STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXIII. (1986)

Opérateurs pseudo-différentiels sur certains groupes totalement discontinus

par

L. SALOFF-COSTE (Paris)

Abstract. On certain disconnected groups we define pseudo-differential operators which generalize Fourier multipliers. We study the boundedness of such operators on L^p spaces. A result of symbolic calculus is obtained: contrary to the real case, the first commutator is infinitely regularizing. Those results were announced in [7] in the special case of a local field.

I. Introduction. Notations.

I.1. Dans ce travail, nous définissons et étudions des opérateurs pseudo-différentiels dans le cadre d'une classe de groupes abéliens localement compacts, précisée ci-dessous. Les résultats obtenus ont été annoncés dans [7] dans le cas particulier des corps locaux. Cet article est organisé de la façon suivante: au paragraphe II, nous donnons les principales définitions, celles des classes de symboles $S^m_{\varrho,\delta}$ et des opérateurs associés; les propriétés de continuité L^p sont étudiées, au paragraphe III pour la classe $S^0_{1,0}$, aux paragraphes V ($p = 2$) et VI pour les classes $S^m_{\varrho,\delta}$. Le paragraphe IV présente un résultat de calcul symbolique: contrairement au cas réel, le premier commutateur est indéfiniment régularisant.

I.2. Dans toute la suite G et Γ sont deux groupes abéliens duaux. Nous supposons que G est muni d'une suite strictement décroissante $\{G_n\}_{n\in\boldsymbol{Z}}$ de sous-groupes ouverts et compacts telle que:

(i) $\bigcup\limits_{n\in\boldsymbol{Z}} G_n = G, \quad \bigcap\limits_{n\in\boldsymbol{Z}} G_n = \{0\}$,

(ii) $\forall n\in\boldsymbol{Z} \quad 2 \leqslant [G_{n+1}: G_n] \leqslant \varkappa < +\infty$.

($[G_{n+1}: G_n]$ est le nombre de classes modulo G_{n+1} dans G_n).

G est localement compact et totalement discontinu. Nous choisissons sur G la mesure de Haar dx telle que $|G_0| = 1$ et nous posons $i_n = |G_n|^{-1}$ et $\varkappa_n = [G_{n+1}: G_n]$ de sorte que $i_{n+1} = \varkappa_n i_n$. Définissons alors, si $x\in G$, $x \neq 0$ et $x\in G_n\setminus G_{n+1}$, $|x| = |G_n|$ et $|0| = 0$. L'application $(x, y)\to |x-y|$ est une distance ultramétrique et définit la topologie de G. Soint Γ_n l'orthogonal de G_n. Les sous-groupes Γ_n de Γ sont ouverts et compacts et $[\Gamma_n: \Gamma_{n+1}] = \varkappa_n$, $|\Gamma_n| = i_n$. Posons, si $\xi\in\Gamma$, $\xi \neq 0$ et $\xi\in\Gamma_n\setminus\Gamma_{n-1}$, $|\xi| = |\Gamma_n|$ et $|0| = 0$. L'application $(\xi, \eta)\to|\xi-\eta|$ est une distance ultramétrique définissant la topologie de Γ. Pour $x\in G$ et $\xi\in\Gamma$, nous noterons (x, ξ) l'accouplement de dualité entre x et ξ.

I.3. Nous avons à notre disposition, en suivant l'étude faite dans [9] dans le cadre des corps locaux, la notion suivante de distribution sur G: $\mathcal{S}(G)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques des sous-groupes G_n. $\mathcal{S}(G)$ est dense dans $L^p(G)$ et l'injection canonique de $\mathcal{S}(G)$ dans $L^p(G)$ est continue pour $1 \leqslant p < +\infty$. $\mathcal{S}'(G)$ est le dual topologique de $\mathcal{S}(G)$ muni de la topologie faible. La transformation de Fourier est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(G)$ sur $\mathcal{S}(\Gamma)$ et de $\mathcal{S}'(G)$ sur $\mathcal{S}'(\Gamma)$.

I.4. Dans ce travail nous utiliserons à de nombreuses reprises des conditions de Lipschitz. Contrairement à ce qui se passe dans le cas réel, il n'est pas utile de faire appel à des différences d'ordre supérieur à un. Une fonction f appartenant à L^α est *lipschitzienne d'ordre* $\alpha > 0$ s'il existe une constante C telle que $|f(x+h)-f(x)| \leqslant C|h|^\alpha$ pour tout x et tout h dans G.

I.5. Nous posons $\tau_h f(x) = f(x+h)$, $\Delta_h f(x) = f(x+h)-f(x)$. Nous avons $\Delta_h(f\cdot g) = (\Delta_h f)g + (\tau_h f)(\Delta_h g)$. Nous posons $\max(r_1, r_2) = (r_1 \vee r_2)$ et $(1 \vee |x|) = \langle x\rangle$. Enfin pour $n \in \boldsymbol{Z}$ et $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$ définissons $[n\varrho]$ par $[n\varrho] \in \boldsymbol{Z}$ et $|G_{[n\varrho]}| > |G_n|^\varrho \geqslant |G_{[n\varrho]+1}|$.

II. Classes $S^m_{\varrho,\delta}$ et opérateurs associés.

II.1. Définition. $S(G)$ est l'espace des fonctions f telles que:

(i) pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ il existe une constante C_n vérifiant $|f(x)| \leqslant C_n \langle x\rangle^{-n}$;

(ii) pour tout $(\alpha, n) \in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ il existe une constante $C_{\alpha,n}$ vérifiant

$$\forall x \in G, \quad \forall h \in G, |h| \leqslant 1 \qquad |f(x+h)-f(x)| \leqslant C_{\alpha,n}|h|^\alpha \langle x\rangle^{-n}.$$

$S(G)$ muni des semi-normes associées à (i) et (ii) est un espace de Fréchet. $S(G)$ est dense dans L^p et l'injection canonique de $S(G)$ dans L^p est continue pour $1 \leqslant p < +\infty$. Son introduction est motivée par la propriété suivante:

II.2. Proposition. *La transformation de Fourier est un homéomorphisme de $S(G)$ sur $S(\Gamma)$.*

Preuve. Écrivons $\hat f(\xi) = \int f(x)\overline{(x, \xi)}\,dx$; nous avons

$$[(h, \xi)-1]\hat f(\xi) = \int [\Delta_h f(x)]\overline{(x, \xi)}\,dx,$$

d'où nous déduisons

$$(1) \qquad |(h, \xi)-1|\,|\hat f(\xi)| \leqslant C_n|h|^{n+1}.$$

De plus pour $|h| \leqslant 1$ et $|k| \leqslant 1$ nous avons aussi

$$[(h, \xi)-1]\,\Delta_k\hat f(\xi) = \int_G [\Delta_h f(x)]\,[\overline{(x, k)}-1]\,\overline{(x, \xi)}\,dx,$$

donc en utilisant $|(x, k)-1| \leqslant |x|^\alpha|k|^\alpha$ nous obtenons

$$(2) \qquad |(h, \xi)-1|\,|\Delta_k\hat f(\xi)| \leqslant C_{\alpha,n}|h|^{n+1}|k|^\alpha.$$

Le lemme suivant permet, en divisant par $|h|^{n+1}$, puis en intégrant sur $|h| \leqslant 1$ dans (1) et (2), d'obtenir (i) et (ii) pour $\hat f$.

II.3. Lemme. *Soit $\alpha > 0$, $p = 1$ ou 2. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in G$ vérifiant $|x| > i_n^{-1}$*

$$\frac{1}{C}|x|^\alpha \leqslant \int_{|\xi|\leqslant i_n} \frac{|(x, \xi)-1|^p}{|\xi|^{\alpha+1}}\,d\xi \leqslant C|x|^\alpha.$$

Preuve. Soit l tel que $|x| = |G_l|$; nous avons $l < n$. Montrons d'abord l'inégalité de droite:

$$\int_{|\xi|\leqslant i_n} \frac{|(x, \xi)-1|^p}{|\xi|^{\alpha+1}}\,d\xi = \int_{i_l\leqslant|\xi|\leqslant i_n} \frac{|(x, \xi)-1|^p}{|\xi|^{\alpha+1}}\,d\xi \leqslant 4\sum_{l<s} i_s^{-\alpha} \leqslant C i_l^{-\alpha} = C|x|^\alpha.$$

Occupons-nous maintenant de l'inégalité de gauche: puisque $l < n$, $\Gamma_{l+1}\setminus\Gamma_l \subset \Gamma_n$ et il existe $\xi \in \Gamma_{l+1}\setminus\Gamma_l$ tel que $|(x, \xi)-1| \geqslant \frac{1}{2}$. Notons que $\xi \to (x, \xi)$ est constante sur les translatés de Γ_l. Nous avons donc

$$\int_{|\xi|\leqslant i_n} \frac{|(x, \xi)-1|^p}{|\xi|^{\alpha+1}}\,d\xi \geqslant i_{l+1}^{-\alpha-1}\int_{\Gamma_{l+1}\setminus\Gamma_l} |(x, \xi)-1|^p\,d\xi \geqslant \tfrac{1}{4} i_{l+1}^{-\alpha-1}\, i_l \geqslant C\,i_l^{-\alpha} = C|x|^\alpha.$$

II.4. Définition. Soint m un réel, ϱ, δ deux réels positifs. Une fonction $\sigma(x, \xi)$ continue sur $G\times\Gamma$ appartient à $S^m_{\varrho,\delta}$ si elle vérifie:

(i) il existe une constante C telle que $|\sigma(x, \xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^m$,

(ii) $\forall(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta}$ telle que $\forall(x, \xi) \in G\times\Gamma$, $\forall h \in G$, $\forall k \in \Gamma$, $|k| < \langle\xi\rangle$

$$|\Delta_h^x \Delta_k^\xi \sigma(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}|h|^\alpha|k|^\beta\langle\xi\rangle^{m+\delta\alpha-\varrho\beta}.$$

Posons

$$N_{\alpha,\beta}(\sigma) = \sup_{h,x}\sup_{n\in\boldsymbol{Z}}\sup_{|k|<\langle\xi\rangle}\sup_{|\xi|=i_n}\left[\frac{|\Delta_h^x\Delta_k^\xi\sigma(x, \xi)|}{|h|^\alpha|k|^\beta}\langle\xi\rangle^{-m-\delta\alpha+\varrho\beta}\right].$$

$S^m_{\varrho,\delta}$ est muni de la topologie définie par les semi-normes $N_{\alpha,\beta}$; c'est un espace de Fréchet.

II.5. Définition. Notons T_σ l'opérateur défini sur $S(G)$ par

$$T_\sigma f(x) = \int_\Gamma \sigma(x, \xi)\hat f(\xi)(x, \xi)\,d\xi$$

lorsque $\sigma \in S^m_{\varrho,\delta}$.

Les définitions II.1 et II.4 sont motivées par:

II.6. Théorème. *Soit $\sigma \in S^m_{\varrho,\delta}$. L'opérateur T_σ est continu de $S(G)$ dans $S(G)$.*

La preuve reprend celle de la proposition II.2 et nous l'omettons.

