STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXIII. (1986)

Sur une certaine alternative non-linéaire en analyse convexe

par

PAUL DEGUIRE et ANDRZEJ GRANAS (Montréal)

Dédié à la mémoire de Stanisław Mazur

Abstract. In this note, using the Principle of the KKM-maps, we establish an alternative, formulated in terms of convex analysis, which has several useful consequences in the theory of variational inequalities and contains as a special case the well-known theorems of Sion–von Neumann and Ky Fan–Nash.

§ 1. Introduction. Le théorème de Ky Fan connu sous le nom de "Principe des applications KKM" joue un rôle fondamental dans le traitement de plusieurs problèmes non-linéaires (voir Ky Fan [9], Granas [14]). Nous nous proposons dans cette Note d'établir à l'aide de ce théorème une certaine alternative (Théorème 1) exprimée en langage d'analyse convexe et qui généralise notre résultat récent paru dans [2]. En § 3 nous donnons quelques conséquences directes de cette alternative, en déduisant les résultats bien connus suivants: (i) Inégalité de Minimax de Ky Fan (voir [12], [8]), (ii) une version générale du Principe de Minimax de von Neumann due à Sion (voir [24], [25]), (iii) Théorème de Ky Fan sur les équilibres de Nash (voir [23], [11]) et (iv) Théorème de Hartman–Stampacchia dans la théorie des inéquations variationnelles (voir [17]). En § 4, nous donnons une généralisation d'un théorème de minimax de Ky Fan de [10] et en § 5 les formulations géométriques de résultats analytiques. Les auteurs sont reconnaissants à M. H. Ben-El-Mechaiekh pour des discussions fructueuses.

Soit $\Gamma\colon X \to 2^E$ une application multivoque définie sur un sous-ensemble non-vide X d'un espace linéaire topologique E (¹). On dit que Γ est une *application KKM* si pour chaque ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$ on a $\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma x_i$. Nous partirons du résultat suivant de Ky

(¹) Dans cette Note nous suivons la terminologie de Berge [4]. Signalons que tous les espaces topologiques sont supposés séparés; par un convexe on entend un sous-ensemble convexe d'un espace linéaire topologique.

Fan, qui généralise un ancien théorème bien connu de Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz [19] et qui nous servira dans la preuve du théorème principal([2]).

PRINCIPE DES APPLICATIONS KKM. *Soient X un sous-ensemble non-vide d'un espace linéaire topologique et $\Gamma\colon X \to 2^E$ une application KKM telle que Γx est compact pour tout $x \in X$. Alors l'intersection $\bigcap\{\Gamma x|\ x \in X\}$ n'est pas vide.*

§ 2. **Théorème principal.** Soit $(P, \leqslant)$ un ensemble ordonné quelconque. Une fonction $\varphi\colon X \to P$ d'un espace topologique X dans P sera dite *semi-continue inférieurement* (resp. *semi-continue supérieurement*) sur X si pour tout $\lambda \in P$, $\{x \in X|\ \varphi(x) > \lambda\}$ (resp. $\{x \in X|\ \varphi(x) < \lambda\}$) est ouvert dans X. Dans le cas où X est une partie convexe d'un espace linéaire topologique, Γ sera dit *quasi-concave* (resp. *quasi-convexe*) sur X si quel que soit $\lambda \in P$, $\{x \in X|\ \varphi(x) > \lambda\}$ (resp. $\{x \in X|\ \varphi(x) < \lambda\}$) est convexe.

Notons tout d'abord que, étant donnés n ensembles ordonnés $P_1, \ldots, P_n$ et n fonctions $\varphi_i\colon X_i \to P_i$ semi-continues inférieurement (resp. quasi-concaves) la fonction produit $\varphi\colon \prod_{i=1}^{n} X_i \to \prod_{i=1}^{n} P_i$ donnée par $\{x_i\}_{i=1}^{n} \to \{\varphi_i(x_i)\}_{i=1}^{n}$ est aussi semi-continue inférieurement (resp. quasi-concave).

Nous sommes maintenant en mesure de formuler notre résultat principal:

THÉORÈME 1. *Soient X convexe compact non-vide, $(P, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $\varphi, \psi\colon X \times X \to P$ deux fonctions telles que:*

(i) $\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y)$ *pour tout* $(x, y) \in X \times X$;

(ii) $x \to \psi(x, y)$ *est quasi-concave sur X pour tout $y \in X$;*

(iii) $y \to \varphi(x, y)$ *est semi-continue inférieurement sur X pour tout $x \in X$.*

Alors pour chaque $\lambda \in P$ on a l'alternative suivante:

1°. *Il existe $y_0 \in X$ tel que l'inéquation $\varphi(x, y_0) > \lambda$ n'admet aucune solution x dans X,*

ou bien

2°. *Il existe $w \in X$ tel que $\psi(w, w) > \lambda$.*

Preuve. Fixons arbitrairement $\lambda \in P$ et définissons deux applications multivoques $\Gamma, A\colon X \to 2^X$ en posant $\Gamma x = X \setminus Ax$, $Ax = \{z \in X|\ \varphi(x, z) > \lambda\}$ pour tout $x \in X$. Par (iii) A est ouvert et donc Γx est compact pour tout $x \in X$.

