Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (VI)

von

W. ORLICZ (Poznań).

Es sei $\{\varphi_i(x)\}$ ein in $\langle a, b \rangle$ definiertes Orthogonalsystem; wir bezeichnen mit (S) einen Funktionenraum und mit Ω (S) die Menge aller Zahlenfolgen, welche aus den Entwicklungskoeffizienten der Funktionen aus (S) bestehen. Suchen wir einfache charakteristische Bedingungen dafür anzugeben, daß eine Zahlenfolge der Menge Ω (S) angehöre, so stoßen wir, außer dem Sonderfalle Ω (L^2), auf große Schwierigkeiten. Anläßlich verschiedener Versuche dieses Problem anzugreifen, wurden gewisse singuläre Funktionen bzw. singuläre Orthogonalreihen betrachtet; sie liefern uns verschiedenartige Gegenbeispiele. In den folgenden Zeilen bringen wir einige ergänzende Bemerkungen zu früheren diesbezüglichen Untersuchungen[1]).

Sei $M[u]$ eine in $\langle 0, +\infty)$ stetige, konvexe Funktion mit $M[u]\,u^{-1} \to 0$ für $u \to 0$, $M[u]\,u^{-1} \to +\infty$ für $u \to +\infty$, die nur für $u = 0$ gleich Null ist. Unter dem Raum (L^M) verstehen wir den Raum vom Typus (B) aller Funktionen $f(x)$, für welche das Integral $\int_a^b M[k\,|f(x)|]\,dx$ für irgendeine Konstante $k > 0$ existiert. Im folgenden setzen wir immer voraus, daß die Funktion $M[u]$ außerdem noch der Bedingung

---

[1]) Siehe: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (I), (II), Studia Math. 1 (1929) p. 1—39, p. 241—255; (III) Bull. Ac. Pol. (1932) p. 229—238; (V) Studia Math. 6 (1936) p. 20—38. Diese Arbeiten zitieren wir im folgenden als Beiträge. Vgl. auch: S. Kaczmarz — H. Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa 1935.

$$M[2u] = O(M[u]) \tag{1}$$

genügt.

Sei $\{p_i\}$, $p_i > 0$, eine feste Zahlenfolge; um eine gewisse Einsicht in die Struktur der Menge $\Omega(S)$ zu bekommen, können wir die Quotienten $|f_i|/p_i$, bzw. die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} p_i |f_i|$ für gewisse $\{f_i\} \in \Omega(S)$ untersuchen. Die Betrachtung von Quotienten führt insbesondere zu den sog. Majoranten; unter einer *Majorante für* (S) verstehen wir hierbei eine Folge $\{p_i\}$, $p_i > 0$, mit der Eigenschaft, daß aus $|c_i| = O(p_i)$ immer $\{c_i\} \in \Omega(S)$ folgt.

Wir setzen voraus, daß (S) *einen der Räume* (L^{α}), $\alpha > 1$, (L^M), (L^{∞}), *bezeichnet und daß* $\{\varphi_i(x)\}$ *ein in* (S) *vollständiges, aus beschränkten Funktionen bestehendes OS ist. Damit* $\{p_i\}$, $p_i > 0$, *eine Majorante für* (S) *sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Vorzeichenverteilung* $\varepsilon_i = \pm 1$ *die Folge* $\{\varepsilon_i p_i\}$ *der Menge* $\Omega(S)$ *angehöre.*

Für alle Fälle, mit Ausnahme von $(S) = (L^M)$ findet man den Beweis dieses Satzes in „Beiträge (V)". Für $(S) = (L^M)$ verläuft der Beweis analog wie für (L^{α}); es ist aber zu beachten, daß in (L^M) aus einer beschränkten Elementenfolge sich im allgemeinen keine schwachkonvergente Teilfolge herausgreifen läßt. Bei dem Beweise kommt man aber mit einer etwas schwächeren Eigenschaft aus [2]).

Nehmen wir für (S) den Raum (L^1) oder den Raum (L^M), wobei wir die einschränkende Voraussetzung (1) fallen lassen, so bleibt der obige Satz auch richtig, falls wir statt der Vollständigkeit des OS in (S) seine Abgeschlossenheit in (C) voraussetzen.

Daß ein analoger Satz auch für $(S) = (C)$ gilt, folgt sogleich aus dem Satze:

Das OS $\{\varphi_i(x)\}$ *sei in* (L^{∞}) *vollständig und es sei* $\varphi_i(x) \in (C)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. *Damit für eine beliebige Vorzeichenverteilung* $\varepsilon_i = \pm 1$ *die Folge* $\{\varepsilon_i p_i\}$ *der Menge* $\Omega(C)$ *angehöre, ist die gleichmäßige Konvergenz der Reihe*

[2]) Vgl. W. Orlicz, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, Bull. Ac. Pol. (1932) p. 207—220; insb. p. 215, Satz 3.

