Über das allgemeine Dreikörperproblem

von

W. NIKLIBORC (Warszawa).

Zweite Mitteilung.

Grundlegende Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten.

Einleitung.

Diese zweite Mitteilung über das Dreikörperproblem stellt die unmittelbare Fortsetzung der von uns in der ersten Mitteilung publizierten Untersuchungen dar. Um Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir hier in aller Kürze an die erste Mitteilung anschließen.

Wir betrachten also das allgemeinste Dreikörperproblem, d. h. es werden weder über die Größe der Massen, noch über die Natur der gegenseitigen Wirkungskräfte einschränkende Voraussetzungen gemacht. Die Wirkungskräfte sollen nur von den Abständen der Massen abhängen. Indem wir uns dann der Frage der relativen Bewegung zuwenden, legen wir die Differentialgleichungen (4) zugrunde (die Numeration der Formeln bezieht sich auf die zweite Mitteilung). Diese besitzen dann vier elementare Integrale und zwar drei Flächenintegrale und ein Energieintegral. Nach entsprechender Wahl des Koordinatensystems, die in der ersten Arbeit ausführlich besprochen wurde, und nach der Einführung gewisser Abkürzungen lassen sich die erwähnten Integrale auf die Gestalt (10) und (11) bringen.

Nun haben wir das von den Gleichungen (10) und (11) gebildete System als ein simultanes algebraisches System inbezug auf die Größen

$$u_1, \ldots\ldots, w_2$$

betrachtet und stellten uns die Aufgabe, die allgemeine Lösung desselben zu bestimmen. Ein großer Teil dieser Aufgabe wurde in der ersten Mitteilung erledigt und so gelangten wir zu den Formeln (59), die die Größen $u_1, \ldots, w_2$ als lineare Funktionen dreier Variablen σ_1, σ_2, τ darstellen, die ihrerseits der transformierten Energiegleichung (60) genügen.

In dieser Mitteilung wird zunächst die Transformation der Gleichung (60) weiter verfolgt, indem man den Koeffizienten C_{12} durch eine geeignete lineare Substitution wegzuschaffen versucht. Dabei wird, wie immer, der Symmetrie der Rechnungen die größte Aufmerksamkeit zugewendet, wenn auch diese vorläufig verwickelter sich gestalten mögen. Es stellt sich dann immer heraus, daß man zu Formeln gelangt, die aus einer Formel durch bloße zyklische Vertauschung der Buchstaben und der Indizes entstehen.

Nach der Durchführung der Rechnungen bekommt man für die Geschwindigkeitskomponenten die Formeln (69), wobei die Hilfsvariablen σ_1, σ_2, τ der Gleichung (77) genügen, und nun kann man zu der Darstellung der Größen u_k, v_k, w_k durch zwei willkürliche Parameter mühelos übergehen. Diese Darstellung wird durch das Formelsystem (69), (70) und (81) geliefert.

Von nun ab erschien es weiter notwendig, die Gestalt der gewonnenen Lösung zu vereinfachen, um erstens die verschiedenen Irrationalitäten zu beseitigen und zweitens um die künstlichen Parameter θ_1 und θ_2 durch einer einfacheren Deutung fähige Größen zu ersetzen. Als diese neuen Parameter, und das ist der dritte springende Punkt dieser Arbeitenreihe, wurden die Komponenten der Geschwindigkeiten in der zu der Laplace'schen invariablen Ebene normalen Richtung gewählt. Diese Größen werden künftig als *Normalgeschwindigkeiten* bezeichnet. Freilich zieht dieser Übergang zu neuen Größen eine wesentliche Einschränkung nach sich. Es muß nämlich von diesem Moment an vorausgesetzt werden, daß nicht alle drei Massen zugleich in der invariablen Ebene liegen, wozu noch die schon früher notwendige Voraussetzung, daß die drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen sollen, hinzuzufügen ist.

Indem dann noch mehrere recht umfangreiche, wenn auch ganz elementare Rechnungen durchgeführt werden, gelangt man zu dem Formelsystem (68), (69), (70), (106), (110), (111) und (112), das die allgemeine Lösung des algebraischen Systems (10) und (11) in der gewünschten und für die Folge nützlichen Form darstellt. Diesen Formeln zufolge erscheinen die x_k, y_k, z_k als Funktionen der Normalgeschwindigkeiten, der die augenblickliche geometrische Konfiguration bestimmenden Größen und endlich der Integrationskonstanten. Eine ensprechende Wahl des Koordinatensystems ist selbstverständlich eine notwendige Vorbedingung für die Richtigkeit der gefundenen Ausdrücke.

Obwohl die gewonnenen Formeln recht umständlich sind, so muß doch hervorgehoben werden, daß diese Kompliziertheit durchaus in der Natur der Sache liegt. Die Formeln gelten nämlich ohne irgendwelche wesentliche Vereinfachung auch dann, wenn keine Wirkungskräfte vorhanden sind, d. h. wenn man es mit geradliniger und gleichförmiger Bewegung zu tun hat. In dem letztgenannten Falle ist bloß Φ als eine Konstante aufzufassen, während sie sonst eine vorgegebene Funktion der Entfernungen bedeutet.

In den darauffolgenden Mitteilungen werden die gefundenen Formeln auf verschiedene mit dem Dreikörperproblem verknüpfte Fragen angewandt, und zwar vor allem (dritte Mitteilung) auf die Frage der Reduktion der Differentialgleichungen auf die sechste Ordnung.

I. Bezeichnungen. Identitäten. Hilfssätze.

1. Differentialgleichungen der relativen Bewegung. Wir bezeichnen mit t die Zeit und betrachten drei vollkommen beliebige Massen m_0, m_1 und m_2. Es sei $\varphi(u)$ die für die gegenseitige Wirkung zweier Massen charakteristische Funktion. Wir bezeichnen mit x_1, y_1, z_1, bzw. mit x_2, y_2, z_2 die Koordinaten der Punkte m_1 und m_2 inbezug auf ein Achsenkreuz, dessen Ursprung sich in m_0 befindet, und das sich mit m_0 derart bewegt, daß die neuen Achsen stets mit denjenigen eines Galileischen Koordinatensystems parallel und gleichgerichtet sind.

Setzt man noch

$$(1)\quad \begin{cases} r_k = +\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} & (k=1,2), \\ r_{1,2} = +\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}, \end{cases}$$

so lauten die Differentialgleichungen der relativen Bewegung[1] der Punkte m_1 und m_2 wie folgt:

[1]) Vgl. die erste Mitteilung (weiter zitiert als Mitt. I).

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = [(m_0+m_1)\,\varphi(r_1) + m_2\,\varphi(r_{12})]\,x_1 + m_2[\varphi(r_2) - \varphi(r_{12})]\,x_2, \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = [(m_0+m_2)\,\varphi(r_2) + m_1\,\varphi(r_{12})]\,x_2 + m_1[\varphi(r_1) - \varphi(r_{12})]\,x_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Weitere Gleichungen bekommt man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben.

Die Gleichungen (2) besitzen bekanntlich vier elementare Integrale und zwar drei Flächenintegrale und ein Energieintegral. Indem wir zur Fundamentalebene der relativen Bewegung die

$$x + y + z = 0$$

Ebene wählen[2]), und sukzessive die Größen

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_2 x_2 - (m_0+m_2)\,x_1], \\ \mu_1 = \dfrac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_2 y_2 - (m_0+m_2)\,y_1], \\ \nu_1 = \dfrac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_2 z_2 - (m_0+m_2)\,z_1], \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_1 x_1 - (m_0+m_1)\,x_2], \\ \mu_2 = \dfrac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_1 y_1 - (m_0+m_1)\,y_2], \\ \nu_2 = \dfrac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_1 z_1 - (m_0+m_1)\,z_2], \end{cases}$$

$$(4)\quad u_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}}\,x_k', \quad v_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}}\,y_k', \quad w_k = \sqrt{\frac{m_0}{M}}\,z_k', \quad (k=1,2)$$

$$(5)\quad M = m_0 + m_1 + m_2,$$

$$(6)\quad \Phi(u) = \int u\,\varphi(u)\,du,$$

$$(7)\quad U = m_0 m_1\,\Phi(r_1) + m_0 m_2\,\Phi(r_2) + m_1 m_2\,\Phi(r_{12}),$$

[2]) Mitt. I.

$$V = 2(U + h), \tag{8}$$

$$W = m_0 V \tag{9}$$

einführen, können wir die erwähnten Integrale auf die folgende Gestalt bringen:

$$\left\{\begin{aligned} & m_1(\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) + m_2(\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ & m_1(\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) + m_2(\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \\ & m_1(\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) + m_2(\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$\begin{aligned} m_1(m_0 + m_2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) - 2\, m_1 m_2 (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) & \\ + m_2(m_0 + m_1)(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2) - W = 0. & \end{aligned} \tag{11}$$

Dabei bedeuten a und h zwei Konstanten, die sonst beliebig sind. Es ist zu beachten, daß, wenn der Ursprung des Galileischen Systems sich im Massenmittelpunkte des Systems befindet, stets

$$U + h \geqslant 0 \tag{11}$$

gilt.

