$A_k = L_{a_k}$, $B_k = R_{a_k}$, $k = 1, \ldots, n$ are Hermitian operators on $U$ (as for every $a \in U$, $e^{itL_a} x = e^{ita} x$ and $e^{itR_a} x = x e^{ita}$, $t \in \mathbf{R}$) and $P(A_1, \ldots, A_n) x = P(a_1, \ldots, a_n) x$, $P(B_1, \ldots, B_n) x = x P(a_1, \ldots, a_n)$.

**Acknowledgement.** The author would like to thank professor T. G. Genchev of Sofia University for a valuable consultation.

### References

[1] S. T. M. Ackermans, S. J. L. van Eijndhoven and F. J. L. Martens, *On almost commuting operators*, Indag. Math. 45 (4) (1983), 385–391.
[2] S. K. Berberian, *Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam*, Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1) (1978), 113–114.
[3] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2, Cambridge 1971.
[4] Hr. N. Boyadzhiev, *A generalization of the Fuglede–Putnam theorem*, C. R. Acad. Bulgare Sci. 36 (12) (1983), 1503–1505.
[5] M. J. Crabb and P. G. Spain, *Commutators and normal operators*, Glasgow Math. J. 18 (1977), 197–198.
[6] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I, Interscience Publ., N. Y. 1958.
[7] Che-Kao Fong, *Normal operators on Banach spaces*, Glasgow Math. J. 20 (1979), 163–168.
[8] E. A. Gorin, Referat. Zh. Mat. 12B911, 1977 (in Russian).
[9] — and M. I. Karakhanyan, *An asymptotic version of the Fuglede–Putnam theorem about commutators of elements of Banach algebras*, Mat. Zametki (Math. Notes) 22 (2) (1977), 179–188 (in Russian).
[10] F. Kittaneh, *On generalized Fuglede–Putnam theorems of Hilbert–Schmidt type*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (2) (1983), 293–298.
[11] C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics*, Springer, Berlin 1967.
[12] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, N. Y. 1973.
[13] G. E. Shilov, *Mathematical Analysis. Second Special Course*, Nauka, Moscow 1965 (in Russian).
[14] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin 1965.

FACULTY OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF SOFIA
SOFIA, BULGARIA

*Received March 5, 1984* (1959)
*Revised version April 11, 1984*

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXI. (1985)

# Bemerkung zu einem Satz von Akcoglu und Krengel

von

WOLFGANG STADJE (Osnabrück)

**Abstract.** For measurable $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ let $\|f\|_{\text{t.v.}}$ be the total variation and

$$\|f\|_{\text{ess.t.v.}} := \overline{\lim_{t \to 0+0}}\, t^{-1} \int |f(x+t) - f(x)|\, dx.$$

If $\|f\|_{\text{ess.t.v.}} < \infty$,

$$g(x) := \lim_{t \to 0+0} t^{-1} \int_x^{x+t} f(u)\, du$$

is well-defined, continuous from the right, $f = g$ a.e., $\|g\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$, and for every $\tilde{f}$ satisfying $f = \tilde{f}$ $\lambda$-a.e. and $\|\tilde{f}\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$, $\tilde{f}(x)$ lies between $g(x)$ and $g(x-0)$ for all $x \in \mathbf{R}$. This result sharpens a theorem of Akcoglu and Krengel.

Für eine meßbare Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ bezeichne $\|f\|_{\text{t.v.}}$ die Totalvariation und

$$\|f\|_{\text{ess.t.v.}} := \overline{\lim_{t \to 0+0}}\, t^{-1} \int |f(x+t) - f(x)|\, dx \tag{1}$$

die essentielle Totalvariation von $f$. (Der Grenzwert in (1) existiert, was wir aber nicht verwenden werden.) $\lambda$ sei das Lebesguemaß auf $\mathbf{R}$. Akcoglu und Krengel beweisen in [1] den folgenden interessanten

SATZ. *Für jede meßbare Funktion $f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ und jedes $\tilde{f}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f = \tilde{f}$ $\lambda$-f.ü. gilt $\|f\|_{\text{ess.t.v.}} \leqslant \|\tilde{f}\|_{\text{t.v.}}$. Es gibt ein $\tilde{f}$ mit $f = \tilde{f}$ $\lambda$-f.ü. und $\|f\|_{\text{ess.t.v.}} = \|\tilde{f}\|_{\text{t.v.}}$.*