III. Continuité L^p pour la classe $S^0_{1,0}$. La continuité L^p pour les opérateurs associés à la classe $S^0_{1,0}$ est une conséquence du théorème suivant concernant les multiplicateurs.

III.1. Théorème. *Soit $m \in L^\infty(\Gamma)$. Supposons qu'il existe des constantes B et ε strictement positives telles que pour tout $n \in \boldsymbol{Z}$*

$$\text{(i)} \qquad \int_{|\eta| < |\Gamma_n|} \int_{\xi \in \Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}} \frac{|m(\xi+\eta)-m(\xi)|^2}{|\eta|^{2+\varepsilon}} d\xi\, d\eta \leqslant B^2 |\Gamma_n|^{-\varepsilon}.$$

Alors T_m est borné sur $L^p(G)$, $1 < p < +\infty$.

Preuve. Il suffit de montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{S}(G)$ nous avons $\|T_m f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$ et pour cela il est suffisant de montrer ce résultat pour m remplacé par $m_N = m \mathbf{1}_{\Gamma_N}$ avec une constante C_p indépendante de $N \in \boldsymbol{N}$. En vertu du théorème 2.1 de [6], page 2, il nous suffit donc de prouver que si nous posons $K_N(x) = \check{m}_N(x)$, K_N vérifie, pour tout $N \in \boldsymbol{N}$ fixé, la condition

$$\text{(ii)} \qquad \forall y \in G_n \quad \int_{G \setminus G_n} |K_N(x-y) - K_N(x)|\, dx \leqslant B', \qquad \text{pour tout } n \in \boldsymbol{Z},$$

la constante B' étant indépendante de N. Nous allons en fait montrer que (i) implique (ii). Posons donc $K(x) = \int_\Gamma m(\xi)(x, \xi)\, d\xi$ et fixons $y \in G$. Nous avons

$$[\overline{(x, \eta)} - 1][\Delta_y K(x)] = \int_\Gamma \Delta_\eta [[(y, \xi) - 1] m(\xi)](x, \xi)\, d\xi.$$

Supposons que $|\eta||y| \leqslant 1$; alors $\Delta_\eta [(y, \xi) - 1] = 0$, donc

$$[\overline{(x, \eta)} - 1][\Delta_y K(x)] = \int_\Gamma [(y, \xi) - 1] \Delta_\eta m(\xi)(x, \xi)\, d\xi,$$

donc d'après la formule de Plancherel

$$\text{(1)} \qquad \int_G |(x, \eta) - 1|^2 |\Delta_y K(x)|^2\, dx = \int_\Gamma |(y, \xi) - 1|^2 |\Delta_\eta m(\xi)|^2\, d\xi.$$

Mais $(x, \eta) - 1 = 0$ si $|x||\eta| \leqslant 1$, donc si $|x| \leqslant |y|$, et $(y, \xi) - 1 = 0$ si $|y||\xi| \leqslant 1$, donc si $|\xi| \leqslant |\eta|$; (1) devient donc

$$\text{(2)} \qquad \int_{|x| > |y|} |(x, \eta) - 1|^2 |\Delta_y K(x)|^2\, dx = \int_{|\xi| > |y|^{-1}} |(y, \xi) - 1|^2 |\Delta_\eta m(\xi)|^2\, d\xi,$$

soit en divisant par $|\eta|^{2+\varepsilon}$ et en intégrant sur $|\eta| \leqslant |y|^{-1}$

$$\text{(3)} \qquad \int_{|x| > |y|} \left(\int_{|\eta| \leqslant |y|^{-1}} \frac{|(x, \eta) - 1|^2}{|\eta|^{2+\varepsilon}} d\eta \right) |\Delta_y K(x)|^2\, dx$$
$$\leqslant 2 \int_{|\eta| \leqslant |y|^{-1}} \int_{|\xi| > |y|^{-1}} \frac{|\Delta_\eta m(\xi)|^2}{|\eta|^{2+\varepsilon}} d\xi\, d\eta.$$

Nous avons d'autre part d'après le lemme II.3

$$\text{(4)} \qquad \int_{|\eta| \leqslant |y|^{-1}} \frac{|(x, \eta) - 1|^2}{|\eta|^{2+\varepsilon}} d\eta \geqslant \frac{1}{C} |x|^{1+\varepsilon} \qquad \text{si } |x| > |y|,$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\text{(5)} \qquad \int_{|x| > |y|} |K(x+y) - K(x)|\, dx \leqslant \Big(\int_{|x| > |y|} |x|^{-1-\varepsilon}\, dx \Big)^{1/2} \Big(\int_{|x| > |y|} |x|^{1+\varepsilon} |\Delta_y K(x)|^2\, dx \Big)^{1/2}.$$

D'après l'hypothèse (i) le second membre de (3) est majoré par $B^2 |y|^{+\varepsilon}$ et d'autre part

$$\int_{|x| > |y|} |x|^{-1-\varepsilon}\, dx \leqslant C |y|^{-\varepsilon}.$$

(3), (4) et (5) donnent donc

$$\int_{|x| > |y|} |K(x+y) - K(x)|\, dx \leqslant CB,$$

ce qui est la conclusion désirée.

III.2. Lemme. *Soit $\sigma \in S^0_{1,0}$ à support en x compact et de mesure 1. Il existe une constante C_p telle que $\|T_\sigma f\|_p \leqslant C_p \|f\|_p$, C_p ne dépendant que des semi-normes de σ dans $S^0_{1,0}$.*

Preuve. Écrivons $\hat{\sigma}(\zeta, \xi) = \int_G \sigma(x, \xi) \overline{(x, \zeta)}\, dx$. Nous avons

$$\text{(1)} \qquad [(h, \zeta) - 1] \Delta_k^\xi \hat{\sigma}(\zeta, \xi) = \int_G [\Delta_h^x \Delta_k^\xi \sigma(x, \xi)] \overline{(x, \zeta)}\, dx.$$

Pour $|h| \leqslant 1$ et $|k| < \langle \xi \rangle$ nous avons $|\Delta_h^x \Delta_k^\xi \sigma(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,N} |k|^\alpha |h|^{N+1} \langle \xi \rangle^{-\alpha}$, donc en utilisant le lemme II.3 comme en II.2

$$\text{(2)} \qquad \langle \zeta \rangle^N |\Delta_k^\xi \hat{\sigma}(\zeta, \xi)| \leqslant C_{\alpha,N} |k|^\alpha \langle \xi \rangle^{-\alpha}.$$

Il est facile de voir que (2) et le théorème III.1 entraînent que $\hat{\sigma}(\zeta, \xi)$ est un multiplicateur L^p de norme inférieure à $C_N \langle \zeta \rangle^{-N}$ pour tout $N > 0$. Nous avons de plus

$$(3)\qquad T_\sigma f(x) = \int_\Gamma (x, \zeta)\Big[\int_\Gamma \hat\sigma(\zeta, \xi)\hat f(\xi)(x, \xi)\,d\xi\Big]\,d\zeta,$$

donc en posant $1/p+1/q = 1$, $1 < p < +\infty$,

$$\|T_\sigma f\|_p^p \leqslant \Big(\int_\Gamma \langle\zeta\rangle^{-2}\,d\zeta\Big)^{p/q}\Big(\iint_{G\times\Gamma}\Big|\int_\Gamma \hat\sigma(\zeta, \xi)\,\langle\zeta\rangle^{2/q}\hat f(\xi)(x, \xi)\,d\xi\Big|^p\,dx\,d\zeta\Big),$$

ce qui donne enfin $\|T_\sigma f\|_p^p \leqslant C_p\|f\|_p^p\int\langle\zeta\rangle^{-N}\,d\zeta \leqslant C'_p\|f\|_p^p$.

III.3. Lemme. *Soit* $\sigma\in S^0_{1,0}$. *Il existe une fonction* $K(x, z)$ *telle que* $|K(x, z)| \leqslant C_N|z|^{-N}$ *pour* N *assez grand et qui vérifie*

$$T_\sigma f(x) = \int_G K(x, z)f(x-z)\,dz$$

pour toute fonction $f\in S(G)$ *nulle sur* $x+G_0$.

Preuve. Écrivons au sens des distributions $K(x, z) = \int_\Gamma \sigma(x, \xi)(z, \xi)\,d\xi$; nous avons

$$(1)\qquad [\overline{(z, k)}-1]\,K(x, z) = \int_\Gamma \Delta_k^\xi\sigma(x, \xi)(z, \xi)\,d\xi.$$

Mais puisque $|\Delta_k^\xi\sigma(x, \xi)| \leqslant C_N|k|^{N+1}\langle\xi\rangle^{-N-1}$ pour $|k| \leqslant 1$, (1) montre que $K(x, z)$ est une fonction pour z n'appartenant pas à G_0. De plus,

$$(2)\qquad |\overline{(z, k)}-1|\,|K(x, z)| \leqslant C_N|k|^{N+1}.$$

En divisant (2) par $|k|^{N+1}$ et en intégrant sur $|k| \leqslant 1$ nous obtenons, en utilisant encore le lemme II.3 pour $|z| > 1$, $|K(x, z)| \leqslant C_N|z|^{-N}$. Si f est nulle sur $x+G_0$, nous avons donc $T_\sigma f(x) = \int_G K(x, z)f(x-z)\,dz$. Le lemme III.3 est démontré.

III.4. Théorème. *Soit* $\sigma\in S^0_{1,0}$ *et* $1 < p < +\infty$. *Il existe une constante* C_p *telle que* $\|T_\sigma f\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$, $f\in S(G)$.

Preuve. Soit $(u_l)_{l\in\mathbf{N}}$ un système de représentants de G_0 dans G. Posons $\varphi_l(x) = \mathbf{1}_{G_0}(x-u_l)$ de sorte que $\sum_{l\in\mathbf{N}}\varphi_l \equiv 1$. Pour chaque entier positif l définissons $\sigma_l(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\,\varphi_l(\xi)$ et $f_1^l = f\cdot\varphi_l$ et écrivons $f = f_1^l+f_2^l$. Remarquons que

$$(1)\qquad \|T_\sigma f\|_p^p = \sum_{l\in\mathbf{N}}\|T_{\sigma_l} f\|_p^p.$$

D'après le lemme III.2 nous avons $\|T_{\sigma_l}f_1^l\|_p \leqslant C_p\|f_1^l\|_p$ et d'autre part $\sum_{l\in\mathbf{N}}\|f_1^l\|_p^p = \|f\|_p^p$. Nous obtenons donc

$$(2)\qquad \sum_{l\in\mathbf{N}}\|T_{\sigma_l}f_1^l\|_p^p \leqslant (C_p\|f\|_p)^p.$$

Utilisons maintenant le lemme III.3:

$$\|T_{\sigma_l}f_2^l\|_p^p = \int_G \varphi_l(x)\Big|\int_G K(x, z)f_2^l(x-z)\,dz\Big|^p\,dx$$

$$\leqslant C_N\int_G \varphi_l(x)\Big|\int_G \langle z\rangle^{-N}f_2^l(x-z)\,dz\Big|^p\,dx;$$

mais si $x\in u_l+G_0$, $\langle z-x\rangle = \langle z-u_l\rangle$, donc

$$\|T_{\sigma_l}f_2^l\|_p^p \leqslant C_N\Big(\int\frac{|f_2^l(z)|}{\langle z-u_l\rangle^N}\,dz\Big)^p \leqslant C'_{N,p}\int\frac{|f(z)|^p}{\langle z-u_l\rangle^N}\,dz$$

ce qui donne

$$(3)\qquad \sum_{l\in\mathbf{N}}\|T_{\sigma_l}f_2^l\|_p^p \leqslant C'_p\|f\|_p^p.$$

(1), (2) et (3) montrent que $\|T_\sigma f\|_p \leqslant C_p\|f\|_p$.