2. Bezeichnungen. Wir haben in der ersten Mitteilung eine ganze Reihe verschiedener Größen eingeführt, die hier zusammengestellt werden sollen, wobei noch gewisse andere, in dieser Mitteilung wichtige Rolle spielende Ausdrücke hinzugefügt werden. Es sind dies die Größen

$$\alpha = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad \beta = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad \gamma = x_1 y_2 - y_1 x_2, \tag{13}$$

$$A = \alpha + \beta + \gamma, \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{x_1 + y_1 + z_1}{\sqrt{3}}, \\ \delta_2 &= \frac{x_2 + y_2 + z_2}{\sqrt{3}}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda_1 + \mu_1 + \nu_1, \\ \Lambda_2 &= \lambda_2 + \mu_2 + \nu_2, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$P = m_1(m_0 + m_2)\,\delta_1^2 - 2\, m_1 m_2 \delta_1 \delta_2 + m_2 (m_0 + m_1)\,\delta_2^2, \tag{17}$$

$$\left\{\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{m_0 M}[m_0(m_0 + m_2) r_1^2 - m_0 m_2 r_2^2 + m_2(m_0 + m_2) r_{12}^2], \\ E_{12} &= \frac{1}{m_0 M}[m_0(\frac{M}{2} - m_1) r_1^2 + m_0(\frac{M}{2} - m_2) r_2^2 - (\frac{m_0 M}{2} + m_1 m_2) r_{12}^2], \\ E_{22} &= \frac{1}{m_0 M}[m_0 m_1 r_1^2 + m_0(m_0 + m_1) r_2^2 + m_1(m_0 + m_1) r_{12}^2], \end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$4F^2 = E_{11} E_{22} - E_{12}^2, \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= r_2^2 \delta_1 - \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_2, \\ Q_2 &= r_1^2 \delta_2 - \tfrac{1}{2}(r_1^2 + r_2^1 - r_{12}^2)\,\delta_1, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$\Delta^2 = r_2^2 \delta_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_1 \delta_2 + r_1^2 \delta_2^2, \tag{21}$$

$$J = m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r_2^2 + m_1 m_2 r_{12}^2, \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_{11} &= m_1 r_1^2 - (2 m_0 + m_1) r_2^2 - m_1 r_{12}^2, \\ S_{12} &= (m_0 - m_1) r_1^2 + (m_0 + m_1) r_2^2 - (m_0 + m_1) r_{12}^2, \\ S_{21} &= (m_0 + m_2) r_1^2 + (m_0 - m_2) r_2^2 - (m_0 + m_2) r_{12}^2, \\ S_{22} &= -(2 m_0 + m_2) r_1^2 + m_2 r_2^2 - m_2 r_{12}^2, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_1 &= S_{11}\delta_1 + S_{12}\delta_2, \\ S_2 &= S_{21}\delta_1 + S_{22}\delta_2, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$l = m_0 M E_{11} E_{22} + 4 m_1 m_2 F^2, \tag{25}$$

$$\left\{\begin{aligned} l_1 &= m_0 M E_{12} E_{22} - 4 m_1 (m_0 + m_1) F^2, \\ l_2 &= m_0 M E_{11} E_{12} - 4 m_2 (m_0 + m_2) F^2, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$\Theta = m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2, \tag{27}$$

$$H = m_1^2 E_{11} \delta_1'^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1' \delta_2' + m_2^2 E_{22} \delta_2'^2. \tag{28}$$

In der letzten Formel bedeuten δ_1' und δ_2' die nach der Zeit genommenen ersten Ableitungen der Abstände δ_1 und δ_2 von der Fundamentalebene der relativen Bewegung.

Liegen die drei Massen m_0, m_1 und m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden, was, wie in der ersten Mitteilung, auch hier für das Nachstehende vorausgesetzt wird, so ist stets $F>0$, $l>0$ und Δ^2 ist eine positiv-definite quadratische Form der Größen δ_1 und δ_2. Dasselbe gilt für die Größen P und Θ. Demnach verschwindet jede der Größen Δ^2, P, Θ dann und nur dann, wenn die beiden Planeten in der Fundamentalebene gleichzeitig liegen. Übrigens ist auch H eine positiv-definite quadratische Form der Größen δ_1', δ_2'.

3. Identitäten. Zwischen den eingeführten Größen besteht eine ganze Menge verschiedener Identitäten, von welchen hier die wichtigsten und für die Folge nützlichen zusammengestellt werden. Nur einige von ihnen sind in der ersten Mitteilung zu finden. Die elementaren Beweise werden natürlich fortgelassen.

Es gelten folgende Formeln:

$$4F^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = r_1^2 r_2^2 - \frac{1}{4}(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)^2. \tag{29}$$

(Dabei bedeutet F den Flächeninhalt des durch m_0, m_1, m_2 gebildeten Dreiecks);

$$A = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}, \tag{30}$$

$$A^2 = 3(4F^2-\Delta^2) = 3\{4F^2 - [r_2^2\delta_1^2 - (r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)\delta_1\delta_2 + r_1^2\delta_2^2]\}, \tag{31}$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{1}{\sqrt{3m_0M}}[(m_0+m_1)\Delta_1 + m_2\Delta_2], \\ \delta_2 &= -\frac{1}{\sqrt{3m_0M}}[m_1\Delta_1 + (m_0+m_2)\Delta_2], \end{aligned}\right. \tag{32}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_1 &= [m_2\delta_2 - (m_0+m_2)\delta_1]\sqrt{\frac{3}{m_0M}}, \\ \Delta_2 &= [m_1\delta_1 - (m_0+m_1)\delta_2]\sqrt{\frac{3}{m_0M}}, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

$$\begin{aligned} J &= m_1(m_0+m_1)E_{11} + 2m_1m_2E_{12} + m_2(m_0+m_2)E_{22} \\ &= -\frac{1}{2}(m_1S_{22}+m_2S_{11}). \end{aligned} \tag{34}$$

$$\Delta^2 = Q_1\delta_1 + Q_2\delta_2, \tag{35}$$

$$\left\{\begin{aligned} Q_1r_1^2 + \tfrac{1}{2}Q_2(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2) &= 4\delta_1F^2, \\ Q_2r_2^2 + \tfrac{1}{2}Q_1(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2) &= 4\delta_2F^2, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

$$\left\{\begin{aligned} (m_0+m_1)Q_1 + m_1Q_2 &= -\frac{S_1}{2}, \\ m_2Q_1 + (m_0+m_2)Q_2 &= -\frac{S_2}{2}, \end{aligned}\right. \tag{37}$$

$$\left\{\begin{aligned} S_{11} &= -2[m_1E_{12} + (m_0+m_2)E_{22}], \\ S_{12} &= 2[(m_0+m_1)E_{12} + m_2E_{22}], \\ S_{21} &= 2[m_1E_{11} + (m_0+m_2)E_{12}], \\ S_{22} &= -2[(m_0+m_1)E_{11} + m_2E_{12}], \end{aligned}\right. \tag{38}$$

$$\left\{\begin{aligned} E_{11}S_{11} + E_{12}S_{21} &= -8(m_0+m_2)F^2, \\ E_{12}S_{12} + E_{22}S_{22} &= -8(m_0+m_1)F^2, \\ E_{11}S_{12} + E_{12}S_{22} &= 8m_2F^2, \\ E_{12}S_{11} + E_{22}S_{21} &= 8m_1F^2, \end{aligned}\right. \tag{39}$$

$$\left\{\begin{aligned} m_1S_{22} - (m_0+m_2)S_{12} &= -m_0M(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2), \\ m_2S_{12} - (m_0+m_1)S_{22} &= 2m_0Mr_1^2, \\ m_2S_{11} - (m_0+m_1)S_{12} &= -m_0M(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2), \\ m_1S_{12} - (m_0+m_2)S_{11} &= 2m_0Mr_2^2, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

$$\left\{\begin{aligned} m_2r_2^2 + m_1E_{11} &= \frac{m_0+m_2}{m_0M}J, \\ -(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2) + 2E_{12} &= -\frac{2}{m_0M}J, \\ m_1r_1^2 + m_2E_{22} &= \frac{m_0+m_1}{m_0M}J, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

