STUDIA MATHEMATICA, T. LXXXI. (1985)

Sätze vom Mazur-Orlicz-Typ

von

JOHANN BOOS (Hagen) und TOIVO LEIGER (Tartu)

Herrn K. Zeller zum 60. Geburtstag am 28.12.1984 gewidmet

Abstract. In this paper we prove a theorem of Mazur–Orlicz type which has new and known consistency theorems, for example the bounded consistency theorem of Mazur–Orlicz, as corollaries.

1. Einführung. Hauptergebnis dieser Arbeit ist der folgende Satz vom Mazur–Orlicz-Typ:

$$(*)\qquad X \cap W_A \subseteq c_B \Rightarrow X \cap W_A \subseteq W_B,$$

wobei A und B (unendliche) Matrizen mit konvergenten Spalten sind, c_A bzw. c_B das Wirkfeld von A bzw. B und W_A bzw. W_B die Folgen mit schwacher Abschnittskonvergenz im FK-Raum c_A bzw. c_B bezeichnet und X ein FK-AB-Raum (zum Beispiel $X := \omega$) ist, der gewisse Faktorfolgen besitzt.

Sätze dieser Art wurden für nullfolgenenthaltende bzw. semikonvergenztreue FK-Räume E (anstatt c_A) für spezielle X von Bennett–Kalton ([2] und [4]) bzw. unter miteinander zusammenhängenden Voraussetzungen an X und E von Snyder [21] bewiesen. In beiden Fällen wurden wesentlich andere Beweismethoden als in dieser Arbeit verwendet.

Als Folgerung aus $(*)$ erhalten wir bekannte, aber auch neue Verträglichkeitssätze, wie z.B. den Verträglichkeitssatz von Mazur–Orlicz. Weiter können wir aufgrund eines Ergebnisses von Bennett–Kalton [3] die schwache Folgenvollständigkeit von weiteren Folgenräumen, nämlich vom β–Dual von $X \cap W_A$, folgern.

2. Bezeichnungen und Grundlagen. Wir bezeichnen mit ω den Vektorraum aller komplexwertigen Folgen $x = (x_k) = (x_k)_{k \in N}$ und mit φ den Unterraum aller abbrechenden Folgen. Ist auf einem Folgenraum E eine lokalkonvexe Topologie τ derart erklärt, daß die Koordinatenfunktionale $x \to x_k$ $(k \in N)$ stetig sind, so heißt (E, τ) *K-Raum*; mit E' bezeichnen wir dann den Dualraum von (E, τ). Ein vollständiger metrisierbarer K-Raum heißt *FK-Raum* und ein normierter FK-Raum heißt *BK-Raum.*

Für ein Dualsystem (E, F) bezeichnen wir mit $\sigma(E, F)$ die schwache

Topologie und mit $\tau(E, F)$ die Mackey-Topologie. Ist E ein Folgenraum mit $\varphi \subseteq E$ und

$$E^{\beta} := \{z \in \omega \mid \sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k \text{ konvergiert für jedes } x \in E\}$$

der *β-Dual von E*, so ist (E, E^{β}) bezüglich der kanonischen Bilinearform ein Dualsystem, und $(E, \sigma(E, E^{\beta}))$ sowie $(E^{\beta}, \sigma(E^{\beta}, E))$ ein K-Raum.

Für $k \in N$ setzen wir $e^k := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, wobei 1 an der k-ten Stelle steht, und wir bezeichnen für $x \in \omega$ mit

$$x^{[n]} := \sum_{k=1}^{n} x_k e^k = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

den *n-ten Abschnitt von x* $(n \in N)$. Weiter definieren wir bei vorgegebenem K-Raum (E, τ) mit $\varphi \subseteq E$:

$$L_E := \{x \in E \mid \text{In } (E, \tau) \text{ ist } \{x^{[n]} \mid n \in N\} \text{ beschränkt}\}$$

(*abschnittsbeschränkte Folgen*),

$$F_E := \{x \in E \mid \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k \text{ existiert für jedes } f \in E'\}$$

(*Folgen mit funktionaler Abschnittskonvergenz*),

$$W_E := \{x \in E \mid x^{[n]} \to x(\sigma(E, E'))\}$$

(*Folgen mit schwacher Abschnittskonvergenz*).

Offenbar gilt $\varphi \subseteq W_E \subseteq F_E \subseteq L_E$. Ein FK-Raum (BK-Raum) E mit $E = L_E$ heißt *FK-AB-Raum* (*BK-AB-Raum*), und ein K-Raum (E, τ) heißt *semikonvergenztreu*, wenn $\varphi \subseteq E$ und $e := (1, 1, \ldots) \in F_E$ gilt.

Weiter verwenden wir wie üblich folgende Bezeichnungen:

$$m := \{x \in \omega \mid \|x\|_{\infty} := \sup_{k \in N} |x_k| < \infty\} \quad (\textit{beschränkte Folgen}),$$

$$c := \{x \in \omega \mid \lim_{k \to \infty} x_k \text{ existiert}\} \quad (\textit{konvergente Folgen}),$$

$$c_0 := \{x \in c \mid \lim_{k \to \infty} x_k = 0\} \quad (\textit{Nullfolgen}),$$

$$l^p := \{x \in \omega \mid \|x\|_p := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} < \infty\} \quad (1 \leqslant p < \infty),$$

$$l := l^1 \quad (\textit{absolut summierbare Folgen}),$$

$$f := \left\{x \in \omega \mid \exists a \in C: \frac{1}{n} \sum_{k=r}^{r+n-1} x_k \to a \ (n \to \infty) \text{ glm. in } r \in N\right\}$$

(*fastkonvergente Folgen* (mit $\operatorname{Lim} x := a$)),

$$f_0 := \{x \in f \mid \operatorname{Lim} x = 0\}$$

und bei vorgegebener Folge $\mu = (\mu_k)$ mit $0 < \mu_k \nearrow +\infty$

$$m_{\mu} := \left\{x \in \omega \mid \|x\|_{\mu} := \sup_{k \in N} \left|\frac{x_k}{\mu_k}\right| < \infty\right\} \quad (\mu\textit{-beschränkte Folgen}).$$

Bekanntlich sind m, f, f_0, c und c_0 zusammen mit $\| \; \|_{\infty}$ und $(l^p, \| \; \|_p)$ sowie $(m_{\mu}, \| \; \|_{\mu})$ BK-AB-Räume.

