Sur l'irratіonalité des intégrales indéfinies

par

S. KACZMARZ et A. TUROWICZ (Lwów).

MM. S. Mazur et S. Ulam ont posé le problème suivant:

$f_1(x), \ldots, f_n(x)$ étant un ensemble de n fonctions d'une variable réelle, continues dans un intervalle $\langle a, b\rangle$, et (Z) l'ensemble des fonctions de la forme $R(f_1(x), \ldots, f_n(x))$, où R désigne une fonction rationnelle arbitraire de n variables, existe-t-il dans l'ensemble (Z) une fonction sommable dans $\langle a, b\rangle$, dont l'intégrale indéfinie n'appartient pas à (Z)?

Le théorème énoncé ci-dessous présente une solution positive d'un problème plus général, puisque la suite finie de fonctions $f_i(x)$ y est remplacée par une suite infinie.

Soit

$$(1) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

une suite infinie de fonctions réelles d'une variable réelle que nous supposerons finies et sommables dans un intervalle $\langle a, b\rangle$, $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$.

Nous envisagerons l'ensemble (Z) des fonctions

$$(2) \qquad g(x) = R(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)),$$

où $R(y_1, \ldots, y_k)$ est une fonction rationnelle arbitraire (à coefficients réels) de k variables, k étant un entier positif quelconque; certaines variables peuvent ne pas figurer dans l'expression de R. Une fonction $g(x)$ de l'ensemble (Z) est définie pour toutes les valeurs de x de l'intervalle $\langle a, b\rangle$, qui n'annulent pas le dénominateur de la fonction R correspondante.

Théorème. *Dans chaque intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, tel que*

$$a < \alpha < \beta < b, \tag{3}$$

il existe une fonction $g_0(x)$ appartenant à l'ensemble (Z), telle que

1) *$g_0(x)$ est finie et sommable dans $\langle \alpha, \beta \rangle$,*

2) *la fonction*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} g_0(t)\, dt \tag{4}$$

n'appartient pas à l'ensemble (Z).

Remarque. Dans le cas où a et b ne sont pas à la fois infinis, on peut mettre $\alpha = a$, $\beta = b$.

Nous démontrerons d'abord deux lemmes.

Lemme I [1]). *Soient*

$$r_1(x_1, \ldots, x_k),\ r_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, r_{k+1}(x_1, \ldots, x_k)$$

$k+1$ fonctions rationnelles des k variables $x_1, \ldots, x_k$. Il existe alors un polynome $G(y_1, \ldots, y_{k+1})$ des $k+1$ variables $y_1, \ldots, y_{k+1}$, non identiquement nul, tel que la fonction rationnelle des variables $x_1, \ldots, x_k$

$$G(r_1(x_1, \ldots, x_k),\ r_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, r_{k+1}(x_1, \ldots, x_k))$$

s'annule identiquement.

Démonstration. Mettons les fonctions r_i sous la forme

$$r_i(x_1, \ldots, x_k) = \frac{h_i(x_1, \ldots, x_k)}{h_{k+2}(x_1, \ldots, x_k)} \quad (i=1,2,\ldots,k+1),$$

où $h_i(x_1, \ldots, x_k)$ $(i=1, 2, \ldots, k+2)$ sont des polynômes des variables $x_1, \ldots, x_k$. Soit m le plus grand des degrés des polynômes h_i. On peut supposer $m > 0$. Dans le cas $m = 0$ le lemme est évident.

Nous déterminerons un polynôme homogène non identiquement nul de $k+2$ variables

[1]) Ce lemme est presque évident, mais comme il ne se trouve pas dans les traités d'algèbre, nous en donnons une démonstration.

$$H(y_1, \ldots, y_{k+2}) = \sum A_{j_1 j_2 \ldots j_{k+2}} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \ldots y_{k+2}^{j_{k+2}} \quad (j_1 + j_2 + \ldots + j_{k+2} = M)$$

du degré M, où M est un entier positif satisfaisant à l'inégalité

$$M > (2m)^k (k+1),$$

tel que le polynôme des variables $x_1, \ldots, x_k$

$$H(h_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, h_{k+2}(x_1, \ldots, x_k))$$

soit identiquement nul, c'est-à-dire

$$\sum A_{j_1 j_2 \ldots j_{k+2}} h_1^{j_1} h_2^{j_2} \ldots h_{k+2}^{j_{k+2}} = 0.$$