Ziel dieser Note ist der Beweis der folgenden Verschärfung des obigen Satzes:

*Sei $\|f\|_{\text{ess.t.v.}} < \infty$. Dann existiert für jedes $x \in \mathbf{R}$*

$$g(x) := \lim_{t \to 0+0} t^{-1} \int_x^{x+t} f(u)\, du. \tag{2}$$

*$g$ ist rechtsstetig, $f = g$ $\lambda$-f.ü., $\|g\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$, und für jedes $\tilde{f}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f = \tilde{f}$ $\lambda$-f.ü. und $\|\tilde{f}\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$ gibt es ein $\alpha$: $\mathbf{R} \to [0, 1]$ mit*

$$\tilde{f}(x) = \alpha(x) g(x) + (1 - \alpha(x)) g(x-0). \tag{3}$$

AMS (1970) Subject Classification: 26A45.

Unser Beweis benutzt nur zwei wohlbekannte Hilfsmittel: den Lebesgueschen Differentiationssatz und den Hellyschen Auswahlsatz. Das folgende Lemma gibt zunächst einen elementaren Beweis des zweiten Teils des Satzes (die erste Aussage wird bereits in [1], S. 205, elementar hergeleitet).

LEMMA. *Sei $\|f\|_{\text{ess.t.v.}} < \infty$. Dann gibt es ein $\bar{f}$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ mit $f = \bar{f}$ $\lambda$-f.ü. und $\|\bar{f}\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$.*

**Beweis.** Sei $t_n \downarrow 0$ mit $t_n^{-1} \int |f(x+t_n) - f(x)|\, dx \to \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$. Sei zunächst $f$ beschränkt. Für die dann wohldefinierte, absolut stetige Funktion

$$(4) \qquad f_n(x) := t_n^{-1} \int_x^{x+t_n} f(u)\, du, \qquad x \in \boldsymbol{R}$$

gilt $f_n'(x) = t_n^{-1}(f(x+t_n) - f(x))$ $\lambda$-f.ü., also $\|f_n\|_{\text{t.v.}} = \int |f_n'(x)|\, dx \to \|f\|_{\text{ess.t.v.}} < \infty$. Nach dem Hellyschen Auswahlsatz kann man eine punktweise konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ finden. Sei $\bar{f}(x) := \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x)$. Wegen $f_n \to f$ $\lambda$-f.ü. (siehe z. B. [2], S. 284) folgt $\bar{f} = f$ $\lambda$-f.ü. und $\|\bar{f}\|_{\text{t.v.}} \leq \varliminf_{k \to \infty} \|f_{n_k}\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$. Ist $f$ unbeschränkt, so sei $f^{(N)}(x) := f(x)$, falls $|f(x)| \leq N$, und $f^{(N)}(x) := \pm N$, falls $f(x) > N$ bzw. $< -N$. Dann gibt es ein $\bar{f}^{(N)}$ mit $\bar{f}^{(N)} = f^{(N)}$ $\lambda$-f.ü. und $\|\bar{f}^{(N)}\|_{\text{t.v.}} = \|f^{(N)}\|_{\text{ess.t.v.}}$. Nach dem Hellyschen Satz gibt es eine Teilfolge $\bar{f}^{(N_k)}$, für die $\lim_{k \to \infty} \bar{f}^{(N_k)}(x) =: \bar{f}(x)$ für alle $x \in \boldsymbol{R}$ existiert; ferner gilt

$$\|\bar{f}\|_{\text{t.v.}} \leq \varliminf_{k \to \infty} \|\bar{f}^{(N_k)}\|_{\text{t.v.}} = \lim_{N \to \infty} \|f^{(N)}\|_{\text{ess.t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$$

(die letzte Gleichung folgt aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz).