$$m_1m_2\Delta^2 + \Theta = \frac{JP}{m_0M}, \tag{42}$$

$$(43)\qquad \begin{cases} m_1\, l + (m_0 + m_2)\, l_1 = -\tfrac{1}{2}\, m_0 M S_{11} E_{12}\,, \\ (m_0 + m_1)\, l + m_2\, l_1 = -\tfrac{1}{2}\, m_1 M S_{22} E_{22}\,, \\ m_2\, l + (m_0 + m_1)\, l_2 = -\tfrac{1}{2}\, m_0 M S_{22} E_{12}\,, \\ (m_0 + m_2)\, l + m_1\, l_2 = -\tfrac{1}{2}\, m_0 M S_{11} E_{11}\,, \end{cases}$$

$$(44)\qquad \begin{cases} m_2 S_{11} E_{12} - (m_0 + m_2) S_{22} E_{22} = 2\, l\,, \\ m_1 S_{22} E_{12} - (m_0 + m_1) S_{11} E_{11} = 2\, l\,, \end{cases}$$

$$(45)\qquad \begin{cases} m_0 m_2 M S_{11}^2 E_{12}^2 + 16\,(m_0 + m_1)(m_0 + m_2)^2 F^2 J E_{22} \\ \qquad = 4\, m_0 M (m_2 r_2^2 E_{22} + 4\, m_1 F^2)\, l\,, \\ m_0 m_1 M S_{22}^2 E_{12}^2 + 16\,(m_0 + m_1)^2 (m_0 + m_2) F^2 J E_{11} \\ \qquad = 4\, m_0 M (m_1 r_1^2 E_{11} + 4\, m_2 F^2)\, l\,, \end{cases}$$

$$(46)\qquad \begin{cases} m_0 M S_{11}^2 E_{11} + 16\, m_1 (m_0 + m_2) F^2 J = 4\, m_0 M r_2^2\, l\,, \\ m_0 M S_{11} S_{22} E_{12} + 16\,(m_0 + m_1)(m_0 + m_2) F^2 J = 2\, m_0 M (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\, l\,, \\ m_0 M S_{22}^2 E_{22} + 16\, m_2 (m_0 + m_1) F^2 J = 4\, m_0 M r_1^2\, l\,, \end{cases}$$

$$(47)\qquad \begin{cases} m_0 M S_{11} S_{22} E_{11} E_{22} + 16\, m_1 m_2 E_{12} F^2 J = 4\,(E_{12} J + m_1 m_2 E_{11} E_{22})\, l\,, \\ m_0 M S_{11} S_{22} (E_{11} E_{22} + E_{12}^2) + 16\,(m_0 M + 2\, m_1 m_2)\, E_{12} F^2 J \\ \qquad = 4\, m_0 M [(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\, E_{12} + 4\, F^2]\, l\,, \end{cases}$$

$$(48)\qquad (m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2)\, S_1 + (m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2)\, S_2 = -8\, F^2 P.$$

4. Ein algebraisches Gleichungssystem. Wir betrachten die Gleichungen

$$(49)\qquad \begin{cases} b_{11}\, \xi + b_{12}\, \eta + b_{13}\, \zeta = f_1\,, \\ b_{21}\, \xi + b_{22}\, \eta + b_{23}\, \zeta = f_2\,, \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\,, \end{cases}$$

wo ξ, η, ζ die Unbekannten und die b_{ik} und f_i gegebene Größen bedeuten. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Matrix

$$\begin{matrix} b_{11}, & b_{12}, & b_{13} \\ b_{21}, & b_{22}, & b_{23} \end{matrix}$$

vom Range zwei ist.

Es sei der Reihe nach

$$(50)\qquad \begin{cases} B_1 = b_{12}\, b_{23} - b_{13}\, b_{22}\,, \\ B_2 = b_{13}\, b_{21} - b_{11}\, b_{23}\,, \\ B_3 = b_{11}\, b_{22} - b_{12}\, b_{21}\,, \end{cases}$$

$$(51)\qquad \begin{cases} e_{11} = b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2\,, \\ e_{12} = b_{11}\, b_{21} + b_{12}\, b_{22} + b_{13}\, b_{23}\,, \\ e_{22} = b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2\,, \end{cases}$$

$$(52)\qquad S^2 = e_{11}\, e_{22} - e_{12}^2\,,$$

$$(53)\qquad \varrho = S^2 - (e_{11} f_2^2 - 2\, e_{12} f_1 f_2 + e_{22} f_1^2).$$

Ist $\varrho \geqslant 0$, so besitzen die Gleichungen (49) zwei reelle Lösungen (eventuell eine Doppellösung), welche durch die Formeln

$$(54)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{S^2}\, [f_1 (e_{22}\, b_{11} - e_{12}\, b_{21}) + f_2 (e_{11}\, b_{21} - e_{12}\, b_{11}) + \varepsilon B_1 \sqrt{\varrho}]\,, \\ \eta = \dfrac{1}{S^2}\, [f_1 (e_{22}\, b_{12} - e_{12}\, b_{22}) + f_2 (e_{11}\, b_{22} - e_{12}\, b_{12}) + \varepsilon B_2 \sqrt{\varrho}]\,, \\ \zeta = \dfrac{1}{S^2}\, [f_1 (e_{22}\, b_{13} - e_{12}\, b_{23}) + f_2 (e_{11}\, b_{23} - e_{12}\, b_{13}) + \varepsilon B_3 \sqrt{\varrho}] \end{cases}$$

geliefert werden. Dabei ist $\varepsilon = \pm 1$.

5. Transformation einer binären quadratischen Form. Wir betrachten eine binäre quadratische Form

$$(55)\qquad \psi(\sigma_1, \sigma_2) = C_{11}\, \sigma_1^2 + 2\, C_{12}\, \sigma_1 \sigma_2 + C_{22}\, \sigma_2^2\,.$$

Sämtliche Größen werden als reell und die ganze Form als positiv-definit vorausgesetzt.

Es gibt bekanntlich unendlich viele lineare, homogene, nicht notwendig orthogonale, Transformationen

$$\begin{cases} \sigma_1 = k_{11}\, \sigma_1' + k_{12}\, \sigma_2'\,, \\ \sigma_2 = k_{21}\, \sigma_1' + k_{22}\, \sigma_2'\,, \end{cases}$$

welche die Form (55) in die Einheitsform

$$\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2$$

überführen.

Eine derartige, für unsere Zwecke besonders geeignete Transformation lautet:

$$(56)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_1 &= \left\{ \frac{\sigma_1'}{\sqrt{\sqrt{C_{11}C_{22}}+C_{12}}} + \frac{\sigma_2'}{\sqrt{\sqrt{C_{11}C_{22}}-C_{12}}} \right\} \sqrt[4]{\frac{C_{22}}{4C_{11}}} \\ \sigma_2 &= \left\{ \frac{\sigma_1'}{\sqrt{\sqrt{C_{11}C_{22}}+C_{12}}} - \frac{\sigma_2'}{\sqrt{\sqrt{C_{11}C_{22}}-C_{12}}} \right\} \sqrt[4]{\frac{C_{11}}{4C_{22}}}\,. \end{aligned}\right.$$

Offenbar ist diese Transformation nicht ausgeartet.

II. Grundlegende Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten.

6. Anschluß an die erste Mitteilung. Das in der ersten Mitteilung zunächst in Angriff genommene Problem war von rein algebraischer Natur. Das von den Formeln (10) und (11) gebildete Gleichungssystem kann zunächst als ein algebraisches simultanes System mit den Unbekannten

$$x_1',\ y_1',\ z_1',\ x_2',\ y_2',\ z_2'$$

aufgefaßt werden, und es besteht die Aufgabe, die allgemeine Lösung desselben zu finden. Diese Frage wurde in der ersten Mitteilung nur teilweise gelöst, indem zunächst die allgemeine Lösung des linearen Systems (10) bestimmt wurde. Die Größen x_k', y_k', z_k' erscheinen dann als lineare *Funktionen* der drei willkürlichen Größen σ_1, σ_2, τ. Sollen die erhaltenen Ausdrücke zugleich auch die Gleichung (11) befriedigen, so müssen die Größen σ_1, σ_2, τ einer quadratischen Gleichung (wir nannten sie die transformierte Energiegleichung) genügen, die man durch Substitution der erhaltenen Formeln für x_k', y_k', z_k' in (11) bekommt. Indem wir dann die erhaltenen Formeln gewissen weiteren Parametertransformationen, die auf die Vereinfachung der Energiegleichung abzielten, unterzogen haben, gelangten wir zu folgenden Ergebnissen:

Es sei

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_1 &= \frac{a\,A_2\,\alpha}{4m_1F^2\sqrt{3}} + \frac{a\,A}{8F^2J\sqrt{3}}\,(S_{12}\lambda_1+S_{22}\lambda_2)\,, \\ \overset{\circ}{u}_2 &= -\frac{a\,A_1\,\alpha}{4m_2F^2\sqrt{3}} - \frac{a\,A}{8F^2J\sqrt{3}}\,(S_{11}\lambda_1+S_{21}\lambda_2)\,, \end{aligned}\right.$$

$$(58)\qquad \left\{\begin{aligned} \overset{\times}{u}_1 &= \frac{l_1\lambda_1 - l\lambda_2}{l}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\,, \\ \overset{\times}{u}_2 &= \frac{l_2\lambda_2 - l\lambda_1}{l}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}\,. \end{aligned}\right.$$

Die allgemeine Lösung des simultanen Systems (10) und (11) lautet dann

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \overset{\circ}{u}_1 + \overset{\times}{u}_1\,\tau + \lambda_1\sigma_1 \\ u_2 &= \overset{\circ}{u}_2 + \overset{\times}{u}_2\,\tau + \lambda_2\sigma_2\,. \end{aligned}\right.$$

Natürlich gelten ähnliche Formeln für die v_k, w_k, die aus (57), (58), (59) durch zyklische Vertauschung der Buchstaben λ_k, μ_k, ν_k und α, β, γ zu bestimmen sind.

