algebra of those functions f in $C(X, M_2)$ which have analytic extensions $\tilde{f}$ to the unit disc D such that $\tilde{f}(0)$ are scalar multiples of the identity matrix, then A has a multiplicative functional; but, for each $\xi \in X$, $A_\xi = M_2$, and hence there is no multiplicative functional on A_ξ.

References

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed spaces and elements of normed algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series 2 (1971), Cambridge.
[2] R. Harte, *Spectral mapping theorems*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 72 (1972), 89–107.
[3] H. Radjavi and P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, New York 1973.
[4] D. F. Sarason, *On spectral sets having connected complement*, Acta Sci. Math. Szeged 26 (1965), 289–299.
[5] Z. Słodkowski and W. Żelazko, *On joint spectra of commuting families of operators*, Studia Math. 50 (1974), 127–148.
[6] W. Żelazko, *Banach Algebras*, PWN, Warszawa 1973.

Received January 6, 1984 (1948)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXI. (1985)

Sur les espaces stables universels

par

SYLVIE GUERRE (Paris)

Abstract. We consider the class $\mathscr{A}$ of Banach spaces X such that the set of types on X is separable for the topology of uniform convergence on bounded sets of X. This class contains the class $\mathscr{B}$ of separable stable spaces. We construct an ordinal index for $\mathscr{A}$ and we prove that there is no element Y of $\mathscr{A}$, 1-universal for $\mathscr{B}$ in the sense that every element of $\mathscr{B}$ is at Banach–Mazur distance 1 of subspaces of Y.

Introduction. L'existence d'espace universel ou isométriquement universel pour une classe d'espaces $\mathscr{A}$ a été étudiée dans de nombreux cadres. Notamment dans [1], il est prouvé que l'espace des fonctions continues réelles sur l'intervalle [0, 1] est isométriquement universel pour les espaces de Banach séparables. Dans [6], il apparaît un résultat négatif: il n'a y pas d'espace de Banach à dual séparable, universel pour les espaces de Banach réflexifs et séparables. Ce dernier résultat a été étendu à la classe des espaces à duaux séparables dans [7].

Nous nous inspirons ici des méthodes de [6] pour prouver un résultat analogue pour les espaces de Banach dont l'espace des types est séparable pour la topologie uniforme. (Ces espaces sont nécessairement séparables). Cette classe d'espaces contient les espaces de Banach stables et séparables. Dans toute la suite nous utiliserons les techniques de stabilité qui figurent dans [4]. Nous définissons une notion intermédiaire entre espace universel et espace isométriquement universel, adaptée à ce problème:

Soient X et Y deux espaces de Banach. On notera $d(X, Y)$ la distance de Banach–Mazur de X à Y. Rappelons que $d(X, Y) = 1$ si et seulement si pour tout $\eta > 0$ il existe un isomorphisme T de X sur Y tel que:

$$\forall x \in X, \quad \|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant (1+\eta)\|x\|.$$

On dira qu'un espace de Banach X est 1-*universel* pour une classe d'espaces de Banach $\mathscr{A}$ si et seulement si tout espace Z de $\mathscr{A}$ est à distance 1 des sous-espaces de X, c'est-à-dire: $\operatorname{Inf}\{d(Z, Y) |\ Y \subset X\} = 1$.

Dans la première partie, nous construisons un indice pour les espaces ayant un espace de types séparable pour la topologie uniforme en suivant les méthodes de [6] et nous examinons ses propriétés.

Dans la deuxième partie, pour tout ordinal dénombrable α, nous construisons un espace de Banach stable et séparable, dont l'indice est supérieur à α. Ceci permet de montrer qu'il n'y a pas d'espace de Banach dont l'espace de types est séparable pour la topologie uniforme, 1-*universel* pour la classe des espaces dont l'espace de types est séparable pour la topologie uniforme. On obtient le même résultat pour la classe des espaces stables et séparables.

Un espace de Banach séparable X est *stable* si pour toutes suites bornées $(x_n)_{n\in N}$ et $(y_m)_{m\in N}$ et tous ultrafiltres $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ sur N, on a:

$$\lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x_n+y_m\| = \lim_{m,\mathscr{V}} \lim_{n,\mathscr{U}} \|x_n+y_m\|.$$

Nous rappelons les définitions dont nous aurons besoin et qui dans le cas des espaces stables figurent dans [4].