Cela étant, examinons successivement deux possibilités suivantes:

([2]) Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux travaux de Dugundji–Granas [6], Gwinner [16], Mosco [22]; pour les applications et extensions diverses de ce résultat, voir Brézis–Nirenberg–Stampacchia [5], Ky Fan [13], Lassonde [20], Horvath [18].

(a) *Γ n'est pas une application KKM*: dans ce cas il existe (par définition) une combinaison convexe $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ de certains $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tel que

$$w \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma x_i = \bigcap_{i=1}^{n} Ax_i.$$

On voit par la définition de A que

$$\lambda < \varphi(x_i, w) \leqslant \psi(x_i, w) \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n$$

et par conséquent en utilisant (ii)

$$\psi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, w\Big) = \psi(w, w) > \lambda;$$

on conclut que dans le cas (a) la propriété 2° est vérifiée.

(b) *Γ est une application KKM*: Par le Principe des applications KKM, ceci implique que $\bigcap\{\Gamma x|\ x \in X\} \neq \emptyset$ et donc A ne pourrait pas être surjective; on conclut que pour un certain $y_0 \in X$ l'ensemble $A^{-1}y_0 = \{x \in X|\ \varphi(x, y_0) > \lambda\}$ doit être vide; donc, dans le cas (b), la propriété 1° est vérifiée.

La démonstration du théorème est complètement terminée.

§ 3. **Quelques applications.** Nous donnons maintenant, à titre d'exemples, quelques conséquences intéressantes du Théorème 1, en déduisant de façon directe et simple quatre résultats bien connus.

a) *Principe de Minimax de Ky Fan.*

COROLLAIRE 1 (Ky Fan). *Soient X un convexe compact non-vide et $\varphi\colon X \times X \to \boldsymbol{R}$ une fonction numérique telle que:*

(i) $x \to \varphi(x, y)$ *est quasi-concave sur X, pour tout $y \in X$;*

(ii) $y \to \varphi(x, y)$ *est semi-continue inférieurement sur X pour tout $x \in X$.*

Alors:

(A) *Pour chaque $\lambda \in \boldsymbol{R}$, au moins l'un des énoncés suivants est vrai:*

1°. *Il existe $y_0 \in X$ tel que $\varphi(x, y_0) \leqslant \lambda$ pour chaque $x \in X$;*

2°. *Il existe $w \in X$ tel que $\varphi(w, w) > \lambda$.*

(B) *Nous avons l'inégalité suivante:*

$$\inf_{y \in X} \sup_{x \in X} \varphi(x, y) \leqslant \sup_{x \in X} \varphi(x, x).$$

Preuve. (A) découle immédiatement du Théorème si on pose $P = \boldsymbol{R}$ et $\varphi = \psi$; en prenant $\lambda = \sup_{x \in X} \varphi(x, x)$, qu'on suppose $< +\infty$, l'inégalité de minimax est une conséquence directe de (A).

Remarque 1. Rappelons que Corollaire 1 est tout à fait fondamental: il peut servir dans bien des problèmes. Indiquons, à titre d'exemples, quelques domaines d'applications importants: (a) *Systèmes des inégalités* (Théorèmes de Ky Fan, Kneser et Nikaido; applications à la théorie des matrices et opérateurs bistochastiques: Théorème de Markoff–Kakutani); (b) *Minimisation de fonctionnelles convexes* (Théorèmes de Mazur–Schauder et Nikodým); (c) *Inéquations variationnelles* (Théorème de Stampacchia pour les formes bilinéaires coercives dans un espace de Hilbert; Théorèmes de Lax–Milgram et F. Riesz); (d) *Théorie des points fixes* (Théorèmes de Tychonoff, Schauder–Tychonoff, Iochvidoff–Ky Fan. Coïncidences et points fixes pour les applications multivoques sortantes et rentrantes; Théorème de Glicksberg–Ky Fan); (e) *Théorie des jeux* (Théorèmes de Gale–Nikaido–Debreu et Arrow–Debreu–Nash); (f) *Théorie du potentiel*(3).