Nennt man Folgenräume X mit

$$z \in X \quad \text{und} \quad |x_k| \leqslant |z_k| \quad (k \in N) \quad \Rightarrow \quad x \in X$$

solid, so sind offenbar m, c_0, l^p $(1 \leqslant p < \infty)$ und m_{μ} solid. Bei vorgegebenem Folgenraum X bezeichnen wir die *Menge der Faktorfolgen von X* (in X) mit

$$M(X) := \{y \in \omega \mid \forall x \in X: \ xy := (x_k y_k) \in X\}.$$

Weiter setzen wir bei vorgegebener (unendlicher) Matrix $A = (a_{nk})_{n,k \in N}$:

$$\omega_A := \{x \in \omega \mid Ax := (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k)_{n \in N} \text{ existiert}\}$$

(*Anwendungsbereich von A*)

und

$$c_A := \{x \in \omega_A \mid Ax \in c\} \quad (\textit{Wirkfeld von } A)$$

sowie

$$\lim_A x := \lim Ax \quad (x \in c_A).$$

Speziell nennen wir $m \cap c_A$ bzw. $m_{\mu} \cap c_A$ das *beschränkte* bzw. *μ-beschränkte Wirkfeld von A*. Ist

$$|A| := \{x \in \omega \mid \sup_{n \in N} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| < \infty\}$$

(*Menge der absolut-A-beschränkten Folgen*),

so heißt $|A| \cap c_A$ *absolut-A-beschränktes Wirkfeld von A*, und wir stellen fest, daß $|A|$ ein solider FK-AB-Raum ist. Im Falle des FK-Raumes c_A schreiben wir für die „distinguished subsets" (vgl. [25]) L_A, F_A bzw. W_A anstatt $L_{c_A}, \ldots$ und definieren, falls $\varphi \subseteq c_A$ und $a_k := \lim_A e^k$ $(k \in N)$,

$$I_A := \{x \in c_A \mid \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ konvergiert}\},$$

$$\Lambda_A: I_A \to C, \quad x \to \Lambda_A(x) := \lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

und

$$A_A^\perp := \{x \in I_A \mid \Lambda_A(x) = 0\}.$$

Falls $\varphi \subseteq c_A$ erfüllt ist, gilt

(1) $$\varphi \subseteq W_A = A_A^\perp \cap L_A \subseteq F_A = I_A \cap L_A \subseteq L_A$$

und

(2) $$F_A = W_A \oplus \langle u \rangle \quad \text{mit} \quad u = 0 \text{ oder } u \in F_A \backslash W_A;$$

diese Aussagen wurden von Wilansky [25] unter der Voraussetzung $c \subseteq c_A$ bewiesen, und man verifiziert leicht, daß diese auch unter der schwächeren Voraussetzung $\varphi \subseteq c_A$ richtig bleiben. Weiter gilt für $x \in c_A$ die Äquivalenz

(3) $$x \in L_A \Leftrightarrow \sup_{n,\varrho \in N} \Big| \sum_{k=1}^{\varrho} a_{nk} x_k \Big| < \infty.$$

Eine Matrix A heißt *semikonvergenztreu*, wenn $\varphi \subseteq c_A$ und $e \in F_A$, *konvergenztreu*, wenn $c \subseteq c_A$, und *permanent*, wenn $c \subseteq c_A$ und $\lim_A x = \lim x$ $(x \in c)$ gilt. Eine semikonvergenztreue Matrix A nennen wir *koregulär*, falls $\chi(A) := \Lambda_A(e) \neq 0$, und *konullär*, falls $\chi(A) = 0$ gilt. Dann ist A genau dann konullär, wenn $e \in W_A$ erfüllt ist (vgl. [25], Lemma 5.3). Zwei Matrizen A und B heißen *verträglich auf* X, $X \subseteq c_A \cap c_B$, wenn $\lim_A x = \lim_B x$ $(x \in X)$ gilt. Konvergenztreue Matrizen A und B sind genau dann auf c verträglich, wenn $a_k = b_k$ $(k \in N)$ und $\chi(A) = \chi(B)$ gilt.

3. Hauptergebnis und Folgerungen. Zur Formulierung der Hauptergebnisse benötigen wir eine Klasse von Folgen, deren Definition spätestens beim Beweis des Lemmas in Abschnitt 4 plausibel werden wird.

Sei von nun an $(f_j)_{j \in N}$ die Folge der Partialsummen der Reihe

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \ldots - \frac{1}{n} + \ldots,$$

wobei das Glied $1/n$ n-mal mit positivem und n-mal mit negativem Vorzeichen auftritt. Für später benötigen wir folgende Eigenschaften von (f_j):

(4) $0 \leqslant f_j \leqslant 1 \quad (j \in N)$ und $(f_{j+1} - f_j) \in c_0$,

(5) $f_j = 0$ für jedes $j \in N$ mit $j = r(r+1)$ und $r \in N$,

(6) $f_j = 1$ für jedes $j \in N$ mit $j = r^2$ und $r \in N$.

Ausgehend von (f_j) ordnen wir nun jeder Indexfolge $r = (r_j)_{j \in N}$ mit $r_1 = 1$ die durch

(7) $$\varepsilon_k := f_j \quad (k \in N \text{ mit } r_j \leqslant k < r_{j+1},\ j \in N)$$

definierte Folge $\varepsilon^{(r)} := \varepsilon := (\varepsilon_k)$ zu und setzen

$$\mathfrak{E} := \{\varepsilon^{(r)} \mid r = (r_j) \text{ ist Indexfolge mit } r_1 = 1\}.$$

Folgen dieser Art sind bereits von Petersen [18] und dann in [23] und [5] zum Beweis von Verträglichkeitssätzen aber auch von anderen Autoren zur Konstruktion spezieller Faktorfolgen verwendet worden.

Wir formulieren das Hauptergebnis.

Satz 1. *Ist X ein FK-AB-Raum mit $\mathfrak{E} \subseteq M(X)$ und A eine Matrix mit $\varphi \subseteq c_A$ sowie F ein separabler FK-Raum, so gilt:*

$$X \cap W_A \subseteq F \Rightarrow X \cap W_A \subseteq W_F.$$

Insbesondere gilt dies für $F = c_B$, B eine Matrix.