IV. Calcul symbolique: composé, transposé, adjoint. Le théorème II.6 nous permet de définir sur $S(G)$ l'opérateur $T_{\sigma_1}\circ T_{\sigma_2}$ pour σ_1 et σ_2 appartenant respectivement à $S^{m_1}_{\varrho,\delta}$ et $S^{m_2}_{\varrho,\delta}$. Le but de ce paragraphe est de montrer que $T_{\sigma_1}\circ T_{\sigma_2} = T_\sigma$ pour un certain symbole σ et de préciser si possible l'opérateur associé à $\sigma-\sigma_1\sigma_2$. Plus précisement, nous allons démontrer le théorème suivant:

IV.1. Théorème. *Soient* $\sigma_1\in S^{m_1}_{\varrho,\delta}$ *et* $\sigma_2\in S^{m_2}_{\varrho,\delta}$.

(a) *Si* $0 \leqslant \delta < \varrho \leqslant 1$ *ou* $0 \leqslant \delta \leqslant \varrho < 1$, $T_{\sigma_1}\circ T_{\sigma_2} = T_\sigma$ *avec* $\sigma\in S^{m_1+m_2}_{\varrho,\delta}$.

(b) *Si* $\delta = 0$ *et* $\varrho = 1$, *nous avons de plus* $\sigma-\sigma_1\sigma_2\in\bigcap_{m<0}S^m_{1,0}$.

Nous allons présenter maintenant plusieurs lemmes techniques utiles à la démonstration du théorème IV.I. Remarquons simplement qu'avec les notations ci-dessus le symbole σ est donné formellement par

$$\sigma(x, \xi) = \int_{G\times\Gamma}(x-y, \eta-\xi)\,\sigma_1(x, \eta)\,\sigma_2(y, \xi)\,dy\,d\eta.$$

IV.2. Lemme. *Soit* $\{\sigma_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *une suite bornée dans* $S^m_{\varrho,\delta}$ *convergeant point par point vers un symbole* σ *appartenant à* $S^m_{\varrho,\delta}$. *Pour toute fonction* f *de* $S(G)$, $T_{\sigma_i}f$ *converge vers* $T_\sigma f$ *dans* $S(G)$.

Preuve. Le théorème II.6 montre que la suite $\{T_{\sigma_i}f\}_{i\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $S(G)$ et le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $T_{\sigma_i}f(x)$ converge vers $T_\sigma f(x)$ point par point. $T_{\sigma_i}f$ converge donc vers $T_\sigma f$ dans $S(G)$.

Notons $\mathscr{C}_c$ l'espace des fonctions continues à support compact de $G\times\Gamma$ dans $\mathbf{C}$. Grâce au lemme précédent il nous suffira de montrer le théorème IV.1 en supposant σ_1 et σ_2 à support compact si nous montrons de plus que les applications

$$(\sigma_1, \sigma_2) \to \sigma \quad \text{de } (S^{m_1}_{\varrho,\delta} \cap \mathscr{C}_c) \times (S^{m_2}_{\varrho,\delta} \cap \mathscr{C}_c) \text{ dans } S^{m_1+m_2}_{\varrho,\delta},$$

$$(\sigma_1, \sigma_2) \to \sigma - \sigma_1 \sigma_2 \quad \text{de } (S^{m_1}_{1,0} \cap \mathscr{C}_c) \times (S^{m_2}_{1,0} \cap \mathscr{C}_c) \text{ dans } \bigcap_{m<0} S^m_{1,0},$$

sont continues ($\bigcap_{m<0} S^m_{1,0}$ est muni de la topologie limite inductive).

IV.3. Lemme. *Soient m et α deux réels. Il existe des constantes C_1 et C_2 telles que, quel que soit l'entier n (rappelons que $i_n = |G_n|^{-1}$):*

(1) *si $\alpha > 1$, $\int_G (1 \vee i_n|x|)^{-\alpha} dx \leqslant C_1 i_n^{-1}$;*

(2) *si α est assez grand,*

$$\int_G \frac{(1 \vee i_n|x|)^m}{(1 \vee i_n|y-x|)^\alpha} dx \leqslant C_2 i_n^{-1} (1 \vee i_n|y|)^m.$$

Preuve. (1) est obtenu par un calcul immédiat. Pour démontrer (2) il suffit de remarquer que:

$$\text{si } m \geqslant 0, \quad \left[\frac{(1 \vee i_n|x+y|)}{(1 \vee i_n|x|)}\right]^m \leqslant (1 \vee i_n|y|)^m;$$

$$\text{si } m < 0, \quad |x| < |y| \Rightarrow |x+y| = |y|;$$

$$|x| \geqslant |y| \Rightarrow (1 \vee i_n|x|)^m \leqslant (1 \vee i_n|y|)^m.$$

IV.4. Lemme. *Soient $0 \leqslant \delta < \varrho \leqslant 1$ ou $0 \leqslant \delta \leqslant \varrho < 1$ et*

$$\theta(x, \xi) = \int_{G \times \Gamma} (x-y, \eta-\xi) b(x, y, \xi, \eta) dy\, d\eta$$

où b est à support compact en y et η et vérifie:

(i) $|b(x, y, \xi, \eta)| \leqslant C \langle\eta\rangle^{m_1} \langle\xi\rangle^{m_2}$,

(ii) $|\Delta^y_h \Delta^\eta_k b(x, y, \xi, \eta)| \leqslant C_{\alpha,\beta} |h|^\alpha |k|^\beta \langle\eta\rangle^{m_1-\varrho\beta} \langle\xi\rangle^{m_2+\delta\alpha}$ *pour $h \in G$, $k \in \Gamma$, $|k| < \langle\xi\rangle$, $\alpha \in \mathbf{N}$ et $\beta \in \mathbf{N}$.*

Alors $|\theta(x, \xi)| \leqslant C' \langle\xi\rangle^{m_1+m_2}$ et la constante C' ne dépend que d'un nombre fini des constantes $C_{\alpha,\beta}$ et ne dépend pas des mesures des supports de b en y et η.

Preuve. Introduisons les notations:

$$D^\alpha_n f(x) = |G_n|^\alpha \int_G \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{|h|^{\alpha+1}} dh, \qquad \square^\alpha_n = 1 + D^\alpha_n,$$

$$R^\alpha_n(\xi) = 1 + |G_n|^\alpha \int_{G_n} \frac{|(h, \xi) - 1|^2}{|h|^{\alpha+1}} dh.$$

(Nous considérons les notations ci-dessus données pour un groupe G quelconque muni d'une suite de sous-groupes $\{G_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$; en particulier nous les utiliserons pour Γ). Remarquons que:

– si f et g sont suffisamment régulières, l'une étant à support compact,

$$\int (\square^\alpha_n f(x)) g(x) dx = \int f(x) (\square^\alpha_n g(x)) dx; \tag{1}$$

– d'après le lemme II.3 il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C}(1 \vee |G_n|\,|\xi|)^\alpha \leqslant R^\alpha_n(\xi) \leqslant C(1 \vee |G_n|\,|\xi|)^\alpha; \tag{2}$$

– si nous posons $L = (x-y, \eta-\xi)$, nous avons

$$\square^{y,\alpha}_n \square^{\eta,\alpha}_n (L) = R^\alpha_n(\eta-\xi) R^\alpha_n(x-y) L. \tag{3}$$

Écrivons à présent $\theta = \theta_1 + \theta_2$ avec $\theta_1(x, \xi) = \int L b_1(x, y, \xi, \eta) dy\, d\eta$ où $b_1 = b$ si $|\eta| \geqslant \langle\xi\rangle$ et $b_1 = 0$ si $|\eta| < \langle\xi\rangle$. Si $\langle\xi\rangle = i_n$, posons $n' = [n\varrho] \geqslant 0$. Utilisons (1) et (3) pour obtenir

$$\theta_1(x, \xi) = \int [R^\alpha_{n'}(x-y) R^\alpha_{n'}(\eta-\xi)]^{-1} L \square^{y,\alpha}_{n'} \square^{\eta,\alpha}_{n'} (b_1(x, y, \xi, \eta)) dy\, d\eta. \tag{4}$$

(Nous utilisons: $\tau_h R^\alpha_{n'}(x-y) = R^\alpha_{n'}(x-y)$ si $h \in G_{n'}$). Remarquons que $\square^{y,\alpha}_{n'} \square^{\eta,\alpha}_{n'} (b_1) = 0$ dès que $|\eta| < \langle\xi\rangle$. Nous voyons donc en utilisant les hypothèses (i) et (ii) que $\square^{y,\alpha}_{n'} \square^{\eta,\alpha}_{n'} (b_1)$ est la somme de quatre termes pour lesquels nous avons les majorations suivantes:

$$\begin{aligned}
&|b_1(x, y, \xi, \eta)| \leqslant C \langle\eta\rangle^{m_1} \langle\xi\rangle^{m_2},\\
&\left|D^{y,\alpha}_{n'}(b_1(x, y, \xi, \eta))\right| \leqslant C_\alpha |G_{n'}|^\alpha \langle\eta\rangle^{m_1} \langle\xi\rangle^{m_2+\delta\alpha} \leqslant C_\alpha \langle\eta\rangle^{m_1} \langle\xi\rangle^{m_2+(\delta-\varrho)\alpha},\\
&\left|D^{\eta,\alpha}_{n'}(b_1(x, y, \xi, \eta))\right| \leqslant C_\alpha |\Gamma_{n'}|^\alpha \langle\eta\rangle^{m_1-\varrho\alpha} \langle\xi\rangle^{m_2} \leqslant C_\alpha \langle\eta\rangle^{m_1-\varrho\alpha} \langle\xi\rangle^{m_2+\varrho\alpha},\\
&\left|D^{y,\alpha}_{n'} D^{\eta,\alpha}_{n'}(b_1(x, y, \xi, \eta))\right| \leqslant C_\alpha \langle\eta\rangle^{m_1-\varrho\alpha} \langle\xi\rangle^{m_2+\delta\alpha}.
\end{aligned} \tag{5}$$

En tenant compte de (5) et (2) dans l'égalité (4) et en utilisant IV.3 nous obtenons, en choisissant α assez grand,

$$|\theta_1(x, \xi)| \leqslant C \langle\xi\rangle^{m_1+m_2}. \tag{6}$$

(Nous avons utilisé l'hypothèse $\delta \leqslant \varrho$).