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i |\varphi_i(x)| \tag{2}$$

in $\langle a, b\rangle$ *notwendig und hinreichend.*

Beweis. Hinreichend: evident. Notwendig: Es ist für eine beliebige Vorzeichenverteilung $\{\varepsilon_i p_i\} \in \Omega(L^{\infty})$; somit gibt es eine positive Konstante K, so daß die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i |\varphi_i(x)| \leqslant K \tag{3}$$

für jedes x besteht [3]). Setzen wir jetzt voraus, daß die Reihe (2) nicht gleichmäßig konvergiert. Es gibt dann eine Zahl $\varepsilon > 0$, eine Zahlenfolge $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, $x_n \in \langle a, b\rangle$ und zwei Indizesfolgen $\{q_n\}$, $\{r_n\}$, $q_n < r_n$, $r_n < q_{n+1}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\sum_{i=q_n+1}^{r_n} p_i |\varphi_i(x_n)| > \varepsilon \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots); \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=q_n+1}^{r_n} p_i |\varphi_i(x_0)| \leqslant \varepsilon/8. \tag{4'}$$

Wir definieren jetzt sukzessive mit Hilfe von (3), (4), (4'), zwei aus $\{q_n\}$ bzw. $\{r_n\}$ herausgegriffene Teilfolgen $\{q'_n\}$, $\{r'_n\}$, ferner eine Intervallfolge $\{\delta_n\}$ sowie eine Mengenfolge $\{E_n\}$, so daß die folgenden Beziehungen bestehen:

a) $\delta_m \cdot \delta_{m'} = 0$ für $m \neq m'$, $E_m \subset \delta_m$, x_0 außerhalb δ_m;
$|E_m| > 0$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, $\delta_m \to 0$;

b) bezeichnet x'_m den Mittelpunkt des Intervalls δ_m, so ist $x'_m \to x_0$;

c) es ist

$$\sum_{i=q'_m+1}^{r_m} p_i |\varphi_i(x'_m)| > \varepsilon \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\sum_{i=q'_m+1}^{r'_m} p_i \operatorname{sign} \varphi_i(x'_m)\, \varphi_i(x) > \varepsilon \text{ für } x \in \delta_m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots);$$

[3]) Beiträge (V) p. 28, Satz 3.

d) $$\sum_{n=1}^{m-1} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| \leqslant \varepsilon/8 \text{ für } x \in \delta_m \quad (m=2,3,4,\ldots);$$

e) $$\sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x)| \leqslant \varepsilon/4 \text{ für } x \in E_m .$$

Bezeichnen wir mit $\{\eta_i\}$ eine Zahlenfolge, wo η_i nur der Werte $+1$, $-1, 0$ fähig sind; nach (3) und aus unseren Voraussetzungen folgt, daß die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i p_i \varphi_i(x)$$

für jedes x gegen eine Funktion $g_\eta(x)$ konvergiert, die in $\langle a, b\rangle$ mit einer stetigen Funktion äquivalent ist. Wir erklären jetzt eine Zahlenfolge $\{\eta_i\}$ indem wir $\eta_i = (-1)^m \operatorname{sign} \varphi_i(x'_m)$ für $q'_m < i \leqslant r'_m$, $m=2,3,\ldots$ und sonst $\eta_i = 0$ setzen. Aus der Ungleichung

$$g_\eta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i p_i \varphi_i(x) \geqslant - \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)|$$

$$+ \sum_{i=q'_m+1}^{r'_m} \eta_i p_i \varphi_i(x) - \sum_{n=m+1}^{\infty} \sum_{i=q'_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x)| - \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{i=q_n+1}^{r'_n} p_i |\varphi_i(x_0)|$$

erhalten wir nach d), c), e), (4'), für ein gerades m und für $x \in E_m$

$$g_\eta(x) \geqslant -\frac{\varepsilon}{8} + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für ein ungerades m und $x \in E_m$ ergibt sich ganz analog

$$g_\eta(x) \leqslant -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach a), b) und dem vorstehenden ist ersichtlich keine mit $g_\eta(x)$ äquivalente Funktion im Punkte x_0 stetig; somit sind wir zu einem Widerspruch gelangt.