Remarque 2. En posant $P = \boldsymbol{R}$ dans le Théorème 1, on retrouve notre résultat récent paru dans [2]; ceci implique une généralisation de l'inégalité de Minimax de Ky Fan due à Yen [28].

b) *Principe de Minimax de von Neumann.*

COROLLAIRE 2 (Sion–von Neumann). *Soient X et Y deux convexes compacts non-vides et $f\colon X \times Y \to \boldsymbol{R}$ une fonction numérique telle que*:

(i) $y \to f(x, y)$ *est semi-continue inférieurement et quasi-convexe sur Y pour tout $x \in X$*;

(ii) $x \to f(x, y)$ *est semi-continue supérieurement et quasi-concave sur X pour tout $y \in Y$.*

Alors

(A) *Pour chaque $\lambda \in \boldsymbol{R}$, au moins l'une des propriétés suivantes est vérifiée*:

1°. *Il existe $\hat{y} \in Y$ tel que $f(x, \hat{y}) \leqslant \lambda$ pour tout $x \in X$*;

2°. *Il existe $\hat{x} \in X$ tel que $f(\hat{x}, y) \geqslant \lambda$ pour tout $y \in Y$.*

(B) *Nous avons l'égalité*:

$$\alpha = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \beta.$$

Preuve. (A) Soit $\lambda \in \boldsymbol{R}$; on peut supposer sans perte de généralité que $\lambda = 0$.

Supposons que (A) n'est pas vérifié, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in X \times Y$ nous avons

(1) $$Ay = \{x \in X \mid f(x, y) > 0\} \neq \emptyset, \qquad Bx = \{y \in Y \mid f(x, y) < 0\} \neq \emptyset.$$

(3) Pour plus de détails le lecteur consultera les ouvrages suivants: Pour (a) Ky Fan [7], [11], Granas–Liu [15], Sakamaki–Takahashi [27]; pour (b) Dugundji–Granas [6]; pour (d) Ky Fan [9], [12]; pour (e) Aubin [1]; pour (f) Ky Fan [12]; pour les autres applications, extensions et références voir Ky Fan [12], [13], Brézis–Nirenberg–Stampacchia [5], Tarafdar–Thompson [26], Yen [28], Ben-El-Mechaiekh–Deguire–Granas [2].

Posons $U = X \times Y$, $P = \boldsymbol{R}^2$ et définissons sur $U \times U$ une fonction $\varphi\colon U \times U \to P$ en posant pour tout $u = (u_x, u_y)$, $v = (v_x, v_y)$ dans U,

(2) $$\varphi(u, v) = [f(u_x, v_y), \ -f(v_x, u_y)].$$

Évidemment, par (i) et (ii) la fonction $u \to \varphi(u, v)$ est quasi-concave sur U pour tout $v \in U$ et $v \to \varphi(u, v)$ est semi-continue inférieurement sur U pour tout $u \in U$. En appliquant le Théorème 1 à la fonction φ avec $\varphi = \psi$, $\lambda = (0, 0) \in \boldsymbol{R}^2$, on conclut que l'une des énoncés suivants est vrai:

(*) Il existe $\hat{v} = (\hat{v}_x, \hat{v}_y) \in U$ tel que l'inéquation

$$\varphi(u, \hat{v}) = [f(u_x, \hat{v}_y), \ -f(\hat{v}_x, u_y)] > \lambda = (0, 0)$$

n'admet aucune solution $u = (u_x, u_y) \in U$.

(**) Il existe $\hat{w} = (\hat{w}_x, \hat{w}_y)$ tel que

$$\varphi(\hat{w}, \hat{w}) = [f(\hat{w}_x, \hat{w}_y), \ -f(\hat{w}_x, \hat{w}_y)] > \lambda = (0, 0).$$

En supposant (*) on conclut qu'un des ensembles

$$A\hat{v}_y = \{u_x \in X \mid f(u_x, \hat{v}_y) > 0\} \quad \text{et} \quad B\hat{v}_x = \{u_y \in Y \mid f(\hat{v}_x, u_y) < 0\}$$

est vide, ce qui contredit (1). En supposant (**) on obtient $0 < f(\hat{w}_x, \hat{w}_y) < 0$, ce qui est absurde. La preuve de (A) est complète.

(B) Évidemment, il suffit d'établir l'inégalité $\alpha \leqslant \beta$. Supposons donc au contraire qu'il existe $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tel que $\beta < \lambda < \alpha$ et appliquons la propriété (A) du Théorème. S'il existe $y_0 \in Y$ tel que $f(x, y_0) \leqslant \lambda$ pour tout $x \in X$, on a $\sup_x f(x, y_0) \leqslant \lambda$ et $\alpha = \inf_y \sup_x f(x, y) \leqslant \lambda$, ce qui est absurde. S'il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0, y) \geqslant \lambda$ pour tout $y \in Y$, alors $\inf_y f(x_0, y) \geqslant \lambda$ et $\beta = \sup_x \inf_y f(x, y) \geqslant \lambda$, ce qui est absurde. Donc par (A) on obtient une contradiction et la preuve est complète.

c) *Équilibres de Nash.* Étant donnés n espaces topologiques non-vides $X_1, X_2, \ldots, X_n$, soit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ leur produit cartésien et $X^j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} X_i$.