Die Variablen σ_1, σ_2, τ müssen dabei der (transformierten) Energiegleichung

$$(60)\qquad C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2 + C_{33}\tau^2 + C - W = 0$$

genügen. Für die Koeffizienten C_{ik} und C derselben gelten folgende Formeln:

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} &C_{11} = m_1(m_0+m_2)E_{11}\,, \qquad C_{12} = -m_1m_2E_{12}\,, \\ &C_{22} = m_2(m_0+m_1)E_{22}\,, \qquad C_{33} = \frac{4m_0MF^2J}{l}\,, \\ &C - W = \frac{a^2m_0M}{4m_1m_2F^2J} + \frac{1}{J}\,(a^2m_0M - WJ)\,. \end{aligned}\right.$$

Wie in der ersten Mitteilung näher auseinandergesetzt wurde, ist stets, solange die Bewegung regulär und reell ist,

$$(62)\qquad C - W \leqq 0\,.$$

Übrigens ist noch $C_{11}C_{22} - C_{12}^2 = m_1m_2l > 0$ und $C_{33} > 0$.

7. Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten. Aus (4) und (59) folgt zunächst

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1' &= \overset{\circ}{u}_1\sqrt{\frac{M}{m_0}} + \overset{\times}{u}_1\,\tau\sqrt{\frac{M}{m_0}} + \lambda_1\sqrt{\frac{M}{m_0}}\,\sigma_1\,, \\ x_2' &= \overset{\circ}{u}_2\sqrt{\frac{M}{m_0}} + \overset{\times}{u}_2\,\tau\sqrt{\frac{M}{m_0}} + \lambda_2\sqrt{\frac{M}{m_0}}\,\sigma_2\,. \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber nach (3) und (40)

$$(64)\quad \begin{cases} S_{12}\lambda_1 + S_{22}\lambda_2 = \sqrt{m_0 M}\,[-(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)x_1 + 2r_1^2 x_2]\,, \\ S_{11}\lambda_1 + S_{21}\lambda_2 = \sqrt{m_0 M}\,[-(2r_2^2 x_1 - (r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)\,x_2]\,. \end{cases}$$

Aus (57) und (64) folgt dann

$$(65)\quad \begin{cases} \overset{\circ}{u}_1 = \dfrac{a\,\Delta_2\,\alpha}{4m_1F^2\sqrt{3}} + \dfrac{a\,A\sqrt{m_0M}}{8F^2J\sqrt{3}}\,[-(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)\,x_1 + 2r_1^2x_2]\,, \\ \overset{\circ}{u}_2 = -\dfrac{a\,\Delta_1\,\alpha}{4m_2F^2\sqrt{3}} - \dfrac{a\,A\sqrt{m_0M}}{8F^2J\sqrt{3}}\,[2r_2^2x_1 - (r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)\,x_2]. \end{cases}$$

Nach (3) und (34) ist ähnlich

$$(66)\quad \begin{cases} l_1\lambda_1 - l\lambda_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{m_0M}\,(S_{11}E_{12}x_1 - S_{22}E_{22}x_2)\,, \\ l_2\lambda_2 - l\lambda_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{m_0M}\,(S_{22}E_{12}x_2 - S_{11}E_{11}x_1)\,, \end{cases}$$

was in Verbindung mit (58) die Ausdrücke

$$(67)\quad \begin{cases} \overset{\times}{u}_1 = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{m_0m_2M}{m_1}}\,(S_{11}E_{12}x_1 - S_{22}E_{22}x_2) \\ \overset{\times}{u}_2 = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{m_0m_1M}{m_2}}\,(-S_{11}E_{12}x_1 + S_{22}E_{22}x_2) \end{cases}$$

liefert.

Aus (63), (65), (67), und (13) gelangt man zu dem wichtigen Ergebnis, daß für die Geschwindigkeitskomponenten x_k', y_k', z_k' die folgenden Formeln gelten:

$$(68)\quad \begin{cases} x_1' = a_{10}(y_1z_2 - z_1y_2) + a_{11}x_1 + a_{12}x_2\,, \\ y_1' = a_{10}(z_1x_2 - x_1z_2) + a_{11}y_1 + a_{12}y_2\,, \\ z_1' = a_{10}(x_1y_2 - y_1x_2) + a_{11}z_1 + a_{12}z_2\,, \end{cases}$$

$$(69)\quad \begin{cases} x_2' = a_{20}(y_1z_2 - z_1y_2) + a_{21}x_1 + a_{22}x_2\,, \\ y_2' = a_{20}(z_1x_2 - x_1z_2) + a_{21}y_1 + a_{22}y_2\,, \\ z_2' = a_{20}(x_1y_2 - y_1x_2) + a_{21}z_1 + a_{22}z_2\,. \end{cases}$$

Für die Koeffizienten a_{ik} gelten folgende Formeln:

$$(70)\quad \begin{cases} a_{10} = \dfrac{a}{4m_0m_1F^2}\,[m_1\delta_1 - (m_0+m_1)\,\delta_2]\,, \\ a_{20} = -\dfrac{a}{4m_0m_2F^2}\,[m_2\delta_2 - (m_0+m_2)\,\delta_2]\,, \end{cases}$$

$$(71)\quad \begin{cases} a_{11} = -\dfrac{a\,A\,M}{8F^2J\sqrt{3}}\,(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2) + \dfrac{M}{2l}\,S_{11}E_{12}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\,\tau - \dfrac{m_0+m_2}{m_0}\,\sigma_1\,, \\ a_{12} = \dfrac{a\,A\,M}{4F^2J\sqrt{3}}\,r_1^2 - \dfrac{M}{2l}\,S_{22}E_{22}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\,\tau + \dfrac{m_2}{m_0}\,\sigma_1\,, \\ a_{21} = -\dfrac{a\,A\,M}{4F^2J\sqrt{3}}\,r_2^2 - \dfrac{M}{2l}\,S_{11}E_{11}\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}\,\tau + \dfrac{m_1}{m_0}\,\sigma_2\,, \\ a_{22} = \dfrac{a\,A\,M}{8F^2J\sqrt{3}}\,(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2) + \dfrac{M}{2l}\,S_{22}E_{12}\,\tau - \dfrac{m_0+m_1}{m_0}\,\sigma_2\,. \end{cases}$$

Die Formeln (68) und (69) stellen die gewünschte allgemeine Lösung der Gleichungen (10) und (11) dar. Diese Gestalt der Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten wird schon keine weitere Änderung erfahren, und das alles, was in diesem Kapitel unten folgt, wird auf eine zweckmäßige Darstellung der Koeffizienten a_{ik} abzielen. Weitere Auseinandersetzungen über die Bedeutung der Formeln (68) und (69) findet man am Ende dieses Kapitels.

8. Eine weitere Transformation der Energiegleichung. Die Koeffizienten a_{ik} $(k > 0)$ hängen u. a. von den Größen σ_1, σ_2, τ ab, welche ihrerseits der Gleichung (60) genügen. Hieraus sieht man sofort, daß man die drei Parameter σ_1, σ_2, τ durch zwei andere θ_1 und θ_2 ersetzen kann, die dann schon vollkommen beliebige Werte annehmen können. Doch bevor wir das machen werden, wollen wir noch eine Parametertransformation ausführen, die eine weitere Vereinfachung der Gleichung (60) bezweckt. Hiezu werden die Resultate von N° 5 herangezogen, wodurch der Ausdruck

$$(72)\qquad C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2$$

der linkerseits der Gleichung (60) vorkommt, in eine Quadratsumme transformiert wird.