Soit X un espace de Banach séparable.

Un type sur X est une fonction σ de X dans $\boldsymbol{R}$, définie par une suite bornée $(a_n)_{n\in N}$ de X et un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur N, telle que

$$\forall x\in X, \quad \sigma(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \|x+a_n\|.$$

On notera: $\|\sigma\| = \sigma(0) = \lim\limits_{n,\mathscr{U}} \|a_n\|$.

On notera également $\mathscr{F}(X)$ l'ensemble des types sur X et $\mathscr{F}_\lambda(X)$, l'ensemble des types sur X de norme inférieure ou égale à λ.

On munit $\mathscr{F}(X)$ de la topologie de la convergence simple sur X et de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de X.

La topologie simple sur $\mathscr{F}(X)$ est métrisable, séparable et les ensembles $\mathscr{F}_\lambda(X)$ sont compacts pour cette topologie (cf. [4]).

La topologie uniforme sur $\mathscr{F}(X)$ est métrique.

Nous ne considérons ici que des espaces de Banach tels que $\mathscr{F}(X)$ soit séparable pour la topologie uniforme. Il est facile de voir qu'alors, tout ouvert de $\mathscr{F}(X)$ pour la topologie uniforme est un F_σ pour la topologie simple. Les espaces de Banach séparables et stables ont cette propriété. En effet:

LEMME 1. *Si X est un espace de Banach stable et séparable, $\mathscr{F}(X)$ est séparable pour la topologie uniforme.*

Démonstration. Si X est stable, on peut définir le produit de convolution $\sigma*\tau$ de deux types σ et τ définis respectivement par des suites $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_m)_{m\in N}$ et des ultrafiltres $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$, par:

$$\forall x\in X, \quad \sigma*\tau(x) = \lim_{n,\mathscr{U}} \lim_{m,\mathscr{V}} \|x+a_n+b_m\|.$$

Si on note K l'espace $\mathscr{F}(X)$ muni de la topologie de la convergence simple sur X, K est métrisable séparable et réunion dénombrable de compacts $[\mathscr{F}(X) = \bigcup_{n\in N} \mathscr{F}_n(X)]$. De plus $\mathscr{F}(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme s'identifie à un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(K, \boldsymbol{R})$ par l'application qui à un type σ sur X associe f_σ définie par $f_\sigma(\tau) = \|\sigma*\tau\|$ pour $\tau\in K$. C'est donc bien un espace séparable.

Remarque. Il n'est pas difficile de voir que si X a un espace de types séparable pour la topologie uniforme (respectivement: si X est stable et séparable) et si Y est à distance 1 de X, Y a un espace de types séparable pour la topologie uniforme (respectivement: Y est stable et séparable).

I. Definition d'un indice pour les espaces dont l'espace des types est séparable pour la topologie uniforme. Soit X un espace de Banach tel que $\mathscr{F}(X)$ soit séparable pour la topologie uniforme.

On note:

$$X_\lambda = \{x\in X \mid \|x\| \leqslant \lambda\} \text{ pour } \lambda > 0,$$

$$d_{X_\lambda}(\sigma, \tau) = \operatorname{Sup}\{|\sigma(x)-\tau(x)| \mid x\in X_\lambda\} \text{ pour } \sigma \text{ et } \tau \text{ appartenant à } \mathscr{F}(X).$$

DEFINITION I_1. Soit $\lambda > 0$ et $\varepsilon > 0$. Par induction transfinie, on définit une partie $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ de $\mathscr{F}(X)$ pour tout ordinal α par:

(i) $P_0(\varepsilon, X_\lambda) = \mathscr{F}_\lambda(X)$.

(ii) $P_{\alpha+1}(\varepsilon, X_\lambda) = \{\sigma\in P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) \mid$ il existe $(\sigma_n)_{n\in N} \subset P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ convergeant simplement vers σ et telle que $\lim\limits_n d_{X_\lambda}(\sigma_n, \sigma) \geqslant \varepsilon\}$.