Évidemment, pour chaque $j = 1, 2, \ldots, n$ on a $X = X_j \times X^j$; on peut donc écrire chaque élément $x \in X$ sous la forme

$$x = (x_j, y^j) = (y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

où

$$y^j = (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n) \in X^j \quad \text{et} \quad x_j \in X_j.$$

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n fonctions numériques, $f_i\colon X \to \boldsymbol{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ définis sur $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$. Rappelons qu'un élément $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$ de X

s'appelle *point d'équilibre de Nash* pour le système $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ si pour chaque $j = 1, 2, \ldots, n$ on a

$$f_j(\hat{y}) = \max_{x_j \in X_j} f_j(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{j-1}, x_j, \hat{y}_{j+1}, \ldots, \hat{y}_n).$$

Nous pouvons maintenant formuler le résultat suivant établi par Ky Fan [11].

COROLLAIRE 2 (Ky Fan–Nash). *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ($n \geqslant 2$) n convexes compacts non-vides, chacun dans un espace linéaire topologique et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n fonctions numériques continues $f_j\colon X \to \boldsymbol{R}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) satisfaisant à la propriété suivante:*

($*$) *pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$ et tout $y^j \in X^j$ la fonction*

$$x_j \to f_j(x_j, y^j)$$

est quasi-concave sur X_j.

Alors le système $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ admet un point d'équilibre de Nash.

Preuve. Pour chaque $j = 1, 2, \ldots, n$ définissons une fonction continue $g_j\colon X \to \boldsymbol{R}$ par

$$g_j(y) = g_j(y_j, y^j) = \max_{z_j \in X_j} f_j(z_j, y^j), \qquad y \in X;$$

la continuité de g_j découle de la continuité uniforme de f_j sur X. Considérons la famille décroissante des ensembles compacts (possiblement vides) $\{S_\varepsilon |\ \varepsilon > 0\}$ où

$$(*) \qquad S_\varepsilon = \{y \in X |\ f_j(y) - g_j(y) + \varepsilon \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Évidemment, si $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n) \in S = \bigcap \{S_\varepsilon |\ \varepsilon > 0\}$, on a pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$ et $\varepsilon > 0$

$$f_j(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n) \geqslant \max_{z_j \in X_j} f_j(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{j-1}, z_j, \hat{y}_{j+1}, \ldots, \hat{y}_n) - \varepsilon,$$

d'où

$$f_j(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n) = \max_{z_j \in X_j} f_j(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{j-1}, z_j, \hat{y}_{j+1}, \ldots, \hat{y}_n),$$

c'est-à-dire $\hat{y}$ est un point d'équilibre de Nash pour le système $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Par conséquent, pour terminer la preuve du théorème il suffit de montrer que chaque ensemble S_ε est non-vide.

Donnons-nous alors un nombre positif ε; nous allons montrer que $S_\varepsilon \neq \emptyset$. Tout d'abord, pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$ définissons une fonction continue $\varphi_j\colon X \to \boldsymbol{R}$ par

$$(**) \qquad \varphi_j(y) = f_j(y) - g_j(y) + \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in X.$$

Notons que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vérifient les deux propriétés suivantes:

(i) pour tout $y^j \in X^j$ la fonction

$$y_j \to \varphi_j(y_j, y^j) = f_j(y_j, y^j) - \max_{z_j \in X_j} f_j(z_j, y^j) + \varepsilon$$

est quasi-concave;

(ii) pour tout $y^j \in X^j$ il existe un point $x_j \in X_j$ tel que $\varphi_j(x_j, y^j) > 0$.

En effet, la propriété (i) découle de ($*$) et la propriété (ii) est évidente.

En second lieu, définissons sur $X \times X$ une fonction $\varphi\colon X \times X \to P$ à valeurs dans $P = \boldsymbol{R}^n$ en posant pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de X

$$\varphi(x, y) = [\varphi_1(x_1, y^1), \varphi_2(x_2, y^2), \ldots, \varphi_n(x_n, y^n)];$$

notons que la fonction $x \to \varphi(x, y)$, en vertu de (i), est quasi-concave sur X pour tout $y \in X$ et $y \to \varphi(x, y)$ est semi-continue inférieurement sur X pour tout $x \in X$. D'après le Théorème 1 (appliqué à la fonction $\varphi = \psi$ avec $\lambda = (0, 0, \ldots, 0)$) l'une des propriétés suivantes est satisfaite:

(iii) il existe $\hat{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n) \in X$ tel que l'inéquation

$$\varphi(x, \hat{y}) = [\varphi_1(x_1, \hat{y}^1), \varphi_2(x_2, \hat{y}^2), \ldots, \varphi_n(x_n, \hat{y}^n)] > \lambda$$

n'admet aucune solution $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$;

(iv) il existe $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in X$ tel que

$$\varphi(\hat{x}, \hat{x}) = [\varphi_1(\hat{x}), \varphi_2(\hat{x}), \ldots, \varphi_n(\hat{x})] > \lambda.$$

Pour chacun des indices $j = 1, 2, \ldots, n$ en appliquant (ii) au point $\hat{y}^j$ on trouve un $\hat{x}_j$ tel que $\varphi_j(\hat{x}_j, \hat{y}^j) > 0$. En posant $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ on voit que $\varphi(\hat{x}, \hat{y}) > \lambda$, ce qui contredit (iii).

