_{\Omega\setminus H}\circ T|_{L_0^\varphi(H)})(u) = w = 0$. Il en résulte que pour tout u dans $L_0^\varphi(H)$ on a

$$Tu = T|_{L_0^\varphi(H)}(u)\in L_0^\varphi(H) \quad \forall T\in\mathscr{L}[L_0^\varphi(\Omega)],$$

ce qui prouve que $L_0^\varphi(H)$ est invariant par rapport à tous les endomorphismes continus de $L_0^\varphi(\Omega)$.

Remarque 6. Si φ est une fonction de Musielak–Orlicz sur un espace mesuré Ω de mesure σ-finie sans atome telle que $\varphi(t, x)$ est une fonction de t concave, les sous-espaces $L_0^\varphi(H)$ où H est un sous-ensemble mesurable de Ω héréditaire tel que $0<\mu(H)$ et $\mu(\Omega\setminus H)>0$ sont invariants pour tous les endomorphismes continus de l'espace $L_0^\varphi(\Omega)$.

Exemple 3. Soit

$$\varphi^0(t,x) = t^x \quad \text{pour } 0<x\leqslant 1 \text{ et } t\geqslant 0.$$

Nous savons que $\varphi_{x_1}^0 \prec \varphi_{x_2}^0$ si et seulement si $x_1\leqslant x_2$. φ^0 est une fonction de Musielak–Orlicz sur $]0, 1]$ telle que $\varphi^0(t, x)$ est une fonction de t concave pour tout x dans $]0, 1]$ et vérifiant les conditions C_0 et C_1 (cf. Exemple 1). Les seuls sous-espaces fermés non triviaux invariants pour tous les endomorphismes continus de $L_0^{\varphi^0}(]0, 1])$ sont de la forme $L_0^{\varphi^0}(]0, x])$ pour tout x tel que $0<x<1$.

Exemple 4. Si $p(x)$ est une fonction monotone définie sur $\boldsymbol{R}$ et à valeurs dans $]0, 1]$, posons

$$\varphi^1(t, x) = t^{p(x)}.$$

φ^1 est aussi une fonction de Musielak–Orlicz telle que $\varphi^1(t, x)$ est une fonction de t concave pour tout x dans $\boldsymbol{R}$. $\varphi_x^1 \prec \varphi_y^1$ si et seulement si $p(x)\leqslant p(y)$. Les sous-espaces $L_0^{\varphi^1}(]-\infty, x])$ et $L_0^{\varphi^1}([x, +\infty[)$ pour tout x dans $\boldsymbol{R}$ sont invariants par rapport à tous les endomorphismes continus de $L_0^{\varphi^1}(\boldsymbol{R})$ lorsque p est respectivement monotone croissante ou monotone décroissante.

Remerciements. Nous tenons à exprimer notre vive reconnaissance à Ph. Turpin de l'Université de Paris-Sud (Orsay) pour l'aide qu'il nous a apportée pendant l'élaboration de cette note. Nos vifs remerciement s'adressent également à J. Trzeciak, rédacteur aux Éditions Scientifiques Polonaises, pour avoir amelioré la rédaction de la note lors de la correction des épreuves.

Références

[1] N. Bourbaki, *Topologie Générale*, vol. I, Hermann, Paris 1971.
[2] L. Drewnowski and W. Orlicz, *A note on modular spaces. XI*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (11) (1968), 877–882.
[3] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand, Princeton 1950.
[4] N. J. Kalton, *Transitivity and quotients of Orlicz spaces*, Comment. Math., Tomus specialis in honorem Ladislai Orlicz, vol. I, 1978.
[5] N. J. Kalton and J. W. Roberts, *A rigid subspace of L_0*, Trans. Amer. Math. Soc. 266 (1981), 645–654.
[6] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1969.
[7] C. M. Marle, *Mesures et Probabilités*, Hermann, Paris 1974.
[8] J. Musielak and W. Orlicz, *Some remarks on modular spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (11) (1959), 661–668.
[9] —, —, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), 49–65.
[10] W. Orlicz, *On spaces of φ-integrable functions*, in: Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, Hebrew Univ. of Jerusalem, July 5–12, 1960, 357–365.
[11] H. L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan, 1963.
[12] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer, New York–Heidelberg–Berlin 1974.
[13] P. Turpin. *Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz non localement convexes*, Studia Math. 46 (1973), 153–165.
[14] —, *Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 131 (1976), 224 pp.
[15] —, *Conditions de bornitude et espaces de fonctions mesurables*, Studia Math. 56 (1976), 69–91.
[16] L. Waelbroeck, *Topological Vector Spaces and Algebras*, Lectures Notes in Math. 230, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1971.
[17] —, *A rigid topological vector space*, Studia Math. 59 (1977), 227–234.

THE UNIVERSITY OF ZAMBIA
LUSAKA CAMPUS, DEPARTMENT OF MATHEMATICS
P.O. Box 32379, Lusaka, Zambia

Received May 2, 1985