(iii) Si α est un ordinal limite,

$$P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) = \bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta(\varepsilon, X_\lambda).$$

Les ensembles $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ ne sont en général pas fermés dans $\mathscr{F}(X)$ pour la topologie de la convergence simple. Nous avons donc besoin d'introduire d'autres ensembles pour définir un indice ayant les propriétés souhaitées. La forme définitive de ces ensembles est dûe à Y. Raynaud.

DEFINITION I_2. Par induction transfinie, on définit des parties $Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ pour tout ordinal dénombrable α par:

(i) $Q_0(\varepsilon, X_\lambda) = \mathscr{F}_\lambda(X)$.

(ii) $Q_{\alpha+1}(\varepsilon, X_\lambda)$ est l'adhérence simple dans $\mathscr{F}(X)$ de $\{\sigma\in Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) \mid$ il existe une suite $(\sigma_n)_{n\in N}$ de $Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ convergeant simplement vers σ et telle que $\lim\limits_n d_{X_\lambda}(\sigma_n, \sigma) \geqslant \varepsilon\}$.

(iii) Si α est un ordinal limite,

$$Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) = \bigcap_{\beta<\alpha} Q_\beta(\varepsilon, X_\lambda).$$

Par construction, les ensembles $Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ sont fermés donc compacts pour la topologie de la convergence simple.

Les deux lemmes suivants vont permettre de définir un indice:

LEMME I_1. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Pour tout ordinal α on a:*

(a) *$P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ est fermé dans $\mathscr{F}(X)$ pour la topologie uniforme.*

(b) *$P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ est un espace polonais pour la topologie de la convergence simple de $\mathscr{F}(X)$.*

(c) *$P_{\alpha+1}(\varepsilon, X_\lambda) \subset P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ et $P_{\alpha+1}(\varepsilon, X_\lambda) \neq P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ si $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) \neq \emptyset$.*

(d) *Il existe un ordinal dénombrable α tel que: $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) = \emptyset$.*

Démonstration. (a) est immédiat.

(b) $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ est un fermé pour la topologie uniforme et donc un G_δ dans $\mathscr{F}(X)$ muni de la topologie de la convergence simple. C'est bien un espace polonais pour cette topologie (cf. [5]).

(c) Si $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) \neq \emptyset$, considérons l'identité de $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ muni de la topologie simple dans $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ muni de la topologie uniforme; comme tout ouvert de $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ pour la topologie uniforme est un F_σ pour la topologie simple, cette application est de première classe de Baire ([5]) d'un espace de Baire (d'après (b)) dans un espace métrique complet séparable. D'après le théorème de Baire, ses points de continuité forment un G_δ-dense dans $P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$ muni de la topologie simple. Ceux-ci n'appartiennent évidemment pas à $P_{\alpha+1}(\varepsilon, X_\lambda)$, ce qui prouve que $P_{\alpha+1}(\varepsilon, X_\lambda) \neq P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$.

(d) est une conséquence de (a), (c) et [5].

LEMME I_2. *Soient $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Pour tout ordinal α on a:*

$$P_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) \subset Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) \subset P_\alpha(\varepsilon/2, X_\lambda).$$

Démonstration. La première inclusion est évidente. Supposons que la seconde inclusion soit vérifiée pour tout ordinal β, $\beta < \alpha$ et supposons d'abord $\alpha = \alpha'+1$. Soit $\sigma \in Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda)$. Il existe une suite $(\sigma^m)_{m\in N}$ de $Q_{\alpha'}(\varepsilon, X_\lambda)$ convergeant simplement vers σ, telle que pour tout $m \in N$ il existe une suite $(\sigma_n^m)_{n\in N}$ de $Q_{\alpha'}(\varepsilon, X_\lambda)$ convergeant simplement vers σ^m et telle que $\lim_n d_{X_\lambda}(\sigma_n^m, \sigma^m) \geq \varepsilon$. Comme $Q_{\alpha'}(\varepsilon, X_\lambda)$ est fermé pour la topologie simple, σ appartient à $Q_{\alpha'}(\varepsilon, X_\lambda)$ et donc aussi à $P_{\alpha'}(\varepsilon/2, X_\lambda)$. De plus la suite $(\sigma^m)_{m\in N}$ et la suite double $(\sigma_n^m)_{(n,m)\in N^2}$ sont aussi dans $P_{\alpha'}(\varepsilon/2, X_\lambda)$ et convergent toutes deux simplement vers σ. Deux cas se présentent:

ou bien: $\lim_n \operatorname{Sup} d_{X_\lambda}(\sigma^m, \sigma) \geq \varepsilon/2$

et alors $\sigma \in P_\alpha(\varepsilon/2, X_\lambda)$;

ou bien: $\forall \varepsilon' > 0, \exists M_{\varepsilon'}$ tel que:

$$m \geq M_{\varepsilon'} \Rightarrow d_{X_\lambda}(\sigma^m, \sigma) < \varepsilon/2+\varepsilon'.$$