Nous avons ainsi la propriété (iv), c'est-à-dire

$$\varphi_j(\hat{x}) = f_j(\hat{x}) - g_j(\hat{x}) + \varepsilon > 0$$

pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$; ceci implique $\hat{x} \in S_\varepsilon$ et la preuve est complète.

d) *Inéquations variationnelles; Théorème de Hartman–Stampacchia.* Soient E un espace de Banach réflexif, E' son dual, $(\ ,\ )$ le produit de dualité sur $E' \times E$ et X un sous-ensemble convexe de E. Rappelons qu'une application $f\colon X \to E'$ est *monotone* si $(f(y), y-x) \geqslant (f(x), y-x)$ pour tout $x, y \in X$; $f\colon X \to E'$ est *hémicontinue* si pour tout $x, y \in X$ l'application $t \to \big(f(y - t(y-x)), y-x\big)$ de $[0, 1]$ dans $\boldsymbol{R}$ est continue en 0.

COROLLAIRE 4 (Hartman–Stampacchia). *Soient X convexe fermé borné de E et $f\colon X \to E'$ une application monotone hémicontinue. Alors il existe $y_0 \in X$ tel que:*

$$(f(y_0), y_0 - x) \leqslant 0 \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Preuve. Munissons d'abord X de la topologie faible; par réflexivité de E, X est compact. Définissons sur $X\times X$ deux fonctions numériques $\varphi, \psi\colon X\times X\to \boldsymbol{R}$ en posant pour tout $x, y\in X$:

$$\varphi(x, y) = \big(f(x), y-x\big), \qquad \psi(x, y) = \big(f(y), y-x\big).$$

Par monotonicité, nous avons $\varphi(x, y)\leqslant \psi(x, y)$ pour tout $x, y\in X$. De plus, l'application $x\to\psi(x, y)$ est quasi-concave sur X pour chaque $y\in X$ et $y\to\varphi\ (x, y)$ est s.c.i. sur X pour tout $x\in X$. Par le Théorème 1 avec $P=\boldsymbol{R}$, $\lambda=0$, il existe $y_0\in X$ tel que:

$$(*)\qquad \big(f(z), y_0-z\big)\leqslant 0 \quad \text{pour tout } z\in X.$$

Cela étant, donnons-nous un point $x\in X$ et posons $z=y_0-t(y_0-x)$ où $t\in(0, 1]$. De $(*)$, nous avons $\big(f(y_0-t(y_0-x)), y_0-x\big)\leqslant 0$; donc par l'hémicontinuité de f nous obtenons en passant à la limite quand $t\to 0$, $\big(f(y_0), y_0-x\big)\leqslant 0$. La preuve est complète.

§ 4. Une généralisation du Théorème de Minimax de Ky Fan. La méthode de démonstration des Corollaires 2 et 3 nous suggère une extension possible du théorème de minimax de Ky Fan établi dans [10]. On a effectivement le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit* $(P, \leqslant)$ *un ensemble ordonné quelconque et* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\in P$. *Soient* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n\geqslant 2)$ *n convexes compacts non-vides, chacun dans un espace linéaire topologique et* $f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_n$ *2n fonctions de* $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ *dans* P *satisfaisant aux propriétés suivantes*:

(a) $f_i(x)\leqslant g_i(x)$ *pour tout* $i=1, 2, \ldots, n$ *et* $x\in X$;

(b) *pour tout* $j=1, 2, \ldots, n$ *et* $x_j\in X_j$ *la fonction*

$$y^j\to f_j(x_j, y^j) = f_j(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

est semi-continue inférieurement sur X^j;

(c) *pour tout* $j=1, 2, \ldots, n$ *et* $(y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)\in X^j$ *la fonction*

$$x_j\to g_j(x_j, y^j) = g_j(y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}, x_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$$

est quasi-concave sur X^j;

(d) *pour tout* $j=1, 2, \ldots, n$ *et tout point* $y^j\in X^j$ *il existe un* $x_j^*\in X_j$ *tel que* $f_j(x_j^*, y^j)>\lambda_j$.

Alors il existe $\hat{w}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)\in X$ *tel que* $g_i(\hat{w})>\lambda_i$ *pour tout* $i=1, 2, \ldots, n$.