Nous pouvons maintenant nous occuper de

$$\theta_2(x, \xi) = \int_{G \times \Gamma} L b_2(x, y, \xi, \eta) dy\, d\eta$$

où $b_2 = 0$ dès que $|\eta| \geqslant \langle\xi\rangle$. Écrivons

$$\theta_2(x, \xi) = \int [R^\alpha_0(x-y) R^\alpha_0(\eta-\xi)]^{-1} L \square^{y,\alpha}_0 \square^{\eta,\alpha}_0 (b_2(x, y, \xi, \eta)) dy\, d\eta. \tag{7}$$

Cette fois-ci $\square^{y,\alpha}_0 \square^{\eta,\alpha}_0 b_2$ vérifie

$$\left|\square^{y,\alpha}_0 \square^{\eta,\alpha}_0 (b_2(x, y, \xi, \eta))\right| \leqslant C_\alpha \langle\xi\rangle^{m_2+\delta\alpha} \langle\eta\rangle^{m_1} \tag{8}$$

et nous obtenons en utilisant (7), (2) et (8)

$$|\theta_2(x,\xi)| \leqslant C_\alpha \int_{|\eta|<\langle\xi\rangle} \langle \eta-\xi\rangle^{-\alpha} \langle\xi\rangle^{m_2+\delta\alpha} \langle\eta\rangle^{m_1} d\eta,$$

soit compte tenu du fait que $\langle\eta-\xi\rangle = \langle\xi\rangle$ puisque $|\eta| < \langle\xi\rangle$

$$(9) \qquad \begin{aligned} |\theta_2(x,\xi)| &\leqslant C_\alpha \langle\xi\rangle^{-(1-\delta)\alpha+1+m_2} \langle\xi\rangle^{m_1} \quad && \text{si } m_1 \geqslant 0, \\ |\theta_2(x,\xi)| &\leqslant C_\alpha \langle\xi\rangle^{-(1-\delta)\alpha+1+m_2} && \text{si } m_1 < 0. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que, $1-\delta$ étant strictement positif, nous pouvons choisir α assez grand pour que

$$(10) \qquad |\theta_2(x,\xi)| \leqslant C \langle\xi\rangle^{m_1+m_2}.$$

Les inégalités (6) et (10) montrent que $|\theta(x,\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{m_1+m_2}$ et le lemme IV.4 est donc démontré.

IV.5. Preuve du théorème IV.1. D'après le lemme IV.2 et la remarque qui le suit, nous pouvons nous contenter de démontrer le théorème IV.1 en supposant σ_1 et σ_2 à support compact. Nous avons alors $T_{\sigma_1} \circ T_{\sigma_2} = T_\sigma$ avec

$$(1) \qquad \sigma(x,\xi) = \int_{G\times\Gamma} (x-y,\eta-\xi)\,\sigma_1(x,\eta)\,\sigma_2(y,\xi)\,dy\,d\eta$$

et nous pouvons utiliser le lemme IV.4 pour obtenir

$$(2) \qquad |\sigma(x,\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{m_1+m_2}.$$

Il reste à étudier les différences $\Delta_h^x \Delta_k^\xi \sigma(x,\xi)$. Pour cela posons $\nabla_h^{x,\alpha} = \Delta_h^x/|h|^\alpha$ et calculons en utilisant (1) et les notations $L = (x-y, \eta-\xi)$ et $b(x,y,\xi,\eta) = \sigma_1(x,\eta)\,\sigma_2(y,\xi)$:

$$\nabla_h^{x,\alpha}\sigma(x,\xi) = \int_{G\times\Gamma} [b\,\nabla_h^{x,\alpha} L + (\tau_h^x L)(\nabla_h^{x,\alpha} b)]\,dy\,d\eta,$$

donc

$$\nabla_h^{x,\alpha}\sigma(x,\xi) = \int_{G\times\Gamma} L[\nabla_h^{y,\alpha} b + \nabla_h^{x,\alpha}\tau_h^y b]\,dy\,d\eta.$$

De même

$$\nabla_k^{\xi,\beta}\,\nabla_h^{x,\alpha}\sigma(x,\xi) = \int_{G\times\Gamma} L[(\nabla_k^{\eta,\beta} + \nabla_k^{\xi,\beta}\tau_k^\eta)(\nabla_h^{y,\alpha} + \nabla_h^{x,\alpha}\tau_h^y)\,b]\,dy\,d\eta.$$

Posons $b' = (\nabla_k^{\eta,\beta} + \nabla_k^{\xi,\beta}\tau_k^\eta)(\nabla_h^{y,\alpha} + \nabla_h^{x,\alpha}\tau_h^y)\,b$ et reprenons la preuve du lemme IV.4 pour b'. Nous obtenons

$$(3) \qquad |\nabla_k^{\xi,\beta}\,\nabla_h^{x,\alpha}\sigma(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{m_1+m_2-\varrho\beta+\delta\alpha}$$

pour $h \in G$ et $k \in \Gamma$, $|k| < \langle\xi\rangle$.

Les inégalités (2) et (3) montrent que σ appartient à $S_{\varrho,\delta}^{m_1+m_2}$. La partie (a) du théorème IV.1 est démontrée.

Pour démontrer (b) supposons encore σ_1 et σ_2 à support compact. Il reste à montrer que $\tau = \sigma - \sigma_1\sigma_2$ appartient à $S_{1,0}^m$ pour tout $m < 0$. Nous avons

$$\tau(x,\xi) = \int_{G\times\Gamma} L[\sigma_1(x,\eta) - \sigma_1(x,\xi)]\,\sigma_2(y,\xi)\,dy\,d\eta.$$

En procédant comme en IV.4 nous pouvons écrire

$$(4) \qquad \tau(x,\xi) = \int_{G\times\Gamma} [R_0^\alpha(\eta-\xi)\,R_0^\alpha(x-y)]^{-1} L\,\square_0^{y,\alpha}\,\square_0^{\eta,\alpha}([\sigma_1(x,\eta) - \sigma_1(x,\xi)]\,\sigma_2(y,\xi))\,dy\,d\eta.$$

Nous pouvons supposer que m_1 est positif et nous avons alors pour tout M assez grand tel que $m_1 - M$ soit strictement négatif

$$(5) \qquad |\sigma_1(x,\eta) - \sigma_1(x,\xi)| \leqslant C_M |\eta-\xi|^M \langle\eta\rangle^{m_1-M}.$$

En effet, si $|\eta-\xi| \leqslant \langle\eta\rangle$, cette inégalité provient de ce que σ_1 appartient à $S_{1,0}^{m_1}$. Si $|\eta-\xi| > \langle\eta\rangle$, alors $|\eta-\xi| = \langle\xi\rangle$ et $\langle\xi\rangle > \langle\eta\rangle$, donc $|\sigma_1(x,\eta) - \sigma_1(x,\xi)| \leqslant 2C\langle\xi\rangle^{m_1}$ puisque $\sigma_1 \in S_{1,0}^{m_1}$ et $m_1 \geqslant 0$, soit

$$|\sigma_1(x,\eta) - \sigma_1(x,\xi)| \leqslant 2C|\eta-\xi|^M \langle\xi\rangle^{m_1-M}$$

et a fortiori

$$|\sigma_1(x,\eta) - \sigma_1(x,\xi)| \leqslant 2C|\eta-\xi|^M \langle\eta\rangle^{m_1-M}$$

car $m_1 - M < 0$. Nous avons aussi pour $|h| \leqslant 1$ et $|k| \leqslant 1$ et $M > 0$

$$(6) \qquad |\nabla_k^{\eta,\alpha}\,\nabla_h^{y,\beta}([\sigma_1(x,\eta) - \sigma_1(x,\xi)]\,\sigma_2(y,\xi))| \leqslant C\langle\eta\rangle^{m_1-M}\langle\xi\rangle^{m_2}$$

en remarquant que si $|h| \leqslant 1$ et $M \geqslant \alpha$, $|\nabla_h^M f(x)| \geqslant |\nabla_h^\alpha f(x)|$. (4), (5) et (6) montrent que pour M assez grand

$$(7) \qquad |\tau(x,\xi)| \leqslant C_M \langle\xi\rangle^{m_1+m_2-M}.$$

D'autre part nous savons que $\tau = \sigma - \sigma_1\sigma_2$ appartient à $S_{1,0}^{m_1+m_2}$ et ce résultat combiné avec (7) suffit à montrer que $\tau \in \bigcap_{m<0} S_{1,0}^m$. Le théorème IV.1 est donc entièrement démontré.

IV.6. En vertu du théorème II.6, nous pouvons terminer ce paragraphe par un théorème concernant l'adjoint et le transposé de l'opérateur T_σ, $\sigma \in S_{\varrho,\delta}^m$. Puisque T_σ envoie $S(G)$ dans $S(G)$, nous pouvons définir T_σ^* et T_σ' par:

$$\forall f \in S(G) \text{ et } \forall g \in S(G) \qquad \int_G (T_\sigma^* f)\,\bar{g} = \int_G f\,\overline{(T_\sigma g)},$$

$$\forall f \in S(G) \text{ et } \forall g \in S(G) \qquad \int_G (T_\sigma' f)\,g = \int_G f\,(T_\sigma' g).$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

IV.7. THÉORÈME. *Soit* $\sigma \in S^m_{\varrho,\delta}$.

(a) *Si* $0 \leqslant \delta < \varrho \leqslant 1$ *ou* $0 \leqslant \delta \leqslant \varrho < 1$, $T_\sigma^* = T_{\sigma^*}$ *avec* $\sigma^* \in S^m_{\varrho,\delta}$ *et* $T'_\sigma = T_{\sigma'}$ *avec* $\sigma' \in S^m_{\varrho,\delta}$.

(b) *Si* $\delta = 0$ *et* $\varrho = 1$, $\sigma^* - \bar\sigma$ *et* $\sigma' - \sigma$ *appartiennent à* $\bigcap_{m<0} S^m_{1,0}$.

Preuve. Il suffit de remarquer que par exemple pour T_σ^* nous avons formellement

$$\sigma^*(x, \xi) = \int_{G \times \Gamma} (y-x, \eta-\xi)\,\bar\sigma(y, \eta)\,dy\,d\eta$$

et de reprendre la démonstration du théorème IV.1.

V. Continuité L^2 pour $S^0_{\varrho,\delta}$. Ce paragraphe est constitué des démonstrations de la continuité L^2 pour les opérateurs associés aux symboles des classes $S^0_{\varrho,\delta}$. Dans le cas réel ce sont les résultats obtenus par A. Calderón et R. Vaillancourt dans [2]. Les démonstrations que nous donnons suivent celles du cadre réel et en particulier reposent sur le lemme de Cotlar–Stein que nous rappelons ci-dessous.

V.1. LEMME. *Soit* $\{a_{ij}\}_{(i,j)\in J\times J}$ *une famille de nombres positifs vérifiant :* $\forall j \in J\ \sum_i a_{ij} \leqslant A$ *et* $\forall i \in J\ \sum_j a_{ij} \leqslant A$. *Supposons que* $\{T_j\}_{j\in J}$ *soit une famille d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert* $\mathscr{H}$ *telle que*

$$\|T_i^* T_j\| \leqslant a_{ij}^2 \quad \text{et} \quad \|T_i T_j^*\| \leqslant a_{ij}^2.$$

Alors quelle que soit la partie finie I *de* J, $\|\sum_{i\in I} T_i\| \leqslant A$.

Nous renvoyons le lecteur à [4] pour la démonstration de ce lemme.