On construit par récurrence une suite $(\sigma_{n_k}^{m_k})_{k\in N}$ convergeant simplement vers σ, telle que pour $k \in N$ on ait: $m_k \geq M_{1/k}$ et $d_{X_\lambda}(\sigma_{n_k}^{m_k}, \sigma^{m_k}) \geq \varepsilon - 1/k$. On en déduit, pour tout $k \in N$:

$$d_{X_\lambda}(\sigma_{n_k}^{m_k}, \sigma) \geq d_{X_\lambda}(\sigma_{n_k}^{m_k}, \sigma^{m_k}) - d_{X_\lambda}(\sigma^{m_k}, \sigma) \geq \varepsilon/2 - 2/k.$$

Quitte à extraire une sous-suite de $(\sigma_{n_k}^{m_k})_{k\in N}$ pour que la limite existe, on obtient alors:

$$\lim_k d_{X_\lambda}(\sigma_{n_k}^{m_k}, \sigma) \geq \varepsilon/2$$

donc

$$\sigma \in P_\alpha(\varepsilon/2, X_\lambda).$$

Le cas où α est un ordinal limite est évident.

De ces deux lemmes, on déduit qu'il existe un ordinal dénombrable α tel que $Q_{\alpha+1}(\varepsilon, X_\lambda) = \emptyset$ et $Q_\alpha(\varepsilon, X_\lambda) \neq \emptyset$ et ceci nous permet de donner la définition suivante:

DEFINITION I_3. Posons:

$$\mathfrak{s}(\varepsilon, X) = \operatorname{Sup}\{\alpha < \omega_1 \mid Q_\alpha(\varepsilon, X_1) \neq \emptyset\},$$

$$\mathfrak{s}(X) = \operatorname{Sup}\{\mathfrak{s}(\varepsilon, X) \mid \varepsilon > 0\}.$$

On dira que $\mathfrak{s}(X)$ est *l'indice* de X.

De l'étude précédente on déduit:

PROPOSITION I_1. *Si X est tel que $\mathscr{F}(X)$ soit séparable pour la topologie uniforme alors:*

$$\mathfrak{s}(\varepsilon, X) < \omega_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{s}(X) = \operatorname{Sup}\{\mathfrak{s}(1/n, X), n \in N\} < \omega_1.$$

Nous pouvons maintenant examiner les propriétés de cet indice qui font l'objet des deux propositions suivantes:

PROPOSITION I_2. *Soit Y un espace de Banach séparable tel que $\mathscr{F}(Y)$ soit séparable pour la topologie uniforme et X un sous-espace de Y. Alors:*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathfrak{s}(\varepsilon, X) \leq \mathfrak{s}(\varepsilon, Y).$$

Démonstration. Soit σ un type sur X. Conformément à [2], on dira que $\tilde{\sigma}$ est une *extension* de σ à Y si $\tilde{\sigma}$ est un type sur Y et vérifie:

$$\forall x \in X, \quad \sigma(x) = \tilde{\sigma}(x).$$

Il est clair que tout type sur X a une extension à Y. On va montrer par induction transfinie que si σ appartient à $Q_\alpha(\varepsilon, X_1)$, il existe une extension $\tilde{\sigma}$ de σ à Y, appartenant à $Q_\alpha(\varepsilon, Y_1)$.