Zu diesem Zwecke wird der Reihe nach

$$
(73)\quad \begin{cases}
\omega_1 = \sqrt[4]{\dfrac{C_{22}}{4\,C_{11}}} = \sqrt[4]{\dfrac{m_2\,(m_0+m_1)\,E_{22}}{4\,m_1\,(m_0+m_2)\,E_{11}}}\,, \\
\omega_2 = \sqrt[4]{\dfrac{C_{11}}{4\,C_{22}}} = \sqrt[4]{\dfrac{m_1\,(m_0+m_2)\,E_{11}}{4\,m_2\,(m_0+m_1)\,E_{22}}}\,, \\
I = \sqrt{m_1\,m_2\,(m_0\,M + m_1\,m_2)\,E_{11}\,E_{22}}\,, \\
k_1 = \dfrac{M}{\sqrt{I - m_1\,m_2\,E_{12}}}\,, \qquad k_2 = \dfrac{M}{\sqrt{I + m_1\,m_2\,E_{22}}}\,,
\end{cases}
$$

$$
(74)\quad \begin{cases}
\sigma_1 = \omega_1\,(k_1\,\sigma_1' + k_2\,\sigma_2'), \\
\sigma_2 = \omega_2\,(k_1\,\sigma_2' - k_2\,\sigma_2')
\end{cases}
$$

gesetzt.

Bemerkt man jetzt, daß nach (25)

$$
(I - m_1\,m_2\,E_{12})\,(I + m_1\,m_2\,E_{12}) = m_1\,m_2\,l
$$

gilt, so sieht man sofort, daß bei der früher gemachten Voraussetzung $F > 0$ die Transformation (74) gewiß zulässig ist. Für die Größen ω_i und k_i gelten übrigens die folgenden einfachen Formeln:

$$
(75)\quad \begin{cases}
\omega_1\,\omega_2 = \dfrac{1}{2}\,, \qquad k_1^2 + k_2^2 = \dfrac{2\,M^2\,I}{m_1\,m_2\,l}\,, \qquad k_1^2 - k_2^2 = \dfrac{2\,M^2\,E_{12}}{l}\,, \\
\omega_1^2\,(k_1^2 + k_2^2) = \dfrac{(m_0 + m_1)\,M^2\,E_{22}}{m_1\,l}\,, \\
\omega_2^2\,(k_1^2 + k_2^2) = \dfrac{(m_0 + m_2)\,M^2\,E_{11}}{m_2\,l}\,, \\
\omega_1\,\omega_2\,(k_1^2 - k_2^2) = \dfrac{M^2\,E_{22}}{l}\,, \qquad \omega_1\,\omega_2\,k_1\,k_2 = \dfrac{M^2}{2\sqrt{m_1\,m_2\,l}}\,.
\end{cases}
$$

Den Ergebnissen von N° 5 zufolge wird der Ausdruck (72) durch die Transformation (74) auf die Gestalt

$$
M^2\,(\sigma_1'^2 + \sigma_1'^2)
$$

gebracht.

Wir führen jetzt die Parametertransformation (74) auch in den Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten durch. Dabei bleibt natürlich die allgemeine Gestalt der Ausdrücke (68) und (69) ungeändert. Die Formeln (70) gelten offenbar weiter, während die Formeln (71) die folgende Gestalt annehmen:

$$
(76)\quad \begin{cases}
a_{11} = -\dfrac{a\,A\,M}{8\,F^2\,J\sqrt{3}}\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \dfrac{M}{2\,l}\,S_{11}\,E_{12}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\,\tau \\
\qquad\quad - \dfrac{m_0 + m_2}{m_0}\,\omega_1\,(k_1\,\sigma_1 + k_2\,\sigma_2)\,, \\
a_{12} = \dfrac{a\,A\,M}{4\,F^2\,J\sqrt{3}}\,r_1^2 - \dfrac{M}{2\,l}\,S_{22}\,E_{22}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\,\tau + \dfrac{m_2}{m_0}\,\omega_1\,(k_1\,\sigma_1 + k_2\,\sigma_2)\,, \\
a_{21} = -\dfrac{a\,A\,M}{4\,F^2\,J\sqrt{3}}\,r_2^2 - \dfrac{M}{2\,l}\,S_{11}\,E_{11}\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}\,\tau + \dfrac{m_1}{m_0}\,\omega_2\,(k_1\,\sigma_1 - k_2\,\sigma_2)\,, \\
a_{22} = \dfrac{a\,A\,M}{8\,F^2\,J\sqrt{3}}\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \dfrac{M}{2\,l}\,S_{22}\,E_{12}\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}\,\tau \\
\qquad\quad - \dfrac{m_0 + m_1}{m_0}\,\omega_2\,(k_1\,\sigma_1 - k_2\,\sigma_2).
\end{cases}
$$

Dabei haben wir nach der Substitution der Ausdrücke (74) in den Formeln (68) und (69) wieder anstatt σ_1' und σ_2' kurzweg σ_1 und σ_2 geschrieben.

Die gegenwärtigen Größen σ_1, σ_2 und τ sind weiter nicht unabhängig, sondern genügen der transformierten Energiegleichung:

$$
(77)\qquad M^2\,(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + C_{33}\,\tau^2 + (C - W) = 0\,.
$$

Die Werte für C_{33} und $C - W$ sind den Formeln (61) zu entnehmen.

Auf Grund der bisherigen Überlegungen bekommen wir das folgende Resultat:

Ist $F > 0$, *so liefern die Formeln* (68) *und* (69) *in Verbindung mit* (4) *die allgemeine Lösung des simultanen algebraischen Systems* (10) *und* (11). *Für die Koeffizienten* a_{ik} *gelten die Formeln* (70) *und* (76). *Die willkürlichen Größen* σ_1, σ_2, τ *sind durch die quadratische Gleichung* (77) *gebunden, wobei* C_{33} *und* $C - W$ *durch die Formeln* (61) *erklärt sind.*

9. Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten durch zwei Parameter. Nachdem wir die Energiegleichung (11) auf die kanonische Gestalt (77) gebracht haben, können wir nunmehr den letzten Schritt ausführen, indem wir die drei durch (77) verbundene Größen σ_1, σ_2 und τ durch zwei schon vollkommen freie Parameter θ_1 und θ_2 ersetzen.

Wir führen zunächst eine neue Größe Ω

$$\Omega^2 = JV - a^2 M - \frac{a^2 M \theta}{4 m_1 m_2 F^2} \qquad \Omega > 0, \tag{78}$$

ein. Aus (61) und (9) folgt dann unter Berücksichtigung von (62), daß, solange die Bewegung reell ist und die drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen, gewiß

$$\Omega^2 \geqslant 0$$

gilt.

Aus (61) und (78) folgt dann unmittelbar

$$\begin{cases} W - C = \dfrac{m_0}{J}\,\Omega^2, \\[2mm] \dfrac{W-C}{C_{33}} = \dfrac{l}{4MF^2J^2}\,\Omega^2. \end{cases} \tag{79}$$

Wir können also das „Ellipsoid" (77) durch folgende parametrische Gleichungen darstellen:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\Omega}{M}\sqrt{\dfrac{m_0}{J}}\,\cos\theta_1\cos\theta_2, \\[2mm] \sigma_2 = \dfrac{\Omega}{M}\sqrt{\dfrac{m_0}{J}}\,\cos\theta_1\sin\theta_2, \\[2mm] \tau = \dfrac{\Omega}{2FJ}\sqrt{\dfrac{l}{M}}\,\sin\theta_1. \end{cases} \tag{80}$$

Tragen wir die Werte (80) für σ_1, σ_2 und τ in die Formeln (76) ein, so liefern die Gleichungen (68) und (69) die allgemeine Lösung von (10) und (11), die von zwei vollkommen willkürlichen Größen θ_1 und θ_2 abhängt.