Den Beweis von Satz 1 führen wir im nächsten Abschnitt.

Bemerkung 1. Die Bedingung $\mathfrak{E} \subseteq M(X)$ ist zum Beispiel für jeden soliden Folgenraum X erfüllt, also zum Beispiel für l^p $(1 \leqslant p < \infty)$, c_0, m, m_μ $(\mu = (\mu_k)$ mit $0 < \mu_k \nearrow +\infty)$, ω oder $|A| \cap |B|$, wobei A und B Matrizen sind. Sie ist auch erfüllt für $X := f_0$, da $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in M(f_0)$ für jedes $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ wegen $(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \in c_0$ gilt (vgl. Theorem 5 in [11]). Aufgrund seiner Bedeutung heben wir den Spezialfall $X := \omega$ besonders hervor und bemerken, daß dieser nicht aus Theorem 4 von Snyder [21] gefolgert werden kann.

Folgerung 1. *Sind A und B Matrizen mit $\varphi \subseteq W_A \subseteq c_B$, so gilt $W_A \subseteq W_B$.*

Im Fall $X := m$ bzw. $X := f_0$ wurde Satz 1 von Bennett–Kalton (vgl. Theorem 16 in [2] bzw. Theorem 9 in [4]) für FK-Räume E (anstatt c_A) jedoch unter der Voraussetzung $c_0 \subseteq E$ bewiesen. Beim Beweis ihrer Sätze wiesen Bennett–Kalton die Folgenvollständigkeit von $(l, \sigma(l, m \cap W_E))$ bzw. $(l, \sigma(l, f_0 \cap W_E))$ nach, die laut Theorem 5 von Bennett–Kalton [3] äquivalent zur Gültigkeit des Satz 1 entsprechenden Satzes ist. Im Gegensatz dazu beweisen wir Satz 1 mit einer Kombination klassischer (Betrachtung geeigneter Faktorfolgen) und funktionalanalytischer (Struktur des FK-Raumes c_A) Methoden. Insbesondere können wir dann mit Hilfe von Theorem 5 von Bennett–Kalton [3] u.a. die schwache Folgenvollständigkeit der entsprechenden Räume folgern. Diese und auch andere Folgerungen aus Satz 1 ziehen wir zunächst und beweisen dann Satz 1 im nächsten Abschnitt.

Theorem 7 in [2] entsprechend erhalten wir aus Satz 1 mit Theorem 5 in [3] unmittelbar die

Folgerung 2. *Sei X ein FK-AB-Raum mit $\mathfrak{E} \subseteq M(X)$, und seien A und B Matrizen mit $\varphi \subseteq X \cap W_A \subseteq c_B$. Dann gelten für $Y := X \cap W_A$ folgende Aussagen:*

(a) *Y^β ist $\sigma(Y^\beta, Y)$-folgenvollständig.*

(b) *Die Inklusionsabbildung*

$$i\colon \big(Y, \tau(Y, Y^{\beta})\big) \to \big(c_B, \tau(c_B, c_B')\big) \text{ ist stetig.}$$

(c) $B\colon \big(Y, \tau(Y, Y^{\beta})\big) \to (c, \|\ \|_{\infty})$ *ist stetig.*

(d) $\lim_B|_Y$ *ist* $\sigma(Y, Y^{\beta})$*-stetig.*

Als weitere Folgerung erhalten wir die in der Einleitung angesprochenen Verträglichkeitssätze. Da wir i.a. nicht nur konvergenztreue Matrizen betrachten und die Kodimension von $X \cap W_A$ in $X \cap c_A$ größer als 1 sein kann, bestimmen wir ausgehend von Inklusionen der Form $X \cap F_A \subseteq c_B$ eine Grenzwertformel auf $X \cap F_A$ für $\lim_B$ in Abhängigkeit von $\lim_A$, woraus sich dann die entsprechenden Verträglichkeitssätze ergeben.

Folgerung 3. *Sei X ein FK-AB-Raum mit $\mathfrak{E} \subseteq M(X)$, und seien A und B Matrizen mit $\varphi \subseteq X \cap F_A \subseteq c_B$. Ist $u = 0$ oder $u \in X \cap (F_A \backslash W_A)$ mit $X \cap F_A = (X \cap W_A) \oplus \langle u \rangle$, so gilt im Fall $u \in I_B$*

$$\lim_B x = \alpha\Big(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \qquad (x \in X \cap F_A)$$

mit

$$\alpha := 0, \text{ falls } u = 0, \qquad \text{und} \qquad \alpha := \frac{\Lambda_B(u)}{\Lambda_A(u)}, \text{ falls } u \neq 0.$$

Verträglichkeitssatz. *Sind zusätzlich A und B auf $\varphi \oplus \langle u \rangle$ veträglich, d.h. gilt $a_k = b_k$ $(k \in N)$ und $\lim_B u = \lim_A u$, so sind A und B auf $X \cap F_A$ verträglich.*

Man beachte, daß die Existenz eines derartigen u durch (2) gesichert ist.

Beweis. Im Fall $u = 0$ folgt die Behauptung aus Satz 1 wegen $W_A \subseteq \Lambda_A^{\perp}$ und $W_B \subseteq \Lambda_B^{\perp}$. Im Fall $u \in X \cap (F_A \backslash W_A)$ führt der Ansatz $x = (x - \alpha_x u) + \alpha_x u$ mit $\alpha_x := \Lambda_A(x)/\Lambda_A(u)$ über Satz 1 zum Ziel.

Für den Rest dieses Abschnitts gehen wir auf Spezialfälle von Folgerung 3 und des darin enthaltenen Verträglichkeitssatzes ein. Wir werden diese, soweit sie bereits bekannt sind, in die Literatur einordnen. Weitere Literatur findet man in [27] und [14] und in den Literaturverzeichnissen der zitierten Arbeiten.