Preuve. Soient $P_i=P$ et $\hat{P}=\prod_{i=1}^{n} P_i$. Définissons tout d'abord sur $X\times X$ deux fonctions $\varphi, \psi\colon X\times X\to\hat{P}$ à valeurs dans $\hat{P}$ en posant pour tout $u=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans X,

$$\varphi(u, v) = [f_1(x_1, y^1), f_2(x_2, y^2), \ldots, f_n(x_n, y^n)],$$
$$\psi(u, v) = [g_1(x_1, y^1), g_2(x_2, y^2), \ldots, g_n(x_n, y^n)].$$

Par (a) on a $\varphi(u, v)\leqslant\psi(u, v)$ pour chaque $(u, v)\in X\times X$; par (b) et (c) on a que $u\to\psi(u, v)$ est quasi-concave sur X pour chaque $v\in X$ et $v\to\varphi(u, v)$ est semi-continue inférieurement sur X pour chaque $u\in X$. Cela étant, nous pouvons maintenant appliquer le Théorème 1 aux fonctions φ et ψ avec $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\in\hat{P}$. D'après le théorème l'un des énoncés suivants est vérifié:

$(*)$ Il existe $\hat{v}=(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n)$ tel que l'inéquation
$$\varphi(u, \hat{v})>\lambda$$
n'admet aucune solution $u=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in X$.

$(**)$ Il existe $\hat{w}=(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)\in X$ tel que
$$\psi(\hat{w}, \hat{w}) = [g_1(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), g_2(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \ldots, g_n(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)]>\lambda.$$

Supposons que la propriété $(*)$ soit satisfaite. Pour chacun des indices $j=1, 2, \ldots, n$, on applique la condition (d) du théorème au point $(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_{j-1}, \hat{y}_{j+1}, \ldots, \hat{y}_n)$ et on trouve un $x_j^*\in X_j$ tel que
$$f_j(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_{j-1}, x_j^*, \hat{y}_{j+1}, \ldots, \hat{y}_n)>\lambda_j.$$

En vertu des définitions on obtient pour le point $\hat{u}=(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)\in X$ l'inégalité $\varphi(\hat{u}, \hat{v})>\lambda$, ce qui contredit $(*)$. Nous avons donc établi la propriété $(**)$; elle est évidemment équivalente à l'énoncé du théorème et la preuve est complète.

Remarque 1. En prenant dans le Théorème 2, $f_i=g_i$, on retrouve le théorème de Ky Fan [10].

A l'aide du Théorème 2 nous déduisons maintenant une généralisation suivante du Principe de Minimax de von Neumann:

COROLLAIRE 5 (voir [3]). *Soient* X_1 *et* X_2 *deux convexes compacts non-vides et* $f, s, t, g\colon X_1\times X_2\to\boldsymbol{R}$ *quatre fonctions numériques telles que*:

(i) $f(x_1, x_2)\leqslant s(x_1, x_2)\leqslant t(x_1, x_2)\leqslant g(x_1, x_2)$ *pour tout* $(x_1, x_2)\in X_1\times X_2$;

(ii) $x_2\to f(x_1, x_2)$ *est semi-continue inférieurement sur* X_2 *pour tout* $x_1\in X_1$;

(iii) $x_1\to s(x_1, x_2)$ *est quasi-concave sur* X_1 *pour tout* $x_2\in X_2$;

(iv) $x_2\to t(x_1, x_2)$ *est quasi-convexe sur* X_2 *pour tout* $x_1\in X_1$;

(v) $x_1\to g(x_1, x_2)$ *est semi-continue supérieurement sur* X_1 *pour tout* $x_2\in X_2$.

Alors:

(A) *Pour chaque $\lambda \in \mathbf{R}$, au moins l'un des énoncés suivants est vrai*:

1°. *Il existe $\hat{x}_2 \in X_2$ tel que $f(x_1, \hat{x}_2) \leqslant \lambda$ pour tout $x_1 \in X_1$*;

2°. *Il existe $\hat{x}_1 \in X_1$ tel que $g(\hat{x}_1, x_2) \geqslant \lambda$ pour tout $x_2 \in X_2$.*

(B) *Nous avons l'inégalité suivante*:

$$\inf_{x_2} \sup_{x_1} f(x_1, x_2) \leqslant \sup_{x_1} \inf_{x_2} g(x_1, x_2).$$

Preuve. (A). Soit $\lambda \in \mathbf{R}$; on peut supposer sans perte de généralité que $\lambda = 0$. Posons $X = X_1 \times X_2$ et définissons sur X quatre fonctions numériques f_1, f_2, g_1, g_2 en posant pour tout $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$

$$f_1(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = -g(x_1, x_2),$$
$$g_1(x_1, x_2) = s(x_1, x_2), \quad g_2(x_1, x_2) = -t(x_1, x_2).$$

En vertu de (i) nous avons évidemment $f_i(x_1, x_2) \leqslant g_i(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ et $i = 1, 2$. Par (ii) et (v) on conclut que pour chaque $y_1 \in X_1$ (resp. $y_2 \in X_2$) la fonction $x_2 \to f_1(y_1, x_2)$ (resp. $x_1 \to f_2(x_1, y_2)$) est semi-continue inférieurement sur X_2 (resp. X_1). De la même façon on vérifie que la propriété (c) découle de (iii).