Supposons que ceci soit vrai pour tout ordinal β, $\beta < \alpha$. Si $\alpha = \alpha'+1$ et si σ appartient à $Q_\alpha(\varepsilon, X_1)$, il existe une suite $(\sigma^m)_{m\in N}$ de $Q_{\alpha'}(\varepsilon, X_1)$ convergeant simplement vers σ telle que pour tout $m \in N$, il existe une suite $(\sigma_n^m)_{n\in N}$ de

$Q_{\alpha'}(\varepsilon, X_1)$ convergeant simplement vers σ^m et vérifiant $\lim_n d_{X_1}(\sigma_n^m, \sigma^m) \geqslant \varepsilon$. Par hypothèse, il existe des extensions $\tilde{\sigma}_n^m$ des σ_n^m à Y pour tout m et n appartenant à N, qui appartiennent à $Q_{\alpha'}(\varepsilon, Y_1)$. Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que pour m fixé, $(\tilde{\sigma}_n^m)_{n\in N}$ converge simplement. Sa limite est évidemment une extension $\tilde{\sigma}^m$ de σ^m à Y et appartient à $Q_{\alpha'}(\varepsilon, Y_1)$ car $Q_{\alpha'}(\varepsilon, Y_1)$ est fermé pour la topologie simple. De plus, $\forall m\in N$:

$$\lim_n \operatorname{Inf} d_{Y_1}(\tilde{\sigma}_n^m, \tilde{\sigma}^m) \geqslant \lim_n d_{X_1}(\sigma_n^m, \sigma^m) \geqslant \varepsilon.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\tilde{\sigma}^m)_{m\in N}$ converge simplement. Sa limite est une extension de σ et appartient à $Q_\alpha(\varepsilon, Y_1)$ d'après ce qui précède.

Si α est un ordinal limite et si σ appartient à $Q_\alpha(\varepsilon, X_1)$, pour tout $\beta < \alpha$ il existe des extensions $\tilde{\sigma}_\beta$ de σ à Y appartenant à $Q_\beta(\varepsilon, Y_1)$. Toute valeur d'adhérence simple de $(\tilde{\sigma}_\beta)_{\beta<\alpha}$ est une extension de σ à Y appartenant à $\bigcap_{\beta<\alpha} Q_\beta(\varepsilon, Y_1) = Q_\alpha(\varepsilon, Y_1)$ car ces parties sont simplement fermées. Ceci prouve donc que si $Q_\alpha(\varepsilon, X_1) \neq \emptyset$ alors $Q_\alpha(\varepsilon, Y_1) \neq \emptyset$ et cela implique la proposition I_2.

Proposition I_3. *Si X a un espace de types séparable pour la topologie uniforme et si $d(X, Y) = 1$, alors*

$$\mathfrak{s}(X) = \mathfrak{s}(Y).$$

Ce résultat est une conséquence des deux lemmes suivants:

Lemme I_3. *Avec les notations précédentes, si $0 < \eta < \varepsilon/2$ et si $Q_\alpha(\varepsilon, X_1) \neq \emptyset$, alors $Q_\alpha(\varepsilon - 2\eta, Y_{1+\eta}) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $0 < \eta < \varepsilon/2$. Comme $d(X, Y) = 1$, il existe un isomorphisme T de X sur Y tel que: $\forall x\in X$, $\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant (1+\eta)\,\|x\|$.

Si σ est un type sur X, défini par une suite $(a_n)_{n\in N}$ et un ultrafiltre $\mathscr{U}$, on dira que $\tilde{\sigma}$ est une *image de σ par T* si $\tilde{\sigma}$ est un type sur Y défini par: $\forall y\in Y$, $\tilde{\sigma}(y) = \lim_{n,\mathscr{U}} \|y + Ta_n\|$.

Il est clair que si σ appartient à $\mathscr{F}_1(X)$, toute image $\tilde{\sigma}$ de σ par T appartient à $\mathscr{F}_{1+\eta}(Y)$.

De plus, si σ et τ sont des types sur X de norme inférieure à 1, quelles que soient les images $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ de σ et τ par T, on a:

$$d_{Y_{1+\eta}}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) \geqslant d_{X_1}(\sigma, \tau) - 2\eta.$$

On termine la démonstration de ce lemme en suivant le raisonnement de la proposition I_2 et en remplaçant les extensions de types sur X par les images de ces types par T.