Im Fall $X := m$ und von permanenten Matrizen (oder etwas allgemeiner im Fall von koregulären und auf c verträglichen Matrizen) A und B erhalten wir unter Beachtung von $m \cap c_A = m \cap F_A$ aus dem zweiten Teil von Folgerung 3 gerade den bekannten

Verträglichkeitssatz von Mazur und Orlicz. *Sind A und B permanente Matrizen mit $m \cap c_A \subseteq c_B$, so sind A und B auf $m \cap c_A$ verträglich.*

Im Jahre 1933 formulierten Mazur und Orlicz [15] diesen Satz, den sie dann in [16], Theorem 2, unabhängig von Brudno [8], Satz 1, bewiesen haben. Weitere Beweise wurden von Petersen [18] durch die Betrachtung geeigneter Faktorfolgen, von Orlicz [17] mit Hilfe von stetigen linearen Funktionalen auf Saks-Räumen, von Bennett–Kalton [2] über Zwei-Normen-Räume und die Folgenvollständigkeit von $\big(l, \sigma(l, W_A \cap m)\big)$, vgl. auch [20], und von Snyder und Wilansky [22] durch Zurückführung auf einen Satz von Agnew gegeben. Der Verträglichkeitssatz von Mazur–Orlicz läßt sich auch unmittelbar aus dem Quotientensatz von Baumann (vgl. Satz 1 in [1] und auch Satz 3 in [6]) ableiten. Mit dem Fall einer konullären Matrix A und einer mit A auf c verträglichen Matrix B haben sich Chang u.a. [9] auseinandergesetzt.

Seien A und B konvergenztreu, und sei $X := |A|$. Der Fall einer koregulären Matrix A wurde von Volkov [23], der einer konullären Matrix A von Boos [5] abgehandelt; in beiden Fällen wurde die Faktorfolgenmethode von Petersen [18] verwendet. (Man beachte $|A| \cap c_A \subset F_A$.)

Für $X := \omega$ und für auf c verträgliche, konvergenztreue Matrizen A und B mit $F_A \subseteq c_B$ erhalten wir im Fall $\chi(A) \neq 0$ den (Verträglichkeits-) Satz 3 in [5] und im Fall $\chi(A) = 0$ den (Verträglichkeits-) Satz 4 in [5].

Wie bereits im Anschluß an Folgerung 1 bemerkt, haben Bennett und Kalton (vgl. Theorem 9 in [4]) Satz 1 für $X := f_0$, und zwar für FK-Räume E (anstatt c_A) jedoch unter der für die dort verwendeten Methoden wesentlichen Voraussetzung $c_0 \subseteq E$, bewiesen. Aufgrund dessen wollen wir auch auf die von Bennett und Kalton gefolgerten Grenzwertformeln auf $f \cap c_A$ eingehen, wobei wir insbesondere die von Bennett–Kalton benutzten Konstanten näher bestimmen wollen. Über die bisher gemachte Voraussetzung $\varphi \subseteq c_A$ hinaus müssen wir wegen $f = f_0 \oplus \langle e \rangle$ zwischen den Fällen $e \in F_A$ (d.h. A ist semikonvergenztreu) und $e \notin F_A$ unterscheiden. In beiden Fällen beachte man, daß für konvergenztreue Matrizen A sogar $f \cap c_A = f \cap F_A$ (wegen $m \cap c_A \subseteq F_A$ und $f \subseteq m$) gilt.

Folgerung 4. *Seien A und B Matrizen mit $\varphi \subseteq c_A$, $e \notin F_A$ und $f \cap F_A \subseteq c_B$. Dann gilt*

$$f \cap F_A = f_0 \cap F_A = (f_0 \cap W_A) \oplus \langle u \rangle$$

mit

$$u = 0 \qquad \text{oder} \qquad u \in (f_0 \cap F_A) \backslash (f_0 \cap W_A)$$

und folglich, falls $u \in I_B$ erfüllt ist,

$$\lim_B x = \alpha\Big(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \qquad (x \in f \cap F_A)$$

mit

$$\alpha := 0, \text{ falls } u = 0, \qquad \text{und} \qquad \alpha := \frac{\Lambda_B(u)}{\Lambda_A(u)}, \text{ falls } u \neq 0.$$

Beweis. Wegen $f \cap F_A = f_0 \cap F_A$ und da f_0 ein BK-AB-Raum mit $\mathfrak{E} \subseteq M(f_0)$ ist, liegt gerade der Spezialfall $X := f_0$ in Folgerung 1 vor.

Im Fall $e \in F_A$ erhalten wir in Verallgemeinerung der Ergebnisse von Bennett und Kalton in [4], S. 41/42, die

FOLGERUNG 5. *Seien A und B semikonvergenztreue Matrizen mit $f \cap F_A \subseteq c_B$. Dann gelten folgende Aussagen*:

(a) $f \cap F_A = (f_0 \cap W_A) \oplus \langle e \rangle \Leftrightarrow \forall u \in f \cap F_A\colon\ \Lambda_A(u) - \chi(A) \operatorname{Lim} u = 0.$

(b) *Es ist $f \cap F_A = (f_0 \cap W_A) \oplus \langle e \rangle \oplus \langle u \rangle$ mit $u = 0$ oder $u \in (f \cap F_A) \setminus ((f_0 \cap \cap W_A) \oplus \langle e \rangle)$ und folglich, falls $u \in I_B$ erfüllt ist,*

$$\lim_B x = \alpha \operatorname{Lim} x + \beta \Big(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \qquad (x \in f \cap F_A)$$

mit

$$\alpha := \chi(B) \quad \text{und} \quad \beta := 0, \quad \text{falls } u = 0,$$

sowie

$$\alpha := \frac{\chi(A)\Lambda_B(u) - \Lambda_A(u)\chi(B)}{\chi(A)\operatorname{Lim} u - \Lambda_A(u)} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{\chi(B)\operatorname{Lim} u - \Lambda_B(u)}{\chi(A)\operatorname{Lim} u - \Lambda_A(u)},$$

falls $u \neq 0$.

Beweis. Im Fall $u = 0$ folgt die Behauptung aus Satz 1, da $x - (\operatorname{Lim} x) e \in f_0 \cap W_A$ für jedes $x \in f \cap W_A$. Im Fall $u \neq 0$ bestimmt man für jedes $x \in f \cap F_A$ Zahlen α_x und β_x mit $x - \alpha_x e - \beta_x u \in f_0 \cap W_A$ und beachtet, daß $f_0 \cap W_A \subseteq W_B$ laut Satz 1 gilt.