Supposons que (A) n'est pas vérifiée. On conclut que pour chaque $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ nous avons

$$Ax_2 = \{x_1 \in X_1 |\ f(x_1, x_2) > 0\} = \{x_1 \in X_1 |\ f_1(x_1, x_2) > 0\} \neq \emptyset,$$

$$Bx_1 = \{x_2 \in X_2 |\ g(x_1, x_2) < 0\} = \{x_2 \in X_2 |\ f_2(x_1, x_2) > 0\} \neq \emptyset,$$

c'est-à-dire la condition (d) du Théorème 2 est satisfaite. Par conséquent on trouve un point $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in X_1 \times X_2$ tel que $g_1(\hat{x}) = s(\hat{x}_1, \hat{x}_2) > 0$ et $g_2(\hat{x}) = -t(\hat{x}_1, \hat{x}_2) > 0$; on obtient $t(\hat{x}_1, \hat{x}_2) < 0 < s(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, ce qui est absurde. En supposant que (A) n'était pas rempli, nous sommes arrivés à une contradiction. Par conséquent, la preuve de (A) est complète. La démonstration de (B) est strictement analogue à celle de l'implication (A)$\Rightarrow$(B) dans la preuve du Corollaire 2.

Remarque 2. Notons que dans le cas $f = s$, $g = t$ on retrouve le résultat de Liu [21]; si $f = s = t = g$, on retrouve le Corollaire 2.

Remarque 3. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, à l'aide du Théorème 2, le théorème sur les équilibres de Nash (Corollaire 3).

§ 5. Formulation géométrique. Le résultat suivant représente une forme géométrique du Théorème 2:

Théorème 3. *Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geqslant 2)$ n ensembles convexes compacts non-vides, chacun dans un espace linéaire topologique. Soient $\{A_i\}_{i=1}^n$, $\{B_i\}_{i=1}^n$ $2n$ sous-ensembles du produit $X = \prod_{i=1}^n X_i$ ayant les propriétés suivantes*:

(a) *$A_i \subset B_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$*;

(b) *pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$ et pour tout $x_j \in X_j$ l'ensemble*

$$\{y^j \in X^j |\ (x_j, y^j) \in A_j\}$$

est ouvert dans X^j;

(c) *pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$ et pour tout point $y^j \in X^j$ l'ensemble*

$$\{x_j \in X_j |\ (x_j, y^j) \in B_j\}$$

est convexe non-vide.

Alors l'intersection $\bigcap_{i=1}^n B_i$ est non-vide.

Preuve. On obtient l'énoncé du théorème en appliquant le Théorème 2 aux fonctions caractéristiques des ensembles $\{A_i\}$, $\{B_i\}$.

Le théorème de point fixe suivant établi dans notre note [2] représente la formulation géométrique du Théorème 1.

Corollaire 6. *Soient X un convexe compact non-vide et A: $X \to 2^X$ une application multivoque satisfaisant aux conditions suivantes*:

(i) *$A^{-1}y$ est convexe pour tout $y \in X$*;

(ii) *il existe une application B: $X \to 2^X$ telle que*:

(a) *$Bx \subset Ax$ pour tout $x \in X$*;

(b) *$B^{-1}y \neq 0$ pour tout $y \in X$*;

(c) *Bx est ouvert pour tout $x \in X$.*

Alors il existe $w \in X$ tel que $w \in Aw$.

Preuve. On obtient le Corollaire 6 en appliquant le Théorème 1 aux fonctions φ, ψ: $X \times X \to \mathbf{R}$ définies pour tout $(x, y) \in X \times X$ par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Bx, \\ 0 & \text{si } y \notin Bx, \end{cases} \qquad \psi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in Ax, \\ 0 & \text{si } y \notin Ax. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] J. P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North-Holland, Amsterdam 1979.

[2] H. Ben-El-Mechaiekh, P. Deguire et A. Granas, *Une alternative non linéaire en analyse convexe et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 295 (1982), 257–259.

[3] —, —, —, *Points fixes et coïncidences pour les fonctions multivoques II (Applications de type φ et φ^*)*, ibid. 295 (1982), 381–384.

[4] C. Berge, *Espaces topologiques, Fonctions multivoques*, Dunod, Paris 1959.

[5] H. Brézis, L. Nirenberg and G. Stampacchia, *A remark on Ky Fan's minimax principle*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) 6 (1972), 293–300.