Lemme I_4. *Avec les notations précédentes, si $0 < 2\eta(1+\eta) < \varepsilon'$ et si $Q_\alpha(\varepsilon', Y_{1+\eta}) \neq \emptyset$ alors $Q_\alpha(\varepsilon'/(1+\eta) - 2\eta, Y_1) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soit $0 < 2\eta(1+\eta) < \varepsilon'$ et notons $|||\sigma||| = \operatorname{Sup}(\|\sigma\|, 1)$ pour $\sigma\in\mathscr{F}(Y)$. Il est clair que si σ appartient à $\mathscr{F}_{1+\eta}(Y)$, alors $\sigma/|||\sigma|||$ appartient à $\mathscr{F}_1(Y)$. De plus un calcul simple permet, en utilisant $|||y||| = \operatorname{Sup}(\|y\|, 1)$ pour $y\in Y$, de montrer que si σ et τ sont des types de norme inférieure à $1+\eta$ sur Y, on a:

$$d_{Y_1}\left(\frac{\sigma}{|||\sigma|||}, \frac{\tau}{|||\tau|||}\right) \geqslant \frac{1}{1+\eta} d_{Y_{1+\eta}}(\sigma, \tau) - 2\eta.$$

Ceci permet de montrer que si σ appartient à $Q_\alpha(\varepsilon', Y_{1+\eta})$, $\sigma/|||\sigma|||$ appartient à $Q_\alpha(\varepsilon'/(1+\eta) - 2\eta, Y_1)$.

Des lemmes I_3 et I_4, on déduit que, sous les hypothèses de la proposition I_3, pour tout $\eta > 0$ tel que $(2+\eta)\eta < \varepsilon$, on a:

$$\mathfrak{s}(\varepsilon, X) \leqslant \mathfrak{s}\left(\frac{\varepsilon - 2\eta}{1+\eta} - 2\eta, Y\right).$$

En faisant tendre η puis ε vers 0, on obtient $\mathfrak{s}(X) \leqslant \mathfrak{s}(Y)$. Comme X et Y jouent le même rôle, on en conclut $\mathfrak{s}(X) = \mathfrak{s}(Y)$ et ceci prouve la proposition I_3.

II. Indices de certains espaces stables et séparables. Soit X un espace de Banach; on notera $\boldsymbol{R}\oplus_1 X$ l'ensemble des couples $(\alpha, x)\in \boldsymbol{R}\times X$ muni de la norme $\|(\alpha, x)\| = |\alpha| + \|x\|$ où $\|x\|$ est la norme de x dans X. L'espace $l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$ est l'ensemble des suites d'éléments $(\alpha_n, x_n)_{n\in N}$ de $\boldsymbol{R}\oplus_1 X$, muni de la norme

$$\|(\alpha_n, x_n)_{n\in N}\| = \Big[\sum_{n\geqslant 0} (|\alpha_n| + \|x_n\|)^2\Big]^{1/2}.$$

Il est facile de voir que si X est stable, alors $l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$ l'est aussi (cf. [4]) Les résultats qui suivent s'inspirent d'un exemple de E. Odell.

Lemme II_1. *Soit $0 < \varepsilon < (2-\sqrt{2})$ et soit X un espace de Banach stable et séparable. On a: $\forall \varepsilon > 0$,*

$$\mathfrak{s}(\varepsilon, l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)) \geqslant \mathfrak{s}(\varepsilon, X) + 1.$$

Démonstration. Soit σ un type sur X, de norme inférieure ou égale à 1. σ n'a qu'une seule extension à $\boldsymbol{R}\oplus_1 X$ (que l'on notera encore σ) définie par:

$$\forall (\alpha, x)\in \boldsymbol{R}\oplus_1 X,\quad \sigma(\alpha, x) = |\alpha| + \sigma(x).$$

Pour $n\in N$, on peut définir un type σ_n sur $l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$ par:

$\forall (\alpha_i, x_i)_{i\in N} \in l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$,

$$\sigma_n((\alpha_i, x_i)_{i\in N}) = \Big(\sum_{i\neq n} (|\alpha_i| + \|x_i\|)^2 + [|\alpha_n| + \sigma(x_n)]^2\Big)^{1/2}.$$

On vérifie que σ_n est l'unique extension de σ à $l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$ pour l'injection J_n de $\boldsymbol{R}\oplus_1 X$ dans $l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$ définie par:

$$J_n(\alpha, x) = (z_i)_{i\in N} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_i = 0 \text{ si } i \neq n, \\ z_n = (\alpha, x). \end{cases}$$

Il est également facile de voir que la suite $(\sigma_n)_{n\in N}$ converge vers un type τ de $l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$ défini par:

$$\forall (\alpha_i, x_i)_{i\in N} \in l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X), \quad \tau\big((\alpha_i, x_i)_{i\in N}\big) = \big(\|(\alpha_i, x_i)_{i\in N}\|^2 + \|\sigma\|^2\big)^{1/2}.$$

D'autre part, si σ appartient à $Q_\alpha(\varepsilon, X_1)$, σ_n apartient à $Q_\alpha(\varepsilon, [l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)]_1)$ pour tout $n\in N$ d'après la proposition I_2.