V.2. THÉORÈME. *Soit* $\sigma \in S^0_{0,0}$. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que quelle que soit* f *appartenant à* $S(G)$, $\|T_\sigma f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$.

Preuve. Nous allons utiliser le lemme V.1. Pour cela, introduisons $\{u_i\}_{i\in N}$, une famille de représentants de Γ_0 dans Γ, et $\varphi_i(\xi) = \mathbf{1}_{\Gamma_0}(\xi - u_i)$. Posons $\sigma_i(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\,\varphi_i(\xi)$ et $T_i = T_{\sigma_i}$; nous avons $T_\sigma f = \sum_{i\in N} T_i f$ formellement. Remarquons que l'on peut écrire

$$T_i f(x) = \int_\Gamma \sigma_i(x, \xi)\hat f(\xi)(x, \xi)\,d\xi \tag{1}$$

ou encore

$$T_i f(x) = \int_{G\times\Gamma} \sigma_i(x, \xi) f(y)(x-y, \xi)\,dy\,d\xi, \tag{2}$$

ce qui montre que $T_i^* f(x) = \int_{G\times\Gamma} \bar\sigma_i(y, \xi) f(y)\overline{(y-x, \xi)}\,dy\,d\xi$, c'est-à-dire

$$T_i^* f = \Big(\int_G \bar\sigma_i(y, \xi) f(y)\overline{(y, \xi)}\,dy\Big)^{\check{}},$$

soit

$$(T_i^* f)\hat{}\,(\xi) = \int_G \bar\sigma_i(y, \xi) f(y)\overline{(y, \xi)}\,dy. \tag{3}$$

Remarquons que (1) et (3) montrent que $T_i T_j^* f \equiv 0$ si $i \neq j$. Pour pouvoir appliquer le lemme V.1 nous avons donc à majorer correctement $\|T_i^* T_j\|$. Nous reprenons les notations $\square_0^\alpha$ et R_0^α introduites en IV.4.

Commençons par majorer $\|T_i\|$. Transformons l'égalité (2) comme en IV.4 en utilisant IV.4 (1) et IV.4(3) pour obtenir

$$T_i f(x) = \int_{G\times\Gamma} (x-y, \xi)\,[R_0^\alpha(x-y)]^{-1}\,\sigma_i^\alpha(x, \xi) f(y)\,dy\,d\xi$$

où $\sigma_i^\alpha = \square_0^{\xi,\alpha}\sigma_i(x, \xi)$. Nous savons par hypothèse que $|\sigma_i^\alpha(x, \xi)| \leqslant C_\alpha$ et que le support de σ_i^α en ξ est de mesure 1. Posons

$$K_i(x, y) = [R_0^\alpha(x-y)]^{-1}\int_\Gamma \sigma_i^\alpha(x, \xi)(x-y, \xi)\,d\xi,$$

de sorte que

$$T_i f(x) = \int_G K_i(x, y) f(y)\,dy$$

avec $|K_i(x, y)| \leqslant C_\alpha\langle x-y\rangle^{-\alpha}$ (en utilisant IV.4 (2)) et donc en choisissant α assez grand

$$\|T_i\| \leqslant C. \tag{4}$$

Passons à $\|T_i^* T_j\|$. Nous pouvons écrire d'après (2)

$$T_i^* T_j f(x) = \int_{(G\times\Gamma)^2} \bar\sigma_i(z, \xi)\,\sigma_j(z, \eta) f(y)\overline{(z-x, \xi)}(z-y, \eta)\,dy\,d\eta\,dz\,d\xi.$$

Nous en déduisons comme ci-dessus

$$T_i^* T_j f(x) = \int \square_0^{z,\beta}\big[\bar\sigma_i^\alpha(z, \xi)\,\sigma_j^\alpha(z, \eta)\big(R_0^\alpha(x-z)\,R_0^\alpha(z-y)\big)^{-1}\big]$$
$$\times [R_0^\beta(\eta-\xi)]^{-1} f(y)(x-z, \xi)(z-y, \eta)\,dy\,d\eta\,dz\,d\xi.$$

Remarquons que

$$\square_0^{z,\beta}[\bar\sigma_i^\alpha\sigma_j^\alpha(R_0^\alpha R_0^\alpha)^{-1}] = [R_0^\alpha R_0^\alpha]^{-1}\,\square_0^{z,\beta}(\bar\sigma_i^\alpha\sigma_j^\alpha)$$

car R_0^α est constante sur les translatés de G_0 dans G. Posons donc

$$K_{ij}(x, y) = \int_{G\times\Gamma\times\Gamma} [R_0^\alpha(x-z)\,R_0^\beta(z-y)\,R_0^\beta(\eta-\xi)]^{-1}\,\square_0^{z,\beta}[\bar\sigma_i^\alpha(z, \xi)\,\sigma_j^\alpha(z, \eta)]$$
$$\times (x-z, \xi)(z-y, \eta)\,dz\,d\eta\,d\xi.$$

Par hypothèse nous avons $|\square_0^{z,\beta}[\bar\sigma_i^\alpha(z, \xi)\,\sigma_j^\alpha(z, \eta)]| \leqslant C_{\alpha,\beta}$ et nous obtenons (en utilisant IV.4 (2))

$$|K_{ij}(x,y)| \leqslant C_{\alpha,\beta} \int\limits_{z\in G, \xi\in u_i+\Gamma_0, \eta\in u_j+\Gamma_0} \langle x-z\rangle^{-\alpha} \langle z-y\rangle^{-\alpha} \langle \xi-\eta\rangle^{-\beta}\, dz\, d\eta\, d\xi.$$

Notons que $\int\limits_G \langle a-b\rangle^{-\alpha} \langle b\rangle^{-\alpha} db \leqslant C_\alpha \langle a\rangle^{-\alpha}$; nous obtenons

$$(5) \qquad |K_{ij}(x,y)| \leqslant C_{\alpha,\beta} \langle u_i-u_j\rangle^{-\beta} \langle x-y\rangle^{-\alpha}.$$

Choisissons $\alpha > 1$ et $\beta > 2$. De (5) nous déduisons alors

$$(6) \qquad \|T_i^* T_j\| \leqslant C \langle u_i-u_j\rangle^{-\beta}.$$

Les inégalités (4) et (6) permettent alors d'appliquer le lemme V.1 avec $a_{ij} = C\langle u_i-u_j\rangle^{-\beta/2}$ puisque nous avons

$$\sum_{j\in\mathbf{N}} \langle u_i-u_j\rangle^{-\beta/2} = \int\limits_G \langle u_i-u\rangle^{-\beta/2} du = \int\limits_G \langle u\rangle^{-\beta/2} du \leqslant A.$$

Nous savons donc que $\|\sum_{i\leqslant r} T_i\| \leqslant A$, A indépendant de r; d'autre part, $\sum_{i\leqslant r} T_i f$ converge vers $T_\sigma f$ dans $S(G)$, donc $\|T_\sigma f\|_2 \leqslant A\|f\|_2$ pour $f\in S(G)$, ce qui est la conclusion désirée.

V.3. Théorème. *Soit* $\sigma\in S^0_{\varrho,\varrho}$, $0<\varrho<1$. *Il existe une constante* $C>0$ *telle que quelle que soit* f *appartenant à* $S(G)$, $\|T_\sigma f\|_2 \leqslant C\|f\|_2$.

Remarquons tout d'abord que la continuité L^2 des opérateurs associés aux symboles $S^0_{\varrho,\delta}$ avec $0\leqslant\delta<\varrho\leqslant 1$ ou $0\leqslant\delta\leqslant\varrho<1$ se ramène aux cas $0\leqslant\delta=\varrho<1$. Nous connaissons le résultat pour $S^0_{0,0}$ et nous allons traiter le cas $0<\varrho=\delta<1$.

Preuve. L'idée est la même que pour le cas $S^0_{0,0}$, c'est-à-dire un découpage de σ et l'utilisation du lemme V.1. Le découpage est cependant différent: découpons d'abord Γ en couronnes $\{|\xi| = |\Gamma_n|\} = \Gamma\setminus\Gamma_{n-1}$ pour $n\geqslant 1$, puis chaque couronne de la façon suivante:

$$\Gamma_n\setminus\Gamma_{n-1} \text{ est découpée en classes modulo } \Gamma_{[\varrho n]}.$$

Enfin, numérotons de façon quelconque les fonctions caractéristiques des ensembles obtenus: $\{\psi_j\}_{j\in\mathbf{N}^*}$. Nous avons

$$\psi_j(\xi) = \mathbf{1}_{\Gamma_{[\varrho n_j]}}(\xi-\xi_{n_j}),\ j\geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \psi_0 = \mathbf{1}_{\Gamma_0}.$$

Remarquons que $\sum_{j\in\mathbf{N}} \psi_j \equiv 1$ et que le support de ψ_j a pour mesure $|\Gamma_{[\varrho n_j]}|$. Posons $\sigma_j(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\psi_j(\xi)$:

$$(1) \qquad T_i f(x) = T_{\sigma_i} f(x) = \int \sigma_i(x,\xi) f(y)(x-y,\xi)\, dy\, d\xi,$$

$$(2) \qquad T_i^* f(x) = \int \bar\sigma_i(y,\xi) f(y)\overline{(y-x,\xi)}\, dy\, d\xi.$$

Nous obtenons comme au théorème V.2, $T_i T_j^* \equiv 0$ dès que $j\neq i$. Nous nous concentrons donc sur $\|T_i^* T_j\|$ et d'abord sur $\|T_j\|$: utilisons encore une fois les notations $\Box_n^\alpha$ et R_n^α introduites en IV.4 et pour un entier n quelconque posons $n' = [n\varrho]$. Notons enfin $\sigma_j^\alpha(x,\xi) = \Box_{n_j'}^{\xi;\alpha} \sigma_j(x,\xi)$. Nos hypothèses se traduisent par:

$$(3) \qquad \begin{array}{l} |\sigma_j^\alpha(x,\xi)| \leqslant C_\alpha, \\ \text{le support de } \sigma_j^\alpha(x,\xi) \text{ en } \xi \text{ est de mesure } |\Gamma_{n_j'}|. \end{array}$$

Nous obtenons enfin

$$T_j f(x) = \int\limits_{G\times\Gamma} \sigma_j^\alpha(x,\xi)[R^\alpha_{n_j'}(x-y)]^{-1} f(y)(x-y,\xi)\, dy\, d\xi,$$

c'est-à-dire

$$T_j f(x) = \int\limits_G K_j(x,y) f(y)\, dy \qquad \text{avec}$$

$$K_j(x,y) = [R^\alpha_{n_j'}(x-y)]^{-1} \int\limits_\Gamma \sigma_j^\alpha(x,\xi)(x-y,\xi)\, d\xi$$

D'après (3) nous avons $|K_j(x,y)| \leqslant C_\alpha|\Gamma_{n_j'}|(1 \vee |\Gamma_{n_j'}|\,|x-y|)^{-\alpha}$. Le lemme IV.3 donne alors pour $\alpha>1$ fixé

$$(4) \qquad \|T_j\| \leqslant C|\Gamma_{n_j'}|\,|\Gamma_{n_j'}|^{-1} \leqslant C.$$