Die von Bennett und Kalton in [4], Theorem 11 sowie Korollare 1 und 2, behandelten Fälle ergeben sich aus Folgerung 5 (b) und gelten offenbar in entsprechender Form für semikonvergenztreue Matrizen.

Zuletzt gehen wir auf den Spezialfall $X := m_\mu$ $(\mu = (\mu_k)$ mit $0 < \mu_k \nearrow +\infty)$ ein und erinnern zunächst an eine Verallgemeinerung eines Verträglichkeitssatzes von Petersen [19] und Copping [10].

THEOREM ([7], Satz 1). *Ist A eine koreguläre und B eine konvergenztreue Matrix mit $m_\mu \cap c_A \subseteq c_B$ für ein vorgegebenes $\mu = (\mu_k)$ mit $0 < \mu_k \nearrow +\infty$, so existiert ein $\varrho = (\varrho_k)$ mit $\varrho_k \leqslant \mu_k$ und $0 < \varrho_k \nearrow +\infty$, also $m_\varrho \cap c_A \subseteq m_\mu \cap c_A \subseteq c_B$, derart, daß*

$$\lim_B x = \frac{\chi(B)}{\chi(A)} \Big(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \qquad (x \in m_\varrho \cap c_A)$$

erfüllt ist. Insbesondere gilt $m_\varrho \cap c_A \subseteq I_A \cap I_B$, und es sind A und B auf $m_\varrho \cap c_A$ verträglich, wenn sie auf $\varphi \oplus \langle e \rangle$ verträglich sind.

Wie in der Literatur bereits gezeigt wurde (vgl. [10], Theorem 2) ist der Übergang von μ zu einem geeigneten (von μ verschiedenen) ϱ notwendig, d.h.

das Theorem ist i.a. für $\varrho := \mu$ falsch. Im Gegensatz hierzu erspart man sich den Übergang von μ zu ϱ und kommt man ohne die Voraussetzung „$\chi(A) \neq 0$ und A, B konvergenztreu“ aus, wenn man $m_\mu \cap F_A$ anstatt $m_\mu \cap c_A$ betrachtet. Im einzelnen erhalten wir aus Folgerung 1 die

FOLGERUNG 6. *Sei $\mu = (\mu_k)$ mit $0 < \mu_k \nearrow +\infty$ vorgegeben, und seien A und B Matrizen mit $\varphi \subseteq m_\mu \cap F_A \subseteq c_B$. Ist $u = 0$ oder $u \in m_\mu \cap (F_A \setminus W_A)$ mit $m_\mu \cap F_A = (m_\mu \cap W_A) \oplus \langle u \rangle$, so gilt, falls $u \in I_B$ erfüllt ist,*

$$\lim_B x = \alpha \Big(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \qquad (x \in m_\mu \cap F_A)$$

mit

$$\alpha := 0, \ \text{falls } u = 0, \quad \text{und} \quad \alpha := \frac{\Lambda_B(u)}{\Lambda_A(u)}, \ \text{falls } u \neq 0.$$

Insbesondere sind A und B auf $m_\mu \cap F_A$ verträglich, wenn sie auf $\varphi \oplus \langle u \rangle$ verträglich sind.

Zuletzt sei noch zu diesem Abschnitt angemerkt, daß zum einen die von vielen FK-AB-Räumen X erfüllte Voraussetzung „$\mathfrak{E} \subseteq M(X)$“ und zum anderen die schwache Voraussetzung „$\varphi \subseteq c_A$“ ein weites Feld für Verträglichkeitssätze eröffnet. Offen bleibt die Frage, ob Satz 1 auch dann richtig ist, wenn man FK-Räume E mit $\varphi \subseteq E$ anstatt c_A betrachtet.

4. Beweis von Satz 1. Zum Beweis von Satz 1 zeigen wir zunächst für Matrizen A und B (unter den gemachten Voraussetzungen)

(8) $\quad X \cap W_A \subseteq c_B \Rightarrow X \cap W_A \subseteq L_B \Rightarrow X \cap W_A \subseteq F_B \Rightarrow X \cap W_A \subseteq W_B,$

wobei wir den Beweis der ersten Implikation funktionalanalytisch und den der anderen Implikationen klassisch (Betrachtung von geeigneten Faktorfolgen) führen. Die erste Implikation gilt sogar allgemein für FK-Räume, was wir im folgenden Satz festhalten.

SATZ 2. *Ist X ein FK-AB-Raum und sind E und F FK-Räume mit $\varphi \subseteq E$, so gilt*

$$X \cap W_E \subseteq F \Rightarrow X \cap W_E \subseteq L_F.$$

Beweis. Wird die FK-Topologie von E von der Halbnormenfamilie $(p_j \mid j \in N)$ erzeugt, so ist W_E zusammen mit den durch

$$q_j(x) := \sup_{n \in N} p_j(x^{[n]}) \qquad (x \in W_E)$$

definierten Halbnormen ein FK-AB-Raum (vgl. z.B. [12], p. 491). Dann ist auch $X \cap W_E$ ein FK-AB-Raum, womit sich die Behauptung aus der Monotonie der FK-Topologien (vgl. [24], p. 203, corollary 1) ergibt.

Den Beweis der zweiten und dritten Implikation in (8) bereiten wir durch ein Lemma vor, das uns (unter gewissen Voraussetzungen) die Existenz von Faktorfolgen aus $\mathfrak{E}$ sichert.

Lemma. *Seien C und D Matrizen mit den folgenden Eigenschaften*:

$$e \in L_C, \quad \text{d.h.} \quad \sup_{\varrho, n \in N} \Big|\sum_{k=1}^{\varrho} c_{nk}\Big| \leqslant M < \infty. \tag{9}$$

$$\varphi \subseteq c_C \cap c_D, \quad \text{d.h.} \quad c_k := \lim_{n\to\infty} c_{nk} \quad \text{und} \quad d_k := \lim_{n\to\infty} d_{nk} \ \text{existieren.} \tag{10}$$

$$\chi(C) = 0, \quad \text{d.h.} \quad e \in l_C \quad \text{und} \quad c := \lim_C e = \sum_{k=1}^{\infty} c_k. \tag{11}$$

$$e \in c_D, \quad \text{d.h.} \quad d := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} \ \text{existiert.} \tag{12}$$

Konvergiert unter diesen Voraussetzungen eine Teilfolge von $(\sum_{k=1}^{p} d_k)_{p\in N}$ gegen einen Wert ungleich d, so existiert eine Folge $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in \mathfrak{E}$ mit $\varepsilon \in W_C$ $(= L_C \cap \Lambda_C^{\perp})$ und $\varepsilon \notin c_D$.