[6] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Vol. I, Monografie Mat. 61, PWN, Warszawa 1982, 209 pp.

[7] K. Fan, *Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations*, Math. Z. 68 (1957), 205–217.

[8] K. Fan, *Convex sets and their applications*, Lecture Notes, Appl. Math. Div., Argonne Nat. Lab., Argonne, Ill. 1959.
[9] —, *A generalisation of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. 142 (1961), 305–310.
[10] —, *Sur un théorème minimax*, C. R. Acad. Sci. Paris, Groupe 1, 259 (1964), 3925–3928.
[11] —, *Applications of a theorem concerning sets with convex sections*, Math. Ann. 163 (1966), 189–203.
[12] —, *A minimax inequality and applications*, in: O. Shisha (ed.), Inequalities III, Academic Press, New York and London 1972, 103–113.
[13] —, *Some properties of convex sets related to fixed point theorems*, Math. Ann. 266 (1984), 519–537.
[14] A. Granas, *KKM-maps and their applications to nonlinear problems*, in: The Scottish Book, R. D. Mauldin (ed.), Birkhäuser, Boston 1981, 45–61.
[15] A. Granas and F.-C. Liu, *Remark on a theorem of Ky Fan concerning systems of inequalities*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 11 (4) (1983), 639–643.
[16] J. Gwinner, *On fixed points and variational inequalities—a circular tour*, Nonlinear Anal. 5 (1981), 565–583.
[17] P. Hartman and G. Stampacchia, *On some non-linear elliptic differential-functional equations*, Acta Math. 115 (1966), 271–310.
[18] C. Horvath, *Points fixes et coïncidences pour les applications multivoques sans convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 403–406.
[19] B. Knaster, C. Kuratowski und S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. 14 (1929), 132–137.
[20] M. Lassonde, *On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics*, J. Math. Anal. Appl. 97 (1983), 151–201.
[21] F.-C. Liu, *A note on the von Neumann–Sion Minimax Principle*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 6 (2) (1978), 517–524.
[22] U. Mosco, *Implicit variational problems and quasi variational inequalities*, in: Lecture Notes in Math. 543, Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, Bruxelles, 1975, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1976, 83–156.
[23] J. Nash, *Non-cooperative games*, Ann. of Math. 54 (1951), 286–295.
[24] J. von Neumann, *Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 8 (1937), 73–83.
[25] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. 8 (1958), 171–176.
[26] E. Tarafdar and H. B. Thompson, *On Ky Fan's Minimax Principle*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 26 (1978), 220–226.
[27] K. Sakamaki and W. Takahashi, *Systems of convex inequalities and their applications*, J. Math. Anal. Appl. 70 (1979), 445–459.
[28] C. L. Yen, *A minimax inequality and its applications to variational inequalities*, Pacific J. Math. 97 (1981), 477–481.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
Montréal, Canada

Received October 12, 1984 (2003)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXIII. (1986)

The size of sums of sets

by

DANIEL M. OBERLIN* (Tallahassee, Fl.)

Abstract. Lower bounds are obtained for the Haar measure of the set $K+E$ when K and E are suitable subsets of a locally compact abelian group.

Let G be a locally compact abelian group with Haar measure m. Suppose that K and E are measurable subsets of G such that the sum set $K+E = \{k+e\colon k\in K,\ e\in E\}$ is also measurable. What can one say about $m(K+E)$? The papers [1], [2], [3], and a substantial portion of the book [4] are concerned with various aspects of this question. Here we are interested in inequalities which give a lower bound for $m(K+E)$. One example of such an inequality is the following theorem, a corollary of Theorem 2.2 in [4].

THEOREM A. *If G is a torus group $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ for some positive integer n, and if $m(K)+m(E)\leqslant m(G)$, then*

$$m(K)+m(E)\leqslant m(K+E).$$

This satisfying inequality provides nontrivial information when both $m(K)$ and $m(E)$ are positive. But what can one say if, for example, $m(K)=0$? Here the situation has a somewhat different flavor which is typified by the next theorem if $m(K-K)\neq 0$.

THEOREM B. *Suppose K and E are subsets of the locally compact abelian group G with K compact, E and $K+E$ measurable. Then*

$$\sqrt{m(K-K)\,m(E)}\leqslant m(K+E).$$

Theorem B is essentially Proposition 4 below in the case $n=2$, in which case the constant δ is easily checked to be $m(K_1-K_2)$. Theorem B generalizes and explains the result in [5].

The purpose of this paper, then, is to investigate the existence of inequalities of the form

$$\varepsilon\cdot m(E)^{\beta}\leqslant m(K+E) \tag{1}$$

holding for some fixed subset $K\subseteq G$, for some $\beta\in(0,1)$ and $\varepsilon>0$ depending

* Partially supported by the National Science Foundation.