Passons à $\|T_i^* T_j\|$. Nous avons comme en V.2

$$T_i^* T_j f(x) = \int\limits_{(G\times\Gamma)^2} \Box_0^{z,\beta}\big[\bar\sigma_i^\alpha(z,\xi)\sigma_j^\alpha(z,\eta)\big(R^\alpha_{n_i'}(x-z)R^\alpha_{n_j'}(z-y)\big)^{-1}\big] \times [R_0^\beta(\xi-\eta)]^{-1} f(y)(x-z,\xi)(z-y,\eta)\, dy\, d\eta\, dz\, d\xi,$$

c'est-à-dire $T_i^* T_j f(x) = \int\limits_G K_{ij}(x,y) f(y)\, dy$ avec

$$(5) \qquad |K_{ij}(x,y)| \leqslant \int\limits_{G\times\Gamma\times\Gamma} C_\beta\big|\Box_0^{z,\beta}\big[\bar\sigma_i^\alpha(z,\xi)\sigma_j^\alpha(z,\eta)\big(R^\alpha_{n_i'}(x-z)R^\alpha_{n_j'}(z-y)\big)^{-1}\big]\big| \times \langle\xi-\eta\rangle^{-\beta}\, dz\, d\eta\, d\xi.$$

Il nous faut obtenir une majoration de $|\Box_0^{z,\beta}[\ ]|$. Par hypothèse nous avons pour $h\in G$, $|h|\leqslant 1$,

$$(6) \qquad |\Delta_h^z[\bar\sigma_i^\alpha(z,\xi)\sigma_j^\alpha(z,\eta)]| \leqslant C_{\alpha,\beta}|h|^\beta \max(|\Gamma_{n_i}|^{\varrho\beta}, |\Gamma_{n_j}|^{\varrho\beta}).$$

D'autre part, si nous tenons compte du fait que $[R^\alpha_{n_i'}(x-z)R^\alpha_{n_j'}(z-y)]^{-1}$ est une fonction de z constante sur les translatés de $G_{\max(n_i',n_j')}$, une simple observation montre que pour $|h|\leqslant 1$

$$(7) \qquad |\Delta_h^z([R^\alpha_{n_i'}(x-z)R^\alpha_{n_j'}(z-y)]^{-1})| \leqslant C_{\alpha,\beta}|h|^\beta[\max(|\Gamma_{n_i'}|, |\Gamma_{n_j'}|)]^\beta[R^\alpha_{n_i'}(\ )R^\alpha_{n_j'}(\ )]^{-1}.$$

Les inégalités (6) et (7) montrent que la fonction $|\square_0^{z,\beta}[\ ]|$ à support en ξ égal à $\operatorname{supp}\psi_i$ et à support en η égal à $\operatorname{supp}\psi_j$ est majorée par

$$C_{\alpha,\beta}\max(|\Gamma_{n_i}|^{\varrho\beta}, |\Gamma_{n_j}|^{\varrho\beta})\,[R^{\alpha}_{n'_i}(x-z)\,R^{\alpha}_{n'_j}(z-y)]^{-1}.$$

Reportons cette majoration dans (5):

$$\begin{aligned}&|K_{ij}(x, y)|\\ &\leqslant C_{\alpha\beta}\max(|\Gamma_{n_i}|^{\varrho\beta}, |\Gamma_{n_j}|^{\varrho\beta})\int\limits_{z\in G,\xi\in\operatorname{supp}\psi_i,\eta\in\operatorname{supp}\psi_j}[R^{\alpha}_{n'_i}(x-z)\,R^{\alpha}_{n'_j}(z-y)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\times\langle\xi-\eta\rangle^{\beta}]^{-1}\,dz\,d\eta\,d\xi,\end{aligned}$$

donc en choisissant $\xi_i\in\operatorname{supp}\psi_i$ pour chaque i

$$\|T_i^*\,T_j\|\leqslant C_{\alpha,\beta}\frac{[\max(|\xi_i|, |\xi_j|)]^{\varrho\beta}}{\langle\xi_i-\xi_j\rangle^{\beta}}\,\|[R^{\alpha}_{n'_i}(z)]^{-1}\|_1\,\|[R^{\alpha}_{n'_j}(z)]^{-1}\|_1\,|\Gamma_{n'_i}|\,|\Gamma_{n'_j}|. \tag{8}$$

En utilisant le lemme IV.3, (8) s'écrit en choisissant $\alpha>1$

$$\|T_i^*\,T_j\|\leqslant C_{\beta}\frac{[\max(|\xi_i|, |\xi_j|)]^{\varrho\beta}}{\langle\xi_i-\xi_j\rangle^{\beta}}. \tag{9}$$

Il nous reste à montrer que l'on peut appliquer le lemme V.1, c'est-à-dire que l'on peut choisir β assez grand pour que

$$\forall j\in N\quad \sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{\infty}\left(\frac{[\max(|\xi_i|, |\xi_j|)]^{\varrho}}{\langle\xi_i-\xi_j\rangle}\right)^{\beta/2}\leqslant A<+\infty,\qquad A \text{ indépendant de } j.$$

Posons $\beta/2=1+\varepsilon$ et

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{\infty}\left(\frac{(|\xi_i|\vee|\xi_j|)^{\varrho}}{\langle\xi_i-\xi_j\rangle}\right)^{\beta/2}=I_1+I_2+I_3$$

avec

$$I_1=\sum_{i,|\xi_i|<|\xi_j|}(\ )^{\beta/2},\qquad I_2=\sum_{\substack{i\neq j\\ |\xi_i|=|\xi_j|}}(\ )^{\beta/2},\qquad I_3=\sum_{i,|\xi_i|>|\xi_j|}(\ )^{\beta/2}.$$

Nous avons

$$I_3\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|\xi_i|^{\varrho}}{\langle\xi_i-\xi_j\rangle^{1+(1-\varrho)\varepsilon}}\leqslant C\int\frac{d\xi}{\langle\xi-\xi_j\rangle^{1+(1-\varrho)\varepsilon}}\leqslant\frac{A}{3}<+\infty, \tag{10}$$

car $|\operatorname{supp}\psi_i|=|\Gamma_{n'_i}|\geqslant C|\xi_i|^{\varrho}$.

Majorons I_2: dans I_2, $|\xi_i|=|\xi_j|$, donc $n_i=n_j$; nous notons donc momentanément $n=n_i=n_j$ et $n'=n'_i=n'_j$. Puisque $i\neq j$, nous avons $\langle\xi_i-\xi_j\rangle\geqslant|\Gamma_{n'+1}|$. De plus $|\xi_i-\xi_j|=|\Gamma_{n'+1}|$ implique $\xi_i\in\xi_j+\Gamma_{n'+1}$ et $\Gamma_{n'+1}$ est pavé par $\varkappa_{n'}$ translatés de $\Gamma_{n'}$; il y a donc au plus $\varkappa_{n'}=|\Gamma_{n'+1}|/|\Gamma_{n'}|$ i tels que $|\xi_i-\xi_j|=|\Gamma_{n'+1}|$. Nous effectuons la même estimation pour le nombre de i tels que $|\xi_i-\xi_j|=|\Gamma_{n'+l}|$ et obtenons:

$$I_3\leqslant\sum_{l=1}^{n-n'}\left(\frac{|\Gamma_n|^{\varrho}}{|\Gamma_{n'+l}|}\right)^{1+\varepsilon}\frac{|\Gamma_{n'+l}|}{|\Gamma_{n'}|}=C\sum_{l=1}^{n-n'}\left(\frac{|\Gamma_{n'}|}{|\Gamma_{n'+l}|}\right)^{\varepsilon},$$

soit

$$I_3\leqslant C\sum_{l=1}^{\infty}2^{-l\varepsilon}\leqslant A/3<+\infty. \tag{11}$$

Majorons enfin

$$I_1=\sum_{i,|\xi_i|<|\xi_j|}|\xi_j|^{(\varrho-1)(1+\varepsilon)}=|\xi_j|^{(\varrho-1)(1+\varepsilon)}\sum_{i,|\xi_i|<|\xi_j|}1.$$

Cherchons le nombre N_j d'entiers i tels que $|\xi_i|<|\xi_j|$: dans chaque couronne $\Gamma_a\setminus\Gamma_{a-1}$ nous avons découpé des morceaux de mesure supérieure à $\varkappa^{-1}|\Gamma_a|^{\varrho}$, nous avons donc au plus $\varkappa|\Gamma_a|^{1-\varrho}$ morceaux. Nous en déduisons $N_j\leqslant\sum_{a<n_j}\varkappa|\Gamma_a|^{1-\varrho}$ et nous avons donc

$$I_1\leqslant\varkappa|\Gamma_{n_j}|^{(\varrho-1)\varepsilon}\sum_{a<n_j}\left(\frac{|\Gamma_a|}{|\Gamma_{n_j}|}\right)^{1-\varrho}\leqslant\varkappa\sum_{l=0}^{\infty}2^{-l(1-\varrho)}\leqslant\frac{A}{3}<+\infty. \tag{12}$$

Posons enfin

$$a_{ij}=C\left(\frac{(|\xi_i|\vee|\xi_j|)^{\varrho}}{\langle\xi_i-\xi_j\rangle}\right)^{\beta/2}\quad\text{avec } \beta>2\quad\text{si } i\neq j,$$

$$a_{ii}=C.$$

D'après (4) et (9), $\|T_i^*\,T_j\|\leqslant a_{ij}^2$ et $\|T_i\,T_j^*\|\leqslant a_{ij}^2$ et d'autre part d'après (10), (11) et (12) $\sum_j a_{ij}\leqslant CA$ et $\sum_i a_{ij}\leqslant CA$, ce qui achève la démonstration.

Terminons ce paragraphe par un résultat complémentaire relatif à l'ordre des opérateurs associés aux classes $S^m_{\varrho,\delta}$. Définissons l'espace de Sobolev L^2_α par l'intermédiaire des opérateurs J^α définis par $(J^\alpha f)^{\wedge}=\langle\xi\rangle^{-\alpha}\hat{f}$, en posant

$$L^2_\alpha=\{f\colon f=J^\alpha g,\ g\in L^2\}\quad\text{et}\quad\|f\|_{L^2_\alpha}=\|g\|_2.$$

V.4. Théorème. *Soit* $\sigma\in S^m_{\varrho,\delta}$, $0\leqslant\delta<\varrho\leqslant 1$ *ou* $0<\delta\leqslant\varrho<1$. *L'opérateur* T_σ *est borné de* L^2_α *dans* $L^2_{\alpha-m}$.

C'est un corollaire immédiat des théorèmes V.2 et V.3 et du théorème IV.1. Notons que dans le même esprit nous pouvons démontrer comme dans le cas réel et en utilisant les techniques des paragraphes précédents le résultat suivant:

V.5. Théorème. *Soit* $\sigma\in S^m_{1,0}$. *L'opérateur* T_σ *est borné de* Λ_α *dans* $\Lambda_{\alpha-m}$

pour $\alpha > 0$ et $\alpha - m > 0$. Si $\alpha > 0$, Λ_α est l'espace de Lipschitz défini en I.4, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f appartenant à $L^\infty(G)$ telles que $|\Delta_h f(x)| \leqslant C|h|^\alpha$ pour tout $h \in G$.