Limitierbarkeitskriterien dieser Art wurden von Zeller [26], Satz 3.2, bewiesen. Einerseits wird hier durch die Betrachtung von Folgen aus $\mathfrak{E}$ die Struktur des Beweises (im Vergleich zu [26]) wesentlich vereinfacht, und andererseits sind hier erhebliche beweistechnische Schwierigkeiten zu überwinden, da nicht notwendig $e \in l_D$ gilt.

Beweis. Zur *Konstruktion einer Indexfolge $r = (r_j)$* geben wir uns eine Folge $(\alpha_j)_{j\in N}$ mit

$$\alpha_j > 0 \ (j \in N) \quad \text{und} \quad (\alpha_j) \in l \tag{13}$$

vor. Weiter wählen wir für ein geeignetes $\alpha \in C$ mit $\alpha \neq d$ eine Indexfolge (k_p) mit

$$k_1 = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{k_p - 1} d_k \tag{14}$$

und dazu eine Teilfolge $(r_j)_{j\in N}$ von (k_p) und eine Indexfolge (n_j) mit folgenden Eigenschaften (vgl. (9)–(12)):

$$r_1 = n_1 = 1,$$

$$\Big|\sum_{k=r_j}^{i} c_{nk}\Big| + \Big|\sum_{k=r_j}^{i} d_{nk}\Big| < \alpha_j \quad (i \geqslant r_j,\ n \leqslant n_{j-1}\ (j \geqslant 2)), \tag{15}$$

$$\Big|\sum_{k=\nu}^{i} c_k\Big| < \alpha_j \quad (r_j \leqslant \nu \leqslant i,\ j \geqslant 2) \quad \text{und} \quad \Big|\sum_{k=r_j}^{k_p - 1} d_k\Big| < \alpha_j \quad (r_j < k_p,\ j \geqslant 2), \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{r_j - 1} (|c_{nk} - c_k| + |d_{nk} - d_k|) < \alpha_j \quad (n \geqslant n_j), \tag{17}$$

$$\Big|c - \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\Big| < \alpha_j \quad (n \geqslant n_j). \tag{18}$$

Der Indexfolge r ordnen wir nun $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in \mathfrak{E}$ gemäß (7) zu und zeigen, daß ε die gewünschten Eigenschaften besitzt. Zum Beweis von $\varepsilon \in W_C (= L_C \cap \Lambda_C^{\perp})$ weisen wir zunächst die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k$ nach. Dazu bestimmen wir für ν, $i \in N$ mit $\nu \leqslant i$ und $\nu \geqslant r_2$ Zahlen ν^* und i^* aus N mit $r_{\nu^*} \leqslant \nu < r_{\nu^*+1}$ und $r_{i^*} \leqslant i < r_{i^*+1}$, womit wir im Fall $\nu^* + 1 < i^*$ die Abschätzung (f_j sei wie zu Beginn von Abschnitt 3 definiert)

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=\nu}^{i} c_k \varepsilon_k\Big| &\leqslant f_{\nu^*} \Big|\sum_{k=\nu}^{r_{\nu^*+1}-1} c_k\Big| + \sum_{\nu=\nu^*+1}^{i^*-1} f_\nu \Big|\sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} c_k\Big| + f_{i^*} \Big|\sum_{k=r_{i^*}}^{i} c_k\Big| \\
&\leqslant f_{\nu^*}\alpha_{\nu^*} + \sum_{\nu=\nu^*+1}^{i^*-1} f_\nu \alpha_\nu + f_{i^*}\alpha_{i^*} \quad \text{(vgl. (16))} \\
&\leqslant \sum_{\nu=\nu^*}^{i^*} \alpha_\nu
\end{aligned}$$

erhalten; die Fälle $\nu^* = i^*$ und $\nu^* + 1 = i^*$ behandelt man analog und führen zur gleichen Abschätzung. Wegen $(\alpha_j) \in l$ folgt somit die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k$.

Als nächstes zeigen wir

$$\varepsilon \in c_C \quad \text{und} \quad \lim_C \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k, \quad \text{also} \quad \varepsilon \in \Lambda_C^{\perp}.$$

Dazu sei $n \in N$ mit $n_{j-1} \leqslant n < n_j$ und $j > 2$. Laut Definition von ε gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\varepsilon_k &= \sum_{\nu=1}^{j-2} f_\nu \sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} c_{nk} + f_{j-1} \sum_{k=r_{j-1}}^{r_{j+1}-1} c_{nk} + \\
&\qquad + (f_j - f_{j-1}) \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}-1} c_{nk} + \sum_{\nu=j+1}^{\infty} f_\nu \sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} c_{nk} \\
&=: A_{nj} + B_{nj} + C_{nj} + D_{nj}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Für die einzelnen Summanden erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Big|A_{nj} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k\Big| &\leqslant \sum_{\nu=1}^{j-2} f_\nu \Big|\sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} (c_{nk} - c_k)\Big| + \Big|\sum_{k=r_{j-1}}^{\infty} c_k \varepsilon_k\Big| \\
&\leqslant \alpha_{j-1} + \Big|\sum_{k=r_{j-1}}^{\infty} c_k \varepsilon_k\Big| \to 0 \quad (j \to \infty)
\end{aligned}$$

(vgl. (17) und (4)) und

$$|B_{nj}| \leqslant f_{j-1} \Big|\sum_{k=r_{j-1}}^{r_{j+1}-1} (c_{nk}-c_k)\Big| + f_{j-1} \Big|\sum_{k=r_{j-1}}^{r_{j+1}-1} c_k\Big|$$

$$\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{\infty} (c_{nk}-c_k)\Big| + \sum_{k=1}^{r_{j-1}-1} |c_{nk}-c_k| + \sum_{k=r_{j+1}}^{\infty} |c_{nk}-c_k| + \Big|\sum_{k=r_{j-1}}^{r_{j+1}-1} c_k\Big|$$

$$\leqslant \alpha_{j-1}+\alpha_{j-1}+2\alpha_{j+1}+\alpha_{j-1} \to 0 \quad (j\to\infty)$$