Auf diese Weise bekommen wir den folgenden

Satz: *Ist $F > 0$, so besitzen die Gleichungen* (10) *und* (11), *als ein algebraisches System betrachtet,* ∞^2 *Lösungen. Diese werden*

durch die Formeln (4), (68) *und* (69) *geliefert. Die Koeffizienten* a_{10} *und* a_{20} *sind durch die Gleichungen* (70) *erklärt, während für die* a_{ik} $(k > 0)$ *folgende Ausdrücke gelten:*

$$\left\{\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{aAM}{8F^2J\sqrt{3}}\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{\Omega}{4FJ}\,S_{11}E_{12}\sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}}\,\sin\theta_1 \\ &\quad - \frac{\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,(m_0 + m_2)\,\omega_1(k_1\cos\theta_1\cos\theta_2 - k_2\cos\theta_1\sin\theta_2), \\ a_{12} &= \frac{aAM}{4F^2J\sqrt{3}}\,r_1^2 - \frac{\Omega}{4FJ}\,S_{22}E_{22}\sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}}\,\sin\theta_1 \\ &\quad + \frac{\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,m_2\,\omega_1(k_1\cos\theta_1\cos\theta_2 + k_2\cos\theta_1\sin\theta_2), \\ a_{21} &= -\frac{aAM}{4F^2J\sqrt{3}}\,r_2^2 - \frac{\Omega}{4FJ}\,S_{11}E_{11}\sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}}\,\sin\theta_1 \\ &\quad + \frac{\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,m_1\,\omega_2(k_1\cos\theta_1\cos\theta_2 - k_2\cos\theta_1\sin\theta_2), \\ a_{22} &= -\frac{aAM}{8F^2J\sqrt{3}}\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + \frac{\Omega}{4FJ}\,S_{22}E_{12}\sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}}\,\sin\theta_1 \\ &\quad - \frac{\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,(m_0 + m_1)\,\omega_2(k_1\cos\theta_1\cos\theta_2 - k_2\cos\theta_1\sin\theta_2). \end{aligned}\right. \tag{81}$$

Die Parameter θ_1 und θ_2 können vollkommen beliebige Werte annehmen.

10. Normalgeschwindigkeiten. Orientierendes über den weiteren Gedankengang. Obwohl wir schon die allgemeine Lösung des simultanen Systems (10) und (11) bestimmt haben, so ist doch das erhaltene Formelsystem (4), (68), (69), (70) und (81) für weitere Untersuchungen noch nicht geeignet und zwar aus zweifachem Grunde. Erstens sind die in den Größen ω_i und k_i vorkommenden Irrationalitäten äußerst kompliziert, und zweitens kommt den Größen θ_1 und θ_2 keine ausgeprägte geometrische oder mechanische Deutung zu. Wir werden demnach die Parameter θ_1 und θ_2 durch zwei andere derart zu ersetzen versuchen, daß diesen Übeln abgeholfen wird.

Zu diesem Zwecke wenden wir uns den fundamentalen Formeln (68) und (69) zu. Die Addition der Gleichungen (68) und ähnlich der Gleichungen (69) ergibt in Verbindung mit (15) und (14)

$$(82)\qquad \begin{cases} \delta_1' = a_{10} A + a_{11}\,\delta_1 + a_{12}\,\delta_2\,, \\ \delta_2' = a_{20} A + a_{21}\,\delta_1 + a_{22}\,\delta_2\,. \end{cases}$$

Dabei bedeuten δ_1' und δ_2' die nach der Zeit berechneten ersten Ableitungen der Größen δ_1 und δ_2. Nun stellt aber die Größe δ_i nach entsprechender Vorzeichenverabredung die Distanz des materiellen Punktes m_i von der fundamentalen Ebene der relativen Bewegung dar. Hieraus folgt die einfache mechanische Bedeutung der Größe δ_i'. Es stellt nämlich δ_i' diejenige Komponente der Geschwindigkeit der Masse m_i dar, die in der zur Fundamentalebene normalen Richtung berechnet ist. Wir werden deshalb für die Größen

$$\delta_1' \text{ und } \delta_2'$$

den Ausdruck *Normalgeschwindigkeiten* benutzen. Die Größe δ_i' stellt die Geschwindigkeit dar, mit welcher sich der materielle Punkt m_i von der Fundamentalebene entfernt.

Unser weiterer Gedankengang ist plausibel. Die rechten Seiten der Formeln (82) enthalten nach (81) die Größen θ_1 und θ_2 und man wird auf die Idee geführt, die Formeln (82) als Gleichungen für θ_1 und θ_2 aufzufassen, und sie in bezug auf θ_1 und θ_2 aufzulösen. Dadurch werden θ_1 und θ_2 u. a. durch die Normalgeschwindigkeiten δ_1' und δ_2' dargestellt:

$$\theta_1 = \theta_1(\delta_1', \delta_2', \ldots),$$
$$\theta_2 = \theta_2(\delta_1', \delta_2', \ldots).$$

Indem man diese Ausdrücke für θ_1 und θ_2 in die Formeln (81) einsetzt, bekommt man die Größen a_{ik} als Funktionen der Normalgeschwindigkeiten δ_1' und δ_2'. Die Formeln (68) und (69) werden dann, in Verbindung mit den für die a_{ik} erhaltenen Ausdrücken, die Geschwindigkeitskomponenten x_k', y_k', z_k' in der Abhängigkeit von den Größen δ_k' darstellen. Dadurch werden wir zu einer neuen Darstellung der allgemeinen Lösung des simultanen algebraischen Systems (10) und (11) gelangen. Diese wird wieder von zwei willkürlichen Größen abhängen, und zwar von den Normalgeschwindigkeiten δ_1' und δ_2'. Abgesehen davon wird sich eine erhebliche Vereinfachung der Formeln (81) herausstellen. Auf diese Weise werden wir zu den grundlegenden Formeln für die relativen Geschwindigkeitskomponenten gelangen, die das Hauptresultat dieser Mitteilung bilden. In den darauf folgenden Arbeiten werden wir sehen, daß diese Formeln mit Erfolg auf verschiedene Fragen auf dem Gebiete des Dreikörperproblem sich anwenden lassen.

Wir wenden uns also der Durchführung unserer einfachen Überlegungen zu, wobei freilich mehrere Rechnungen von ganz elementarer aber ziemlich komplizierter Natur zu überwinden sind.

11. Lösung der Gleichungen (82). Den Formeln (70), (81) und (15) zufolge, lauten die Gleichungen (82) explizite folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \delta_1' = {} & \frac{aA}{4\,m_0\,m_1\,F^2\sqrt{3}}\,[m_1\,\delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2] \\ & + \frac{aAM}{8F^2J\sqrt{3}}\,[2\,r_1^2\,\delta_2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_1] \\ & + \frac{\Omega}{4FJ}\,(S_{11}\,E_{12}\,\delta_1 - S_{22}\,E_{22}\,\delta_2)\sqrt{\frac{m_2 M}{m_1 l}}\,\sin\theta_1 \\ & + \frac{\Omega\,\omega_1}{M\sqrt{m_0 J}}\,[m_2\,\delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1]\,(k_1\cos\theta_1\cos\theta_2 + k_2\cos\theta_1\sin\theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2' = {} & -\frac{aA}{4\,m_0\,m_2\,F^2\sqrt{3}}\,[m_2\,\delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1] \\ & - \frac{aAM}{8F^2J\sqrt{3}}\,[2\,r_2^2\,\delta_1 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_1] \\ & + \frac{\Omega}{4FJ}\,(S_{22}\,E_{12}\,\delta_2 - S_{11}\,E_{11}\,\delta_1)\sqrt{\frac{m_1 M}{m_2 l}}\,\sin\theta_1 \\ & + \frac{\Omega\,\omega_2}{M\sqrt{m_0 J}}\,[m_1\,\delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2]\,(k_1\cos\theta_1\cos\theta_2 - k_2\cos\theta_1\sin\theta_2). \end{aligned}$$

Nun ist aber unter Anwendung von (41)

$$\frac{aA}{4\,m_0\,m_1\,F^2\sqrt{3}}\,[m_1\,\delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2] + \frac{aAM}{8F^2J\sqrt{3}}\,[2\,r_1^2\,\delta_2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_1]$$

$$= \frac{aA}{8m_0m_1F^2J\sqrt{3}}\Big\{[2m_1J - m_0m_1M(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)]\,\delta_1$$
$$+ [-2(m_0+m_1)J + 2m_0m_1Mr_1^2]\,\delta_2\Big\} = -\frac{aAM}{4m_1F^2J\sqrt{3}}\,(m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2)$$

und eine analoge Formel ergibt sich für den ähnlichen Ausdruck in der zweiten Gleichung. Demnach kann man die Gleichungen (82) auf die folgende Gestalt bringen:

$$(83)\qquad \begin{cases} \delta_1' + \dfrac{aAM}{4m_1F^2J\sqrt{3}}\,(m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2) \\ \qquad = \dfrac{\Omega}{4FJ}\,(S_{11}E_{12}\delta_1-S_{22}E_{22}\delta_2)\sqrt{\dfrac{m_2M}{m_1l}}\sin\theta_1 \\ \quad + \dfrac{\Omega\omega_1}{M\sqrt{m_0J}}\,[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1](k_1\cos\theta_1\cos\theta_2+k_2\cos\theta_1\sin\theta_2), \\ \delta_2' - \dfrac{aAM}{4m_2F^2J\sqrt{3}}\,(m_1E_{11}\delta_1+m_2E_{12}\delta_2) \\ \qquad = \dfrac{\Omega}{4FJ}\,(-S_{11}E_{11}\delta_1+S_{22}E_{12}\delta_2)\sqrt{\dfrac{m_1M}{m_2l}}\sin\theta_1 \\ \quad + \dfrac{\Omega\omega_2}{M\sqrt{m_0J}}\,[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2](k_1\cos\theta_1\cos\theta_2-k_2\cos\theta_1\sin\theta_2). \end{cases}$$

Bei der Lösung der Gleichungen (83) wird es sich als vorteilhaft erweisen, die Identität

$$(84)\qquad \sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_1\sin^2\theta_2=1$$

heranzuziehen, wodurch der Anschluß an die Ergebnisse von N°4 gewonnen wird.