Wir betrachten jetzt die folgende Frage:

Wann existiert eine Funktion $f(x) \in (S)$, für welche

(5) $$\overline{\lim_{i\to\infty}} |f_i|/p_i = +\infty \ ?$$

Durch Anwendung der bekannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Beschränktheit einer Folge linearer Funktionale (in den entsprechenden Räumen) auf die Folge $f_i p_i^{-1} = \int_a^b f(x)\, \psi_i(x)\, dx$, wo $\psi_i(x) = \varphi_i(x)\, p_i^{-1}$ ist, erhalten wir den Satz:

Damit eine Funktion $f(x) \in (S)$ existiere, für welche (5) stattfindet, ist notwendig und hinreichend, daß

a) *Wenn* $(S) = (L^\alpha)$, $\alpha > 1$: $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \int_a^b |\varphi_i(x)|^{\alpha'} dx\, p_i^{-\alpha'} = +\infty$

(α' bedeutet den zu α konjugierten Exponent);

b) *Wenn* $(S) = (L^\infty)$ *oder* $(S) = (C)$: $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \int_a^b |\varphi_i(x)|\, dx\, p_i^{-1} = +\infty$;

c) *Wenn* $(S) = (L^1)$: $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sup |\varphi_i(x)|\, p_i^{-1} = +\infty$;

d) *Wenn* $(S) = (L^M)$: $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \int_a^b M'[k|\varphi_i(x)|\, p_i^{-1}]\, dx = +\infty$

für jedes $k > 0$ ($M'[u]$ bedeutet die zu $M[u]$ komplementäre Funktion).

Im Zusammenhang mit dem Fall unter b) steht der folgende Satz:

Damit für jede nullkonvergente Zahlenfolge $\{p_i\}$, $p_i > 0$, eine stetige Funktion existiere, für welche (5) stattfindet, ist notwendig und hinreichend, daß

(6) $$\overline{\lim_{i\to\infty}} \int_a^b |\varphi_i(x)|\, dx > 0 .$$

Hinreichend: Nehmen wir an, daß für jede stetige Funktion $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} |f_i|\, p_i < +\infty$ d. h. $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \left| \int_a^b f(x)\, \psi_i(x)\, dx \right| < +\infty$ ist, wo $\psi_i(x) = \varphi_i(x)\, p_i^{-1}$. Nach einem bekannten Satze von Herrn H. Lebesgue gibt es eine Konstante $K > 0$, derart daß

$$\int_a^b |\psi_i(x)|\, dx = p_i^{-1} \int_a^b |\varphi_i(x)|\, dx < K,$$

was wegen (6) für eine nullkonvergente Zahlenfolge $\{p_i\}$ unmöglich ist.

Notwendig: Ist die Bedingung (6) nicht erfüllt, so setzen wir $p_i = \int_a^b |\varphi_i(x)|\, dx$; es ist klar daß für diese Folge die Beziehung (5) bei keiner stetigen Funktion bestehen kann.

Bemerkungen:

a) Ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ weist, nach der Terminologie des Herrn Kaczmarz die Singularität k_∞ auf[4]), wenn es eine beschränkte Funktion gibt, für welche $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, i|f_i| = +\infty$. Jedes gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem weist die Singularität k_∞ auf; diese Tatsache, die zuerst auf eine unnötig komplizierte Weise von Herrn Kaczmarz bewiesen wurde, ist ein einfaches Korollar unseres Satzes. Es genügt nämlich $p_i = \frac{1}{i}$ zu setzen und zu beachten, daß für jedes gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem die Bedingung (6) erfüllt ist.

b) Ebenso leicht kann man zeigen, daß jedes in (L^2) vollständige Orthogonalsystem die Singularität k_∞ aufweist. Denn andernfalls wäre (nach dem vorletzten Satze, b)) $i \int_a^b |\varphi_i(x)|\, dx \leqslant K$, also $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\int_a^b |\varphi_i(x)|\, dx\right)^2 < +\infty$, was für ein in (L^2) vollständiges Orthogonalsystem unmöglich ist.

c) Betrachten wir für ein gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem eine stetige Funktion mit $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, i^q |h_i| = +\infty$, wo $q = \frac{p-2}{p}$, $p > 2$. Es ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i^{p-2} |h_i|^p = +\infty$ und dies zeigt, daß jedes solche Orthogonalsystem die Singularität $k_p\, (p>2)$ aufweist[5]).

[4]) S. Kaczmarz, Notes on orthogonal series (III), Studia Math. 6 (1936) p. 112—116.

[5]) Vgl. das unter [1]) angeführte Buch von S. Kaczmarz uud H. Steinhaus, p. 238—239.

d) Sei $p_i > 0$, $p_i \to 0$; nach einer Bemerkung von Herrn Lebesgue existiert eine stetige periodische Funktion $h(x)$, für welche die Ungleichung $|a_i| + |b_i| \geqslant p_i$ für unendlich viele Indizes besteht, wo a_i, b_i die Fourierkoeffizienten bedeuten. Nach dem letzten Satze ist es klar, daß für ein Orthogonalsystem dann und nur dann eine stetige Funktion $h(x)$ existiert, deren Koeffizienten der Ungleichung $|h_i| \geqslant p_i$ für unendlich viele Indizes genügen, wenn die Bedingung (6) erfüllt ist. Insbesondere gilt also für jedes gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem ein Analogon des erwähnten Lebesgue'schen Satzes.

(Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1938).