(vgl. (18), (17), (15) und (16)) und

$$|C_{nj}| \leqslant 2(f_j-f_{j-1})M \to 0 \quad (j\to\infty)$$

(vgl. (4) und (9)) sowie

$$|D_{nj}| \leqslant \sum_{\nu=j+1}^{\infty} \alpha_\nu \to 0 \quad (j\to\infty) \quad \text{(vgl. (4) und (15)).}$$

(Man beachte, daß die letzte Abschätzung auch für $j=1$ gilt und somit $\varepsilon\in\omega_C$ liefert.) Insgesamt haben wir $\varepsilon\in\Lambda_C^{\perp}$ bewiesen.

Nun zeigen wir $\varepsilon\in L_C$ (was insgesamt $\varepsilon\in W_C$ impliziert). Für $n, \varrho\in N$ mit $n_{j-1}\leqslant n<n_j$ $(j>2)$ und $r_i\leqslant\varrho<r_{i+1}$ $(i>1)$ erhalten wir mit (17), (4), (9) und (15) die Abschätzung

$$\Big|\sum_{k=1}^{\varrho} c_{nk}\varepsilon_k\Big| \leqslant \sum_{\nu=1}^{i-1} f_\nu \Big|\sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} c_{nk}\Big| + f_i \Big|\sum_{k=r_i}^{\varrho} c_{nk}\Big|$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{j-2} f_\nu \Big|\sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} (c_{nk}-c_k)\Big| + f_{j-1}\Big|\sum_{k=r_{j-1}}^{r_j-1} c_{nk}\Big| +$$

$$+ f_j\Big|\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}-1} c_{nk}\Big| + \sum_{\nu=j+1}^{\infty} f_\nu \Big|\sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} c_{nk}\Big| +$$

$$+\Big|\sum_{k=1}^{r_{j-1}-1} c_k\varepsilon_k\Big| + f_i\Big|\sum_{k=r_i}^{\varrho} c_{nk}\Big|$$

$$\leqslant \alpha_{j-1}+2M+2M+\sum_{\nu=j+1}^{\infty}\alpha_\nu+N+2M$$

$$\leqslant \sup_{j\in N}\alpha_{j-1}+6M+N+\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu<\infty,$$

wobei $N := \sup_{p\in N}\Big|\sum_{k=1}^{p} c_k\varepsilon_k\Big|$ sei. Dieselbe Abschätzung gilt, wie man leicht verifiziert, erst recht für $j=2$ oder $i=1$. Damit ist laut (3) die Beschränktheit von $\{\varepsilon^{[\varrho]} \mid \varrho\in N\}$ in c_C, d.h. $\varepsilon\in L_C$ gezeigt.

Zuletzt beweisen wir $\varepsilon\notin c_D$. Dazu stellen wir zunächst fest, daß wegen (vgl. (16))

$$\Big|\sum_{k=r_j}^{r_{j+p}-1} d_k\varepsilon_k\Big| = \Big|\sum_{\nu=j}^{j+p-1} f_\nu \sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} d_k\Big| \leqslant \sum_{\nu=j}^{j+p-1}\alpha_\nu \quad (j, p\in N)$$

die Existenz von

$$\lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{r_j-1} d_k\varepsilon_k =: \beta$$

gesichert ist. Weiter erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{n_jk}\varepsilon_k = \sum_{\nu=1}^{j-1} f_\nu \sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} d_{n_jk} + f_j \sum_{k=r_j}^{r_{j+1}-1} d_{n_jk} +$$

$$+\sum_{\nu=j+1}^{\infty} f_\nu \sum_{k=r_\nu}^{r_{\nu+1}-1} d_{n_jk} =: A_j+B_j+D_j.$$

Analog zum Beweis von $\varepsilon\in c_C$ zeigt man

$$\beta = \lim_{j\to\infty} A_j \quad \text{und} \quad (D_j)\in c_0.$$

Um $\varepsilon\notin c_D$ zu zeigen, genügt es damit, $(B_j)\notin c$ nachzuweisen. Letzteres ist jedoch richtig, da in

$$\sum_{k=r_j}^{r_{j+1}-1} d_{n_jk} = \sum_{k=1}^{\infty} d_{n_jk} - \sum_{k=1}^{r_j-1}(d_{n_jk}-d_k) - \sum_{k=1}^{r_j-1} d_k - \sum_{k=r_{j+1}}^{\infty} d_{n_jk}$$

der zweite und der vierte (rechtsstehende) Term gegen Null (vgl. (17) und (15)), der erste Term gegen d (vgl. (12)) und der dritte Term gegen α (vgl. (14)) konvergiert und somit (vgl. (5) und (6) und beachte $\alpha\neq d$)

$$B_j \to \begin{cases} 0 & \text{für} \quad j=q(q+1),\ q\in N \text{ und } q\to\infty, \\ d-\alpha & \text{für} \quad j=q^2,\ q\in N \text{ und } q\to\infty \end{cases}$$

erfüllt ist.

Insgesamt ist das Lemma bewiesen.

Nun beweisen wir die zweite Implikation in (8). Es gelte also $X\cap W_A\subseteq L_B$ aber $X\cap W_A\nsubseteq I_B$ (beachte $F_B=L_B\cap I_B$). Für $x\in X\cap W_A$ mit $x\notin I_B$ definieren wir $C=(c_{nk})$ bzw. $D=(d_{nk})$ durch

$$c_{nk} := a_{nk}x_k \quad \text{bzw.} \quad d_{nk} := b_{nk}x_k \quad (n, k\in N).$$

Wie man leicht anhand von

$$x\in W_A = \Lambda_A^{\perp}\cap L_A\subseteq c_B$$

nachprüft, erfüllen C und D die Voraussetzungen (9)–(12) des Lemmas. Für d_k $(= b_k x_k)$ gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{p} d_k\right)_{p\in N} \notin c \quad \text{wegen} \quad x \notin I_B$$

und

$$\left(\sum_{k=1}^{p} d_k\right) \in m \quad \text{wegen} \quad x \in L_B;$$

die Partialsummenfolge $\left(\sum_{k=1}^{p} d_k\right)$ besitzt also mindestens zwei verschiedene Häufungswerte, von denen einer ungleich d ist, d.h. wir können das Lemma auf C und D anwenden. Damit existiert eine Folge $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ mit $\varepsilon \in W_C$ und $\varepsilon \notin c_D$, was $\varepsilon x \in W_A$ und $\varepsilon x \notin c_B$ impliziert. Wegen $\mathfrak{E} \subseteq M(X)$, also $\varepsilon x \in X$ widerspricht dies der Annahme $X \cap W_A \subseteq L_B (\subseteq c_B)$, womit die zweite Implikation in (8) bewiesen ist.