Indem man der Reihe nach

$$(85)\qquad \begin{cases} b_{11} = \dfrac{\Omega}{4FJ}\,(S_{11}E_{12}\delta_1-S_{22}E_{22}\delta_2)\sqrt{\dfrac{m_2M}{m_1l}}, \\ b_{21} = \dfrac{\Omega}{4FJ}\,(-S_{11}E_{12}\delta_1+S_{22}E_{22}\delta_2)\sqrt{\dfrac{m_1M}{m_2l}}, \\ b_{12} = \dfrac{\Omega\omega_1k_1}{M\sqrt{m_0J}}\,[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1], \end{cases}$$

$$(85)\qquad \begin{cases} b_{22} = \dfrac{\Omega\omega_2k_1}{M\sqrt{m_0J}}\,[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2], \\ b_{13} = \dfrac{\Omega\omega_1k_2}{M\sqrt{m_0J}}\,[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1], \\ b_{23} = -\dfrac{\Omega\omega_2k_2}{M\sqrt{m_0J}}\,[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2] \end{cases}$$

$$(86)\qquad \begin{cases} \mathring{f}_1 = \dfrac{aAM}{4m_1F^2J\sqrt{3}}\,(m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2), \\ \mathring{f}_2 = -\dfrac{aAM}{4m_2F^2J\sqrt{3}}\,(m_1E_{11}\delta_1+m_2E_{12}\delta_2), \end{cases}$$

$$(87)\qquad f_1=\delta_1'+\mathring{f}_1,\qquad f_2=\delta_2'+\mathring{f}_2,$$

$$(88)\qquad \sin\theta_1=\xi,\qquad \cos\theta_1\cos\theta_2=\eta,\qquad \cos\theta_1\sin\theta_2=\zeta$$

setzt, sieht man sofort, daß die Gleichungen (83) und (84) ein System von der in N° 4 untersuchten Gestalt (49) bilden. Wir werden also die a. a. O. erwähnten Formeln anwenden können, unter der Bedingung natürlich, daß die Matrix der Größen b_{ik} vom Range zwei ist. Dies wird, wie wir uns weiter überzeugen werden, stets dann und nur dann der Fall sein, wenn die beiden Punkte m_1 und m_2 nicht gleichzeitig in der Fundamentalebene liegen.

Demnach machen wir jetzt die für das Folgende notwendigen Voraussetzungen:

1° alle drei materiellen Punkte m_0, m_1, m_2 sollen nicht gleichzeitig in einer Geraden liegen,

2° es ist

$$\delta_1^2+\delta_2^2>0,$$

d. h. die Planeten m_1 und m_2 liegen nicht beide in der Fundamentalebene,

3° es ist $\Omega>0$.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so ist stets

$$F>0,\qquad \Delta>0,\qquad \mathrm{P}>0,\qquad \theta>0.$$

Wir könnten jetzt ohne weiteres die Formeln (49) anwenden, wonach mit Rücksicht auf (88) die Größen θ_2 und θ_2 durch δ_1' und δ_2' ausgedrückt werden würden. Es wird sich aber als bequemer erweisen darauf zu verzichten, vielmehr die Formeln (49) unmittelbar in die Ausdrücke (81) einzusetzen und die verschiedenen Koeffizienten erst dann auszuwerten.

Wir beginnen die ganze Rechnung mit der Bestimmung der in der N° 4 eingeführten Größen e_{ik}, B_i, S und R.

12. Die Berechnung der Größen e_{ik}, S^2, B_i. Aus (51) und (85) folgt

$$e_{11} = \frac{m_2 M \Omega^2}{16 m_1 l F^2 J^2} (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2)^2$$
$$+ \frac{\Omega^2 \omega_1^2}{m_0 M^2 J} (k_1^2 + k_2^2) \, [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]^2$$

Nach (75) ist dann

$$e_{11} = \frac{\Omega^2}{16 m_0 m_1 l F^2 J} \{m_0 m_2 M (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2)^2 +$$
$$+ 16 (m_0 + m_1) E_{22} F^2 J [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]^2\} .$$

Der rechterseits in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck ist von der Gestalt

$$c_{11} \delta_1^2 + 2 c_{12} \delta_1 \delta_2 + c_{22} \delta_2^2$$

mit

$$c_{11} = m_0 m_2 M S_{11}^2 E_{12}^2 + 16 (m_0 + m_1)(m_0 + m_2)^2 E_{22} F^2 J ,$$
$$c_{12} = - m_2 E_{22} [m_0 M S_{11} S_{22} E_{12} + 16 (m_0 M + m_1 m_2) F^2 J] ,$$
$$c_{22} = m_2 E_{22} [m_0 M S_{22}^2 E_{22} + 16 m_2 (m_0 + m_1) F^2 J] .$$

Die Anwendung der geeigneten Identitäten (45) und (46) liefert dann

$$c_{11} = 4 m_0 M (m_2 r_2^2 E_{22} + 4 m_1 F^2) \, l ,$$
$$c_{12} = - 2 m_0 m_2 M E_{22} (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \, l ,$$
$$c_{22} = 4 m_0 m_2 M E_{22} r_1^2 \, l .$$

Es ist also

$$c_{11} \delta_1^2 + 2 c_{12} \delta_1 \delta_2 + c_{22} \delta_2^2$$
$$= 4 m_0 M l \{m_2 E_{22} [r_2^2 \delta_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) \delta_1 \delta_2 + r_1^2 \delta_2^2] + 4 m_1 F^2 \delta_1^2\} .$$

Nach (21) ist dann (nach ähnlichen Rechnungen für e_{12} und e_{22})

$$(89) \qquad \begin{cases} e_{11} = \dfrac{M \Omega^2}{4 m_1 F^2 J^2} (m_2 E_{22} \Delta^2 + 4 m_1 F^2 \delta_1^2), \\[2ex] e_{12} = - \dfrac{M \Omega^2}{4 F^2 J^2} (E_{12} \Delta^2 - 4 F^2 \delta_1 \delta_2), \\[2ex] e_{22} = \dfrac{M \Omega^2}{4 m_2 F^2 J^2} (m_1 E_{11} \Delta^2 + 4 m_2 F^2 \delta_2^2) . \end{cases}$$

Es ist weiter nach (52)

$$S^2 = \frac{M^2 \Omega^4}{16 m_1 m_2 F^4 J^4} [(m_1 E_{11} \Delta^2 + 4 m_2 F^2 \delta_2^2)(m_2 E_{22} \Delta^2 + 4 m_1 F^2 \delta_1^2)$$
$$- m_1 m_2 (- E_{12} \Delta^2 + 4 F^2 \delta_1 \delta_2)^2]$$
$$= \frac{M^2 \Omega^4 \Delta^2}{4 m_1 m_2 F^2 J^4} [m_1 m_2 \Delta^2 + (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 \delta_2^2)] .$$

Die sukzessive Anwendung von (27) und (42) liefert dann leicht

$$(90) \qquad S^2 = \frac{M P \Omega^4 \Delta^2}{4 m_0 m_1 m_2 F^2 J^3} .$$

Hieraus sieht man, daß tatsächlich, wenn die beiden Planeten nicht gleichzeitig in der Fundamentalebene liegen und wenn $\Omega > 0$, die Matrix der Größen (85) vom Range zwei ist.