**Beweis des Satzes.** Wir beweisen nun die oben angekündigte Verschärfung des Satzes: Sei zunächst $\tilde{g}(x) := \bar{f}(x+0)$, $x \in \boldsymbol{R}$, wobei $\bar{f}$ die im Beweis des Lemmas konstruierte Funktion sei. Wegen $\|\bar{f}\|_{\text{t.v.}} < \infty$ ist $\tilde{g}$ wohldefiniert. $\tilde{g}$ ist rechtsstetig, also gilt

$$t^{-1} \int_x^{x+t} \tilde{g}(u)\, du \to \tilde{g}(x) \qquad (t \to 0+0) \qquad \text{für alle } x \in \boldsymbol{R}.$$

Andererseits ist offenbar $\tilde{g} = \bar{f} = f$ $\lambda$-f.ü., so daß sich für $t \to 0+0$ auch

$$t^{-1} \int_x^{x+t} f(u)\, du \to \tilde{g}(x)$$

ergibt. Daher ist $g$ in (2) wohldefiniert, rechtsstetig und erfüllt $g = f$ $\lambda$-f.ü. Ferner erhält man

$$\|g\|_{\text{t.v.}} = \|\bar{f}(\cdot + 0)\|_{\text{t.v.}} = \|\bar{f}\|_{\text{t.v.}},$$

folglich $\|g\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$.

Sei nun $\bar{f}$ mit $\bar{f} = f$ $\lambda$-f.ü. und $\|\bar{f}\|_{\text{t.v.}} = \|f\|_{\text{ess.t.v.}}$ gegeben. Offenbar gilt



dann $\bar{f}(x+0) = g(x)$, $\bar{f}(x-0) = g(x-0)$ für alle $x \in \boldsymbol{R}$; ferner folgt für jedes $x \in \boldsymbol{R}$ mit $\bar{f}(x) = g(x)$

$$(5) \qquad \|\bar{f}\|_{\text{t.v.},(-\infty, x]} = \|g\|_{\text{t.v.},(-\infty, x]},$$

$$(6) \qquad \|\bar{f}\|_{\text{t.v.},[x, \infty)} = \|g\|_{\text{t.v.},[x, \infty)}.$$

Dabei sei für ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \boldsymbol{R}$ $\|f\|_{\text{t.v.},I}$ die Totalvariation von $f$ auf $I$. Sei nun $x_0 \in \boldsymbol{R}$ gegeben. Man wähle Folgen $x_n \downarrow x_0$, $y_n \uparrow x_0$ mit $\bar{f}(x_n) = g(x_n)$, $\bar{f}(y_n) = g(y_n)$. Dann gelten die Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} \|\bar{f}\|_{\text{t.v.}} &= \|\bar{f}\|_{\text{t.v.},[x_0, \infty)} + \|\bar{f}\|_{\text{t.v.},(-\infty, x_0]} \\ &= \lim_{n \to \infty} \|\bar{f}\|_{\text{t.v.},[x_n, \infty)} + |\bar{f}(x_0) - \bar{f}(x_0+0)| \\ &\quad + \lim_{n \to \infty} \|\bar{f}\|_{\text{t.v.},(-\infty, y_n]} + |\bar{f}(x_0) - \bar{f}(x_0-0)|, \end{aligned}$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} \|g\|_{\text{t.v.}} &= \|g\|_{\text{t.v.},[x_0, \infty)} + \|g\|_{\text{t.v.},(-\infty, x_0]} \\ &= \lim_{n \to \infty} \|g\|_{\text{t.v.},[x_n, \infty)} + |g(x_0) - g(x_0+0)| \\ &\quad + \lim_{n \to \infty} \|g\|_{\text{t.v.},(-\infty, y_n]} + |g(x_0) - g(x_0-0)|, \end{aligned}$$

also wegen $\|\bar{f}\|_{\text{t.v.}} = \|g\|_{\text{t.v.}}$, (5), (6) und $\bar{f}(x_0+0) = g(x_0)$

$$|g(x_0) - \bar{f}(x_0)| + |\bar{f}(x_0) - g(x-0)| = |g(x_0) - g(x_0-0)|.$$

Daher ist $\bar{f}(x_0)$ eine Konvexkombination von $g(x_0)$ und $g(x_0-0)$.