Montrons que τ appartient à $Q_{\alpha+1}(\varepsilon, [l^2(\boldsymbol{R}\oplus X)]_1)$: pour tout $n\in N$, soit X_n l'élément de $l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)$ dont les coordonnées sont nulles sauf la n-ième qui vaut $(1, 0)$. Alors $\|X_n\| = 1$ pour tout $n\in N$ et de plus:

$$\sigma_n(X_n) = 1 + \|\sigma\| = 2,$$
$$\tau(X_n) = (1+\|X_n\|^2)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Donc

$$\lim_n d_{[l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)]_1}(\sigma_n, \tau) \geqslant \lim_n |\sigma_n(X_n) - \tau(X_n)| \geqslant 2-\sqrt{2} \geqslant \varepsilon$$

et ceci prouve le résultat annoncé.

On en déduit que pour $0<\varepsilon<2-\sqrt{2}$,

$$\mathfrak{s}\big(\varepsilon, l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X)\big) \geqslant \mathfrak{s}(\varepsilon, X)+1.$$

Lemme II_2. *Pour tout ordinal dénombrable α, il existe un espace de Banach séparable et stable X^α tel que pour $0<\varepsilon<2-\sqrt{2}$, $\mathfrak{s}(\varepsilon, X) \geqslant \alpha$.*

Démonstration. Soit $0<\varepsilon<2-\sqrt{2}$; on pose

$$X^0 = l^2,$$
$$X^{\alpha+1} = l^2(\boldsymbol{R}\oplus_1 X^\alpha),$$
$$X^\alpha = \sum_{\beta<\alpha} (\oplus_2 X^\beta) \quad \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite.}$$

D'après le lemme II_1, $\mathfrak{s}(\varepsilon, X^{\alpha+1}) \geqslant \mathfrak{s}(\varepsilon, X^\alpha)+1$ et si α est un ordinal limite, d'après la proposition I_2, $\mathfrak{s}(\varepsilon, X^\alpha) \geqslant \sup_{\beta<\alpha} \mathfrak{s}(\varepsilon, X^\beta)$ et ceci prouve le lemme II_2.

Des propriétés I_2 et I_3 et du lemme II_2 on déduit:

Théorème. *Si X est un espace de Banach séparable 1-universel pour les espaces de Banach ayant un espace de types séparable pour la topologie uniforme (respectivement: pour les espaces de Banach stables et séparables), alors l'espace des types sur X n'est pas séparable pour la topologie uniforme.*

Corollaire. *Il n'y a pas d'espace de Banach stable et séparable, 1-universel pour la classe des espaces de Banach stables et séparables.*

Remarque. L'indice des espaces l^p, $1 \leqslant p < +\infty$, est ω et il est possible de montrer à l'aide de [3] que l'indice des espaces L^p pour $1 \leqslant p < +\infty$ est majoré par l'indice de Szlenk d'un espace uniformément convexe, l'indice de ces espaces est donc ω.

Travaux cités

[1] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932.

[2] S. Guerre et M. Levy, *Espaces l^p dans les sous-espaces de L^1*, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (2) (1983), 611–616.

[3] S. Guerre, *Sur les sous-espaces de L^p*, $1 \leqslant p < +\infty$, $p \neq 2$, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de Paris VII (1983–84).

[4] J.-L. Krivine et B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Israel J. Math. 39 (1981), 273–295.

[5] C. Kuratowski, *Topologie*, Vol. I, Warszawa 1958.

[6] W. Szlenk, *The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math. 30 (1968), 53–61.

[7] P. Wojtaszczyk, *On separable Banach spaces containing all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math. 37 (1970), 198–202.

Received February 22, 1984 (1952)