Zum Beweis der dritten Implikation in (8) nehmen wir

$$X \cap W_A \subseteq F_B \quad \text{aber} \quad X \cap W_A \nsubseteq W_B$$

an. Wegen $W_B = L_B \cap \Lambda_B^{\perp}$ und $F_B = L_B \cap I_B$ (vgl. (1)) können wir ein $x \in X \cap W_A$ mit $x \in I_B \backslash \Lambda_B^{\perp}$ wählen. Definiert man C und D wie beim Beweis der zweiten Implikation in (8), so erhält man durch Anwendung des Lemmas eine Folge $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ mit $\varepsilon \in W_C$ und $\varepsilon \notin c_D$, was unter Beachtung von $\mathfrak{E} \subseteq M(X)$ die Aussage

$$\varepsilon x \in X \cap W_A \quad \text{aber} \quad \varepsilon x \notin c_B$$

im Widerspruch zur Annahme impliziert. (Bei der Anwendung des Lemmas beachte man, daß $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ wegen $x \in I_B \backslash \Lambda_B^{\perp}$ gegen einen Wert ungleich d konvergiert.)

Insgesamt haben wir mit (8) Satz 1 bewiesen, da nämlich die Gültigkeit von (8) für alle Matrizen B die Folgenvollständigkeit von $(Y^{\beta}, \sigma(Y^{\beta}, Y))$ mit $Y := X \cap W_A$ impliziert; diese ist jedoch laut Theorem 5 in [3] äquivalent zur Gültigkeit von

$$X \cap W_A \subseteq F \;\Rightarrow\; X \cap W_A \subseteq W_F$$

für (beliebige) separable FK-Räume F.

Literaturverzeichnis

[1] H. Baumann, *Quotientensätze für Matrizen in der Limitierungstheorie*, Math. Z. 100 (1967), 147–162.
[2] G. Bennett, N. J. Kalton, *FK-spaces containing c_0*, Duke Math. J. 39 (1972), 561–582.
[3] –, –, *Inclusion theorems for K-spaces*, Canad. J. Math. 25 (1973), 511–524.
[4] –, –, *Consistency theorems for almost convergence*, Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1974), 23–43.

[5] J. Boos, *Verträglichkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren*, Math. Z. 128 (1972), 15–22.
[6] –, *Zwei-Normen-Konvergenz und Vergleich von beschränkten Wirkfeldern*, ibid. 148 (1976), 285–294.
[7] –, *Vergleich μ-beschränkter Wirkfelder mit Hilfe von Quotientendarstellungen*, ibid. 181 (1982), 71–81.
[8] A. L. Brudno, *Summation of bounded sequences by matrices*, Mat. Sb. (N. S.) 16 (1945), 191–247.
[9] S.-C. Chang, M. S. Macphail, A. K. Snyder, A. Wilansky, *Consistency and replaceability for conull matrices*, Math. Z. 105 (1968), 208–212.
[10] J. Copping, *On the consistency and relative strength of regular summability methods*, Proc. Camb. Philos. Soc. 62 (1966), 421–428.
[11] J. P. Duran, *Infinite matrices and almost convergence*, Math. Z. 128 (1972), 75–83.
[12] G. Goes, *Summen von FK-Räumen. Funktionale Abschnittskonvergenz und Umkehrsätze*, Tôhoku Math. J. 26 (1974), 487–504.
[13] E. Jürimäe, *Topologische Eigenschaften von Co-Null-Methoden der Summation*, Tartu Gos. Univ. Uchen. Zap. 177, Trudy Mat. Mekh. 5 (1965), 53–60.
[14] G. F. Kangro, *Theory of summability of sequences and series*, J. Soviet Math. 5 (1976), 1–45.
[15] S. Mazur et W. Orlicz, *Sur les méthodes linéaires de sommation*, C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933), 32–34.
[16] –, –, *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1955), 129–160.
[17] W. Orlicz, *On the continuity of linear operations in Saks spaces with an application to the theory of summability*, ibid. 16 (1957), 69–73.
[18] G. M. Petersen, *Summability methods and bounded sequences*, J. London Math. Soc. 31 (1956), 324–326.
[19] –, *Consistency of summation matrices for unbounded sequences*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 14 (1963), 161–169.
[20] W. H. Ruckle, *The bounded consistency theorem*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 566–571.
[21] A. K. Snyder, *Consistency theory in semiconservative spaces*, Studia Math. 71 (1982), 1–13.
[22] A. K. Snyder and A. Wilansky, *The Mazur–Orlicz bounded consistency theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 374–376.
[23] I. I. Volkov, *Über die Verträglichkeit zweier Summationsmethoden*, Mat. Zametki 1 (1967), 283–290.
[24] A. Wilansky, *Functional Analysis*, Blaisdell, New York–Toronto–London 1964.
[25] –, *Distinguished subsets and summability invariants*, J. Analyse Math. 12 (1964), 327–350.
[26] K. Zeller, *Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren*, Math. Z. 56 (1952), 134–151.
[27] K. Zeller and W. Beekmann, *Theorie der Limitierungsverfahren*, 2. Aufl., Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK
FERNUNIVERSITÄT-GESAMTHOCHSCHULE
Postfach 940
D-5800 Hagen

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATISCHE ANALYSIS
STAATLICHE UNIVERSITÄT TARTU
202 400 Tartu
Estland, UdSSR

Received January 4, 1984 (1947)