**Bemerkung.** Im Falle $\|f\|_{\text{ess.t.v.}} < \infty$ gilt für jede Folge $t_n \to 0$: $t_n^{-1} \times (f(x+t_n) - f(x))$ besitzt für $\lambda$-fast alle $x \in \boldsymbol{R}$ einen Grenzwert. $f$ ist $\lambda$-f.ü. "differenzierbar bezüglich $(t_n)$". Ist $\|f\|_{\text{ess.t.v.}} = \infty$, so läßt sich immerhin zeigen: Für jede schnell genug gegen 0 konvergente Folge $(t_n)$ gibt es eine Nullmenge $N \subset \boldsymbol{R}$, so daß

$$f(x+t_n) \to f(x) \quad (n \to \infty) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R} \setminus N$$

gilt; jede meßbare Funktion $f$ ist also $\lambda$-f.ü. "stetig bezüglich $(t_n)$", falls $t_n$ nur schnell genug gegen 0 strebt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei nämlich $f$ integrierbar (sonst betrachte man zunächst $1_{(-N,N)} \max(\min(f, N), -N)$ und dann $N \to \infty$). Es folgt $\int |f(x+s) - f(x)|\, dx \to 0$ $(s \to 0)$, so daß es eine Folge $s_n > 0$ mit

$$\int |f(x+t) - f(x)|\, dx < n^{-2} \qquad \forall t \in [-s_n, s_n]$$

gibt. Sei nun $|t_n| \leq s_n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Offenbar folgt dann

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f(x+t_n) - f(x)|\, dx < \infty,$$

daher für $\lambda$-fast alle $x \in \boldsymbol{R}$ $f(x+t_n) \to f(x)$.

## Literatur

[1] M. A. Akcoglu and U. Krengel, *A differentiation theorem for additive processes*, Math. Z. 163 (1978), 199–210.
[2] I. P. Natanson, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Akademie-Verlag, Berlin 1981.

FACHBEREICH MATHEMATIK, UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

*Received March 19, 1984* (1962)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXI. (1985)

# Unique continuation for Schrödinger equations in dimensions three and four

by

KAZIMIERZ SENATOR (Warszawa)

**Abstract.** The unique continuation property for solutions of the Schrödinger equations (or inequalities) in dimensions three and four is proved. The $L_p$-conditions assumed for the strong uniqueness are shown to be optimal. The main result follows from the Carleman type inequalities, which are obtained from $L_p$-estimates of integral operators.

**1. Introduction.** The study of the unique continuation property of solutions to differential equations with nonanalytic coefficients began with a paper by Carleman [4] (in 2 dimensions), in which he introduced the important method of weighted inequalities. Then the unique continuation theorem was proved for the second order elliptic equations under the assumption that the coefficients of the lower order terms are of class $L_\infty$. The case where the leading part is the Laplacian was considered by Müller [12] and Heinz [8] while Aronszajn [2] and Cordes [5] studied equations whose leading part had variable coefficients. The sufficiency of the Lipschitz continuity was shown by Hörmander [9] and in a stronger form by Aronszajn, Krzywicki and Szarski [3]. An example given by Pliś [13] shows that it is almost a necessary condition.

There are partial results on the unique continuation for the equations with unbounded lower order coefficients. Sufficient conditions are given e.g. by Schechter and Simon [14], Amrein, Berthier and Georgescu [1] and Hörmander [10]. Our result on the strong uniqueness concerns rather special cases but the $L_p$-conditions on the coefficients are sharp.

In this paper we consider differential inequalities of the form

$$|\Delta u(x)| \leqslant a(x)|u(x)| \tag{1.1}$$

where the function $a(x)$ is assumed to be of class $L_{\sigma,\mathrm{loc}}$, $u$ is a function on a connected subset $\Omega$ of $\boldsymbol{R}^n$ ($n \geqslant 3$), and $\Delta$ is the Laplacian. Without loss of generality one may replace inequality (1.1) by the Schrödinger equation $\Delta u + Vu = 0$ with $|V(x)| \leqslant a(x)$.

We prove the strong uniqueness for solutions of (1.1) under the assumption $\sigma \geqslant n/2$ for $n = 3$ or 4. This improves a result of [1], where it is