VI. Continuité L^p pour $S^m_{\varrho,\delta}$. Pour obtenir des résultats L^p, $p \neq 2$, pour les classes $S^m_{\varrho,\delta}$ nous allons suivre l'exposé de C. Fefferman [3] et utiliser comme G. Gaudry et I. Inglis dans [6] les techniques d'analyse réelle présentées dans [5] par C. Fefferman et E. Stein. Nous utilisons en particulier l'espace BMO, un théorème d'interpolation que nous ennonçons ci-dessous et un résultat concernant les potentiels de Riesz.

VI.1. Une fonction f appartient à l'espace BMO si elle est localement intégrable et qu'il existe une constante C telle que pour tout x appartenant à G et pour tout $n \in \mathbf{Z}$, en posant $B = x + G_n$,

$$(1) \qquad |B|^{-1} \int_B |f(y) - f_B|\, dy \leqslant C \quad (\text{avec } f_B = |B|^{-1} \int_B f(y)\, dy).$$

Notons que d'autres définitions sont possibles, en particulier il y a coïncidence entre la nôtre et celle de [6]. La plus petite constante C pour laquelle nous avons (1) définit la norme de f dans BMO que nous noterons $\|f\|_*$.

VI.2. Théorème. *Supposons que $z \to T_z$ soit une application de la bande $S = \{z \in \mathbf{C}:\ 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 1\}$ dans l'espace des opérateurs bornés de $L^2(G)$ dans $L^2(G)$ qui soit, de plus, analytique sur l'intérieur de S, fortement continue et uniformément bornée sur S. Supposons enfin qu'il existe des constantes M_0 et M_1 telles que*

$$\sup_{-\infty < y < +\infty} \|T_{iy} f\|_* \leqslant M_0 \|f\|_\infty \quad \text{si } f \in L^2(G) \cap L^\infty(G),$$

$$\sup_{-\infty < y < +\infty} \|T_{1+iy}\|_2 \leqslant M_1 \|f\|_2 \quad \text{si } f \in L^2(G).$$

Alors si $0 < t < 1$ et $p = 2/t$, $\|T_t f\|_p \leqslant M_t \|f\|_p$, $f \in L^p \cap L^2$.

Nous renvoyons le lecteur à l'article de Fefferman et Stein [5], le passage de $\mathbf{R}^n$ à G ne posant pas de difficultés.

VI.3. Définissons sur $S(G)$ l'opérateur I^α par

$$(I^\alpha f)\hat{}\,(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi).$$

Le théorème III.1 montre que pour $\alpha \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$, l'opérateur I^α est continu de $L^p(G)$ dans $L^p(G)$. Les résultats de [6] montrent que pour $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$ nous avons aussi

$$(1) \qquad \|I^{i\alpha} f\|_* \leqslant C \|f\|_* \quad \text{pour } f \in L^\infty(G).$$

Nous utiliserons le théorème suivant:

VI.4. Théorème (Sobolev). *Soit $0 < \alpha < 1$ et $1 \leqslant p < r < +\infty$ avec $1/r = 1/p - \alpha > 0$.*

(i) *Si $p > 1$, $\|I^\alpha f\|_r \leqslant A_{p,r} \|f\|_p$ pour $f \in L^p$.*

(ii) *Si $p = 1$, $|\{x:\ |I^\alpha f(x)| > \lambda\}| \leqslant (A_r \lambda^{-1} \|f\|_1)^r$ pour $f \in L^1$ et $\lambda > 0$.*

Preuve. En vertu du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (cf. [8]) il suffit de montrer pour tout $p \geqslant 1$ l'inégalité

$$(1) \qquad |\{x:\ |I^\alpha f(x)| > \lambda\}| \leqslant (B_{p,r} \|f\|_p \lambda^{-1})^r.$$

Pour cela introduisons les notations suivantes: $f_n = f \mathbf{1}_{\Gamma_n}$ et $d_n f = f_n - f_{n-1}$. $\{f_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ est une martingale associée à f et à la suite de tribus $\{\mathscr{F}_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$, chaque $\mathscr{F}_n$ étant engendré par les translatés de G_n. Nous avons

$$I^\alpha f = \sum_{n=-\infty}^{l-1} |\Gamma_n|^{-\alpha} d_n f + \sum_{n=l}^{+\infty} |\Gamma_n|^{-\alpha} d_n f = I^\alpha_1 f + I^\alpha_2 f.$$

Nous pouvons supposer que $\|f\|_p = 1$ vu l'homogénéité de (1). Nous avons alors

$$I^\alpha_2 f = \sum_{n=l}^{+\infty} |\Gamma_n|^{-\alpha} d_n f = |\Gamma_l|^{-\alpha} f_{l-1} + \sum_{n=l}^{\infty} f_n (|\Gamma_n|^{-\alpha} - |\Gamma_{n+1}|^{-\alpha}),$$

ce qui donne

$$(2) \qquad \|I^\alpha_2 f\|^p_p \leqslant 2 |\Gamma_l|^{-\alpha p}.$$

D'autre part une simple observation montre que si f appartient à L^p, $|f_n| \leqslant |\Gamma_n|^{1/p}$, ce qui permet d'écrire

$$|I^\alpha_1 f| \leqslant \sum_{n<l} |\Gamma_n|^{-\alpha} |\Delta_n f| \leqslant 2 \sum_{n<l} |\Gamma_n|^{-\alpha + (1/p)}$$

et nous obtenons

$$(3) \qquad |I^\alpha_1 f| \leqslant c |\Gamma_l|^{1/r}.$$

Nous avons

$$|\{x:\ |I^\alpha f(x)| > \lambda\}| \leqslant |\{x:\ |I^\alpha_1 f(x)| > \lambda/2\}| + |\{x:\ |I^\alpha_2 f(x)| > \lambda/2\}|.$$

Choisissons l égal au plus grand entier tel que $c|\Gamma_l|^{1/r} \leqslant \lambda/2$ de sorte que $\lambda/2 \leqslant c(\varkappa |\Gamma_l|)^{1/r}$. Nous avons alors en utilisant (3)

$$|\{x:\ |I^\alpha f(x)| > \lambda\}| \leqslant |\{x:\ |I^\alpha_2 f(x)| > \lambda/2\}| \leqslant 2 \cdot 2^p \lambda^{-p} \|I^\alpha_2 f\|^p_p$$

et d'après (2) et le choix que nous avons fait pour l

$$|\{x:\ |I^\alpha f(x)| > \lambda\}| \leqslant C_{p,r} \lambda^{-p} (\lambda/2c)^{-\alpha p r} \leqslant C_{p,r} \lambda^{-p(1+\alpha r)} = C_{p,r} \lambda^{-r}.$$

Le théorème est donc démontré.

IV.5. Lemme. *Soit* $\sigma \in S^m_{\varrho,\delta}$ *avec* $1 \geqslant \varrho \geqslant 0$ *et* $m = -(1-\varrho)/2$. *Posons pour* $n \geqslant 1$, $\sigma_n(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\mathbf{1}_{\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}}(\xi)$ *et* $\sigma_0(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\mathbf{1}_{\Gamma_0}(\xi)$, *puis*

$$K_n(x, z) = \int_\Gamma \sigma_n(x, \xi)(z, \xi)\, d\xi.$$

Il existe une constante C *indépendente de* n *telle que*

$$J_n(x) = \int_G |K_n(x, z)|\, dz \leqslant C.$$

Preuve. Commençons par estimer

$$I_n = \int_G \int_{\Gamma_{n'}} \frac{|(z, k)-1|^2 |K_n(x, z)|^2}{|k|^{2\alpha+1}}\, dk\, dz$$

où $n' = [n\varrho]$. Utilisons la formule de Plancherel:

$$I_n = \int_{\Gamma_{n'}} \int_\Gamma \frac{|\Delta_k^\xi \sigma_n(x, \xi)|^2}{|k|^{2\alpha+1}}\, d\xi\, dk.$$

σ_n est à support en ξ dans $\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}$ et notre hypothèse donne

$$I_n \leqslant C_\alpha |\Gamma_n|^{-(1-\varrho)-2\varrho(\alpha+1)} |\Gamma_n| \int_{k \in \Gamma_{n'}} |k|^{2(\alpha+1)} |k|^{-2\alpha-1}\, dk,$$

soit

(1) $$I_n \leqslant C_\alpha |\Gamma_n|^{-2\varrho\alpha+\varrho}.$$

Écrivons maintenant

$$J_n = \int_{z \in G_{n'}} + \int_{z \notin G_{n'}} = J + \tilde{J}.$$

Nous avons en utilisant (1) pour $\alpha = 0$

(2) $$J^2 \leqslant \Big(\int_G |K_n(x, z)^2\, dz\Big)\Big(\int_{z \in G_{n'}} dz\Big) \leqslant C |\Gamma_n|^\varrho |G_{n'}| \leqslant C.$$

En ce qui concerne $\tilde{J}$ nous pouvons écrire

$$\tilde{J}^2 \leqslant \left(\int_G \int_{\Gamma_{n'}} \frac{|(z, k)-1|^2 |K_n(x, z)|^2}{|k|^{2\alpha+1}}\, dk\, dz\right) \times \left(\int_{z \notin G_{n'}} \left[\int_{\Gamma_{n'}} \frac{|(z, k)-1|^2}{|k|^{2\alpha+1}}\, dk\right]^{-1} dz\right)$$

et d'après (1) et le lemme II.3

$$\tilde{J}^2 \leqslant C_\alpha |\Gamma_n|^{-2\varrho\alpha+\varrho} \int_{z \notin G_{n'}} |z|^{-2\alpha}\, dz.$$

Pour $\alpha = 1$ nous obtenons

(3) $$\tilde{J}^2 \leqslant C |\Gamma_n|^{-\varrho} |G_{n'}| \leqslant C.$$

(2) et (3) fournissent la conclusion désirée. Le lemme est démontré. Nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant:

IV.6. Théorème. *Soit* $\sigma \in S^m_{\varrho,\delta}$ *avec* $0 \leqslant \delta < \varrho \leqslant 1$ *ou* $0 < \delta \leqslant \varrho < 1$ *et* $m = -(1-\varrho)/2$. *L'opérateur* T_σ *est continu de* $\boldsymbol{L}^\infty$ *dans* BMO.

Preuve. Remarquons tout d'abord que si l'on note $S'(G)$ le dual topologique de $S(G)$ muni de la topologie faible nous pouvons définir T_σ sur $S'(G)$ grâce aux théorèmes II.6 et IV.7. En particulier T_σ est défini sur $\boldsymbol{L}^\infty$.