Nous avons donc à resoudre un système d'équations linéaires. Le nombre des inconnues $A_{j_1 j_2 \ldots j_{k+2}}$ est $\binom{M+k+1}{k+1}$. Le degré (en $x_1, \ldots, x_k$) de l'expression $h_1^{j_1} h_2^{j_2} \ldots h_{k+2}^{j_{k+2}}$ ne surpasse pas $m_{j_1} + m_{j_2} + \ldots + m_{j_{k+2}} = mM$, donc le nombre des équations ne surpasse pas $\binom{Mm+k}{k}$.

Mais

$$\binom{M+k+1}{k+1} = \frac{(M+k+1)(M+k)\ldots(M+1)}{(k+1)!} > \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} > \frac{M^k (2m)^k}{k!},$$

$$\binom{Mm+k}{k} = \frac{(Mm+k)(Mm+k-1)\ldots(Mm+1)}{k!} < \frac{(Mm+Mm)^k}{k!} = \frac{M^k (2m)^k}{k!}.$$

Le nombre des inconnues étant plus grand que celui des équations, il existe un système de valeurs non toutes nulles des $A_{j_1 j_2 \ldots j_{k+2}}$. L'existence du polynôme $H(y_1, \ldots, y_{k+2})$ est ainsi établie. En posant $G(y_1, \ldots, y_{k+1}) = H(y_1, \ldots, y_{k+1}, 1)$ on obtient un polynôme jouissant de la propriété indiquée dans l'énoncé du lemme.

Lemme II. *Supposons que l'identité*

$$F(x) = Q(\log|x - c_1|, \log|x - c_2|, \ldots, \log|x - c_n|) \equiv 0$$

soit vraie pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ $(\alpha < \beta)$, $Q(y_1, \dots, y_n)$ *étant un polynôme de n variables et* $c_1, c_2, \dots, c_n$ *étant des nombres extérieurs à l'intervalle* $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Dans ces conditions le polynôme $Q(y_1, \dots, y_n)$ *est identiquement nul.*

D é m o n s t r a t i o n. Développons le polynôme Q suivant les puissances de $\log|x - c_1|$. On a

$$a_0 \log^p |x - c_1| + a_1 \log^{p-1} |x - c_1| + \dots + a_p = 0 \quad (p \geqslant 1),$$

où les a_i $(i = 0, 1, \dots, p)$ sont des polynômes en

$$\log|x - c_2|, \dots, \log|x - c_n|.$$

Nous allons démontrer que

$$(5) \qquad \begin{gathered} a_i(\log|x - c_2|, \log|x - c_3|, \dots, \log|x - c_n|) = 0 \\ \text{pour } \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \quad i = 0, 1, \dots, p. \end{gathered}$$

Admettons en effet que pour une valeur x_0 $(\alpha < x_0 < \beta)$ on ait

$$|b_0| + |b_1| + \dots + |b_p| \neq 0,$$

où

$$b_i = a_i(\log|x_0 - c_2|, \dots, \log|x_0 - c_n|) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Alors $\log|x_0 - c_1|$ serait une racine de l'équation

$$(6) \qquad b_r z^{p-r} + b_{r+1} z^{p-r-1} + \dots + b_p = 0 \quad \text{où } 0 \leqslant r \leqslant p - 1, \ b_r \neq 0.$$

Remarquons d'abord que les nombres c_i se trouvant à l'extérieur de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, on peut remplacer l'expression $\log|x - c_i|$ soit par $\log(x - c_i)$, soit par $\log(c_i - x)$. Pour fixer les idées nous supposerons que l'on a $x - c_i > 0$ dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$. Les fonctions $\log(x - c_i)$, considérées comme fonctions d'une variable complexe, sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle $|x - x_0| \leqslant R$, où R est un nombre positif suffisamment petit; par conséquent, l'identité

$$(7) \qquad Q(\log(x - c_1), \dots, \log(x - c_n)) = 0$$

est valide à l'intérieur de ce cercle, puisqu'elle est valide sur la partie du segment de l'axe réel $\langle \alpha, \beta \rangle$ intérieure au cercle $|x - x_0| \leqslant R$.