Nous avons à montrer qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in \boldsymbol{L}^\infty$ et toute boule $B = x_0 + G_i$ nous avons

(1) $$|B|^{-1} \int_B |T_\sigma f(x) - a_B|\, dx \leqslant C \|f\|_\infty$$

pour une constante a_B dependant de B et de f. Nous noterons $\|\sigma\|_n$ la somme des semi-normes $N_{\alpha,\beta}(\sigma)$ pour $\alpha \leqslant n$ et $\beta \leqslant n$ (voir II.4) et $\varphi_n = \mathbf{1}_{\Gamma_n \setminus \Gamma_{n-1}}$, $n \geqslant 1$, $\varphi_0 = \mathbf{1}_{\Gamma_0}$. A présent fixons $f \in \boldsymbol{L}^\infty$ et $B = x_0 + G_i$. Écrivons: $\sigma = \sigma^0 + \sigma^1$ avec $\sigma^0(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\mathbf{1}_{\Gamma_i}(\xi)$ et occupons nous d'abord de σ^0. Si $i \leqslant 0$, le lemme VI.5 donne $\|T_{\sigma^0} f\|_\infty \leqslant C \|f\|_\infty$ et la contribution de σ^0 à (1) ne pose pas de problème. Supposons donc $i > 0$ et remarquons que

$$\frac{\Delta_h}{|h|}(T_{\sigma^0} f(x)) = T_{\sigma'} f(x)$$

avec

$$\sigma'(x, \xi) = \frac{\Delta_h^x}{|h|}\sigma^0(x, \xi) + (h, \xi)\frac{[(h, \xi)-1]}{|h|}\sigma^0(x, \xi).$$

Notons alors $\tau_j(x, \xi) = \sigma'(x, \xi)\varphi_{-j+i}(\xi)$. Nous avons

(2) $$\sigma' = \sum_{j=0}^{j=i} \tau_j \quad \text{et} \quad \|\tau_j\|_n \leqslant C \|\sigma^0\|_{n+1} |\Gamma_i| 2^{-j}.$$

En effet,

$$\|\tau_j\|_n \leqslant C\,[|\Gamma_{-i+j}|^\delta + |\Gamma_{-i+j}|]\, \|\sigma^0\|_{n+1} \leqslant C \|\sigma^0\|_{n+1} |\Gamma_i| \frac{|\Gamma_{-j+i}|}{|\Gamma_i|},$$

ce qui donne (2). Le lemme VI.5 et (2) montrent que

$$\left\|\frac{\Delta_h}{|h|} T_{\sigma^0} f(x)\right\|_\infty \leqslant \sum_{j \geqslant 0} \|T_{\tau_j} f(x)\|_\infty \leqslant C |\Gamma_i| \|f\|_\infty.$$

Nous obtenons donc $|T_{\sigma^0} f(x) - T_{\sigma^0} f(x+h)| \leqslant C |h| |\Gamma_i| \|f\|_\infty$, que nous sommons sur $h \in G_i$ par rapport à $dh/|G_i|$, ce qui donne

$$|T_{\sigma^0} f(x) - a_B| \leqslant C \|f\|_\infty \quad \text{avec} \quad a_B = |B|^{-1} \int_{h \in G_i} T_{\sigma^0} f(x_0+h)\, dh,$$

soit a fortiori

(3) $$|B|^{-1}\int_B |T_{\sigma^0} f(x)-a_B|\,dx \leqslant C\|f\|_\infty .$$

Passons à σ^1. Introduisons la fonction $\Pi(x) = \mathbf{1}_{G_{i'}}(x-x_0)$ où $i' = [i\varrho]$ et remarquons que

(4) $$\Pi(x) = 1 \quad \text{si } x\in B; \qquad \hat{\Pi}(\xi) = |G_{i'}|\,\mathbf{1}_{\Gamma_{i'}}(\xi)(x_0,\xi).$$

Écrivons ensuite $\Pi T_{\sigma^1} f = T_{\sigma^1}(\Pi f)+[\Pi, T_{\sigma^1}]f$ où $[P, Q] = P\circ Q-Q\circ P$. Estimons le premier terme: $T_{\sigma^1}(\Pi f) = (J^{(1-\varrho)/2}\circ J^{-(1-\varrho)/2}\circ T_{\sigma^1})(\Pi f)$ où l'opérateur J^α est défini par $(J^\alpha f)\hat{}\,(\xi) = \langle\xi\rangle^{-\alpha}\hat{f}(\xi)$. D'après le théorème IV.1, $J^{-(1-\varrho)/2}\circ T_{\sigma^1} = T_{\sigma^2}$ avec $\sigma^2\in S^0_{\varrho,\delta}$, donc d'après les théorèmes V.2 et V.3, $J^{-(1-\varrho)/2}\circ T_{\sigma^1}$ est continu de L^2 dans L^2. Utilisons à présent le théorème VI.4 en posant $1/r = 1/2-(1-\varrho)/2 = \varrho/2 > 0$. Nous obtenons

$$\int |T_{\sigma^1}(\Pi f)(x)|^r\,dx \leqslant C\|\Pi f\|_2^r \leqslant C\|f\|_\infty^r |G_{i'}|^{r/2} \leqslant C\|f\|_\infty^r |G_i|,$$

donc

(5) $$|B|^{-1}\int_B |T_{\sigma^1}(\Pi f)(x)|\,dx \leqslant C\|f\|_\infty .$$

Pour estimer le second terme, c'est-à-dire $[\Pi, T_{\sigma^1}]f$, remarquons qu'il s'écrit $T_\theta f$ avec

$$\theta(x,\xi) = \int_\Gamma (x,\eta)\hat{\Pi}(\eta)[\sigma^1(x,\xi)-\sigma^1(x,\xi-\eta)]\,d\eta .$$

Notons que $\theta(x,\xi)$ est supporté dans $\Gamma\setminus\Gamma_i$ et écrivons

$$\theta(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty}\theta_j(x,\xi)$$

avec

$$\theta_j(x,\xi) = \theta(x,\xi)\varphi_{i+j}(\xi) \quad \text{si } i\geqslant 0,$$
$$\theta_j(x,\xi) = \theta(x,\xi)\varphi_j(\xi) \quad \text{si } i<0.$$

Remarquons que

$$|\theta_j(x,\xi)| \leqslant C|G_{i'}|\,|\Gamma_{i+j}|^{-(1-\varrho)/2-\varrho}\int_{\Gamma_{i'}}|\eta|\,d\eta \quad \text{si } i\geqslant 0,$$
$$|\theta_j(x,\xi)| \leqslant C|G_{i'}|\,|\Gamma_j|^{-(1-\varrho)/2-\varrho}\int_{\Gamma_{i'}}|\eta|\,d\eta \quad \text{si } i<0.$$

Dans les deux cas nous obtenons

$$|\theta_j(x,\xi)| \leqslant C\langle\xi\rangle^{-(1-\varrho)/2}2^{-j\varrho}.$$

Plus généralement, nous avons

$$|\Delta_k^\xi\theta_j(x,\xi)| \leqslant C_\alpha|k|^\alpha\langle\xi\rangle^{-(1-\varrho)/2-\varrho\alpha}2^{-j\varrho}.$$

Le lemme VI.5 et sa démonstration nous permettent d'écrire

(6) $$\|[\Pi, T_{\sigma^1}]f\|_\infty \leqslant C\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j\varrho}\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty .$$

Les inégalités (5) et (6) donnent donc

$$|B|^{-1}\int_B |\Pi(x)\,T_{\sigma^1}f(x)|\,dx \leqslant C\|f\|_\infty$$

et puisque $\Pi\equiv 1$ sur B,

(7) $$|B|^{-1}\int_B |T_{\sigma^1}f(x)|\,dx \leqslant C\|f\|_\infty .$$

Les inégalités (3) et (7) nous permettent d'obtenir (1) et le théorème est démontré.

Nous pouvons à présent obtenir le résultat concernant la continuité L^p en utilisant les théorèmes V.2 et V.3, le théorème VI.6 et le théorème d'interpolation VI.2. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Fefferman et Stein [5] et à [6] pour l'utilisation de cette technique. Nous obtenons:

VI.7. Théorème. *Soit $\sigma\in S^m_{\varrho,\delta}$, $0\leqslant\delta<\varrho\leqslant 1$ ou $0<\delta\leqslant\varrho<1$ et soit $1<p<+\infty$. L'opérateur T_σ est borné de L^p dans L^p pour p vérifiant $(1-\varrho)|1/2-1/p|\leqslant -m$.*

Les résultats de [6] montrent que l'intervalle donné pour p dans le théorème précédent est le meilleur possible.

Bibliographie

[1] R. Beals and C. Fefferman, *Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 1–24.

[2] A. Calderón and R. Vaillancourt, *A class of bounded pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 6 (1972), 1185–1187.

[3] C. Fefferman, *L^p bounds for pseudo-differential operators*, Israel J. Math. 14 (1973), 413–417.

[4] — *Recent progress in classical Fourier analysis*, in: Proc. Int. Cong. Math., Vancouver 1974, 95–118.

[5] C. Fefferman and E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137–193.

[6] G. I. Gaudry and I. R. Inglis, *Weak-strong convolution operators on certain disconnected groups*, Studia Math. 64 (1979), 1–12.

[7] L. Saloff-Coste, *Opérateurs pseudo-différentiels sur un corps local*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 297 (1983), 171–174.
[8] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
[9] M. Taibleson, *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton University Press, 1975.

UNIVERSITÉ PARIS VI
ANALYSE COMPLEXE ET GÉOMÉTRIE
LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C. N. R. S. (L. A. 213)
4, Place Jussieu, 75230 Paris-Cedex 05
Tour 45-46, 5ᵉ étage

Received May 16, 1984
Revised version March 4, 1985 (1979)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXIII. (1986)

The "local" law of the iterated logarithm for processes related to Lévy's stochastic area process

by

K. HELMES* (Bonn)

Abstract. For a class of stochastic processes which includes Lévy's stochastic area process as a special case we prove the law of the iterated logarithm at zero. Based on this result we also prove the law for the l^1-norm of a finite number of independent copies of area processes.

1. Introduction. Let $(W_t) = (X_t, Y_t)$ be a 2-dimensional Brownian motion and let

$$L_t = \int_0^t \langle JW_s, dW_s\rangle, \qquad \text{where} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotes the usual scalar product in $\mathbf{R}^2$. The "area process" $(2^{-1}L_t)$ was introduced by Lévy in 1939 (cf. [9], for further references see [7]) but was only sporadically studied until the mid-seventies [5, 8, 10, 12]. As has been noticed by Gaveau [5, see also 1], the process (L_t) or, more precisely, the diffusion process (W_t, L_t), is a useful tool for solving certain problems which naturally occur in analysis and differential geometry. Dugué's recent note [4] shows that the process (L_t) also plays a certain role in statistics, viz. in hypothesis testing; for a special parameter estimation problem of 2-dimensional Gauss–Markov processes it was previously used in [10, Ch. 17.4]. Asymptotic fine properties of its sample paths were investigated in [2] and [6] (cf. also [11]). In these papers a law of the iterated logarithm at infinity is proved for classes of stochastic processes which include (L_t) as a special case. In [2], processes

$$Z_t^{\alpha,\beta} = \alpha\int_0^t X_s\,dY_s + \beta\int_0^t Y_s\,dX_s, \qquad t > 0,$$

are investigated while in [6] processes $L_t^A = \int_0^t \langle AW_s, dW_s\rangle$, where A is a $d\times d$ skew symmetric matrix, $d \geqslant 2$, are dealt with.

In this paper we shall prove the "lil" (law of the iterated logarithm) *at*

* This work was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), Sonderforschungsbereich 72 (SFB 72), at the University of Bonn, Bonn, West Germany.