Traçons maintenant dans le plan de la variable complexe x une courbe simple fermée K passant par $x = x_0$, de telle manière que le point $x = c_1$ se trouve à l'intérieur, et les points $x = c_i$ $(i = 2, 3, \dots, n)$ à l'extérieur du domaine limité par K. On peut prolonger analytiquement les fonctions $\log(x - c_i)$ et la relation (7) sera valide pour tous les points de K.

Si nous décrivons m fois la courbe K dans le sens positif, nous reviendrons avec les valeurs initiales pour $\log(x - c_i)$ $(i = 2, 3, \dots, n)$, tandis que la valeur de $\log(x - c_1)$ augmentera de $2m\pi i$. Ainsi l'équation (6) aurait une infinité de racines de la forme $\log|x_0 - c_1| + 2m\pi i$, ce qui est absurde. On voit donc que les identités (5) sont vraies.

Il découle du raisonnement exposé que 1° dans le cas $n = 1$, le lemme est vrai, puisque les polynômes a_i sont alors des constantes, 2° si le lemme est vrai pour $n = q$, il est vrai pour $n = q + 1$.

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Supposons que le théorème énoncé soit faux. Comme il y a des fonctions de (Z) finies et sommables dans tout intervalle contenu dans $\langle a, b \rangle$ (par exemple les fonctions $f_n(x)$), il existerait un intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ satisfaisant à la condition (3), tel que pour chaque fonction $\varphi(x)$ de (Z), finie et sommable dans $\langle \alpha, \beta \rangle$, l'intégrale indéfinie

$$\int_{\alpha}^{x} \varphi(t)\, dt$$

appartiendrait à l'ensemble (Z).

Or, la fonction

$$\psi(x) = 1$$

appartient à (Z), donc

$$(8) \qquad x - \alpha = \int_{\alpha}^{x} dt = P(f_1(x), \dots, f_k(x)),$$

où P est une fonction rationnelle et k un entier positif convenablement choisi.

Par conséquent, c étant un nombre pris arbitrairement à l'extérieur de l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, la fonction

$$h(x) = \frac{1}{x - c}$$

appartient à l'ensemble (Z) et est finie et sommable dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, donc

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{dt}{t - c} = \log |x - c| - \log |\alpha - c| = R_c(f_1(x), \ldots, f_p(x))$$

dans l'intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$, où non seulement la fonction rationnelle R_c, mais aussi le nombre entier positif p dépend de la constante c. Soit (C) un ensemble non-dénombrable des nombres réels c choisis à l'extérieur de $\langle \alpha, \beta \rangle$. On a pour chaque élément c de cet ensemble

$$\log |x - c| \equiv V_c(f_1(x), \ldots, f_{p_c}(x)) \qquad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta),$$

$V_c(y_1, \ldots, y_{p_c})$ étant une fonction rationnelle.

Désignons par (C_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ le sous-ensemble de (C) composé de tous les nombres c tels que $p_c \leqslant i$. Il existe un entier positif j tel que (C_j) est un ensemble infini; dans le cas contraire (C) serait dénombrable.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_{j+1}$ $j+1$ éléments de l'ensemble (C_j). On peut écrire

$$\log |x - c_k| = W_k(f_1(x), \ldots, f_j(x)) \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ k = 1, 2, \ldots, j+1),$$

où les $W_k(y_1, \ldots, y_j)$ sont des fonctions rationnelles de j variables. En vertu du lemme I il existe un polynôme $Q(z_1, \ldots, z_{j+1})$ de $j+1$ variables, du degré supérieur à 0, tel que

$$Q(W_1(f_1(x), \ldots, f_j(x)), \ldots\ldots, W_{j+1}(f_1(x), \ldots, f_j(x)) = 0;$$

nous avons donc

$$Q(\log |x - c_1|, \ldots, \log |x - c_{j+1}|) = 0.$$

Cette identité étant impossible en vertu du lemme II, le théorème énoncé est démontré.

(Reçu par la Rédaction le 1. 7. 1938).