Es ist endlich nach (50) und (85):

$$(91) \qquad \begin{cases} B_1 = - \dfrac{\Omega^2}{m_0 J \sqrt{m_1 m_2 l}} [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] , \\[2ex] B_2 = \dfrac{\Omega^2 k_2}{4 F J \sqrt{m_0 m_1 m_2 M l J}} \{m_1 \omega_1 (- S_{11} E_{11} \delta_1 + S_{22} E_{12} \delta_2) [m_2 \delta_2 \\ \quad - (m_0 + m_2) \delta_1] + m_2 \omega_2 (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2]\} , \\[2ex] B_3 = \dfrac{\Omega^2 k_1}{4 F J \sqrt{m_0 m_1 m_2 M l J}} \{m_2 \omega_2 (S_{11} E_{12} \delta_1 - S_{22} E_{22} \delta_2) [m_1 \delta_1 \\ \quad - (m_0 + m_1) \delta_2] - m_1 \omega_1 (- S_{11} E_{11} \delta_1 + S_{22} E_{12} \delta_2) [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1]\} . \end{cases}$$

13. Die Berechnung der Größe ϱ. Aus (87) folgt zunächst

$$(92)\quad \begin{cases} e_{11} f_2^2 - 2 e_{12} f_1 f_2 + e_{22} f_1^2 = [(e_{11} \mathring{f}_2 - e_{12} \mathring{f}_1) \mathring{f}_2 - (e_{12} \mathring{f}_2 - e_{22} \mathring{f}_1) \mathring{f}_1] \\ \quad + 2 [(e_{11} \mathring{f}_2 - e_{12} \mathring{f}_1) \delta_2' + (e_{12} \mathring{f}_1 - e_{12} \mathring{f}_2) \delta_1'] + (e_{11} \delta_2'^2 - 2 e_{12} \delta_1' \delta_2' + e_{22} \delta_1'^2). \end{cases}$$

Aus (89) und (86) folgt nun

$$e_{11} \mathring{f}_2 - e_{12} \mathring{f}_1$$

$$= \frac{a A M^2 \Omega^2}{16 m_1 m_2 F^4 J^3 \sqrt{3}} \{ - (m_2 E_{22} \Delta^2 + 4 m_1 F^2 \delta_1^2)(m_1 E_{11} \delta_1 + m_2 E_{12} \delta_2)$$

$$+ m_2 (E_{12} \Delta^2 - 4 F^2 \delta_1 \delta_2)(m_1 E_{12} \delta_1 + m_2 E_{22} \delta_2) \}$$

$$= \frac{a A M^2 \Omega^2}{16 m_1 m_2 F^4 J^3 \sqrt{3}} (- 4 m_1 m_2 \delta_1 F^4 \Delta^2 - 4 \delta_1 F^2 \theta).$$

Die Anwendung von (42) und die Durchführung einer ähnlicher Rechnung für die Größe $e_{22} \mathring{f}_1 - e_{12} \mathring{f}_2$ liefern dann

$$(93)\quad \begin{cases} e_{11} \mathring{f}_2 - e_{12} \mathring{f}_1 = - \dfrac{a A M P \Omega^2 \delta_1}{4 m_0 m_1 m_2 F^2 J^2 \sqrt{3}}, \\ e_{22} \mathring{f}_1 - e_{12} \mathring{f}_2 = \dfrac{a A M P \Omega^2 \delta_2}{4 m_0 m_1 m_2 F^2 J^2 \sqrt{3}}. \end{cases}$$

Aus (86), (91), (89) und (28) folgt unmittelbar

$$(94)\quad \begin{cases} e_{11} \mathring{f}_2^2 - 2 e_{12} \mathring{f}_1 \mathring{f}_2 + e_{22} \mathring{f}_1^2 = \dfrac{a^2 A^2 M^2 P \Omega^2 \theta}{48 m_0 m_1^2 m_2^2 F^4 J^3}, \\ (e_{11} \mathring{f}_2 - e_{12} \mathring{f}_1) \delta_2' + (e_{22} \mathring{f}_1 - e_{12} \mathring{f}_2) \delta_1' = \dfrac{a A M P \Omega^2}{48 m_0 m_1 m_2 F^2 J^2 \sqrt{3}} (\delta_2 \delta_1' - \delta_1 \delta_2'), \\ e_{11} \delta_2'^2 - 2 e_{12} \delta_1' \delta_2' + e_{22} \delta_1'^2 \\ \qquad = \dfrac{M \Omega^2}{4 m_1 m_2 F^2 J^2} [H \Delta^2 + 4 m_1 m_2 F^2 (\delta_1 \delta_2' - \delta_2 \delta_1')^2]. \end{cases}$$

Den Formeln (90) und (94) zufolge ist weiter

$$S^2 - (e_{11} \mathring{f}_2^2 - 2 e_{12} \mathring{f}_1 \mathring{f}_2 + e_{22} \mathring{f}_1^2)$$

$$= \frac{M P \Omega^2}{4 m_0 m_1^2 m_2^2 F^4 J^3} (12 m_1 m_2 F^2 \Delta^2 \Omega^2 - a^2 A^2 M \theta).$$

Bezeichnet man den in der letzten Klammer stehenden Ausdruck kurz mit $(^\times)$, so ist nach (78)

$$(^\times) = 12 m_1 m_2 F^2 J V \Delta^2 - 12 a^2 m_1 m_2 M F^2 \Delta^2 - a^2 M \theta (3 \Delta^2 + A^2).$$

Wegen (31) ist dann weiter

$$(^\times) = 12 m_1 m_2 F^2 J \Delta^2 - 12 a^2 M F^2 (m_1 m_2 \Delta^2 + \theta),$$

woraus schließlich unter Anwendung von (42)

$$(95)\quad (^\times) = \frac{12 F^2 J}{m_0} (m_0 m_1 m_2 V \Delta^2 - a^2 P)$$

folgt.

Die Formeln (53), (92), (94) und (95) ergeben dann den Ausdruck für die Größe ϱ. Es ist nämlich

$$(96)\quad \varrho = \frac{M \Omega^2}{4 m_0^2 m_1^2 m_2^2 F^2 J^2} R$$

mit

$$(97)\quad \begin{aligned} R = (m_0 m_1 m_2 V \Delta^2 - a^2 P) P + \frac{2}{\sqrt{3}} a A m_0 m_1 m_2 P (\delta_1 \delta_2' - \delta_2 \delta_1') \\ - m_0^2 m_1 m_2 [H \Delta^2 + 4 m_1 m_2 F^2 (\delta_1 \delta_2' - \delta_2 \delta_1')^2]. \end{aligned}$$

14. Lösung der Gleichungen (83) und (84). Setzt man jetzt vorübergehend

$$(98)\quad \frac{M \Omega^2}{4 m_0^2 m_1^2 m_2^2 F^2 J^2} = \Omega_1^2,$$

so ist

$$(99)\quad \varrho = \Omega_1^2 R.$$

Wendet man die Formeln (54) auf das Gleichungssystem (83) und (84) an, so bekommt man unter Beachtung von (85), (86), (87), (88)

$$(100)\quad \begin{cases} \sin\theta_1 = \varrho_{10} + \varrho_{11}\,\delta_1' + \varrho_{12}\,\delta_2' + \varrho_{13}\sqrt{R}\,, \\ \cos\theta_1\cos\theta_2 = \varrho_{20} + \varrho_{21}\,\delta_1' + \varrho_{22}\,\delta_2' + \varrho_{23}\sqrt{R}\,, \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 = \varrho_{30} + \varrho_{31}\,\delta_1' + \varrho_{32}\,\delta_2' + \varrho_{33}\sqrt{R}\,, \end{cases}$$

wobei folgende abkürzende Bezeichnungen angewandt wurden:

$$(101)\quad \begin{cases} \varrho_{11} = \dfrac{1}{S^2}\,(e_{22}\,b_{11} - e_{12}\,b_{21})\,, & \varrho_{12} = \dfrac{1}{S^2}\,(e_{11}\,b_{21} - e_{12}\,b_{11})\,, \\ \varrho_{21} = \dfrac{1}{S^2}\,(e_{22}\,b_{12} - e_{12}\,b_{22})\,, & \varrho_{22} = \dfrac{1}{S^2}\,(e_{11}\,b_{22} - e_{12}\,b_{12})\,, \\ \varrho_{31} = \dfrac{1}{S^2}\,(e_{22}\,b_{13} - e_{12}\,b_{23})\,, & \varrho_{23} = \dfrac{1}{S^2}\,(e_{11}\,b_{23} - e_{12}\,b_{13})\,, \end{cases}$$

$$(102)\quad \varrho_{13} = \frac{\varepsilon\,\Omega_1\,B_1}{S^2}\,, \qquad \varrho_{23} = \frac{\varepsilon\,\Omega_1\,B_2}{S^2}\,, \qquad \varrho_{33} = \frac{\varepsilon\,\Omega_1\,B_3}{S^2}\,,$$

$$(103)\quad \begin{cases} \varrho_{10} = \varrho_{11}\,\mathring{f}_1 + \varrho_{12}\,\mathring{f}_2\,, \\ \varrho_{20} = \varrho_{21}\,\mathring{f}_1 + \varrho_{22}\,\mathring{f}_2\,, \\ \varrho_{30} = \varrho_{31}\,\mathring{f}_1 + \varrho_{32}\,\mathring{f}_2\,. \end{cases}$$

Setzt man die Formeln (100) in die Gleichungen (81) ein, so bekommt man die gewünschte Darstellung der Größen a_{ik}, also auch der Geschwindigkeitskomponenten x_k', y_k', z_k' vermittels der Normalgeschwindigkeiten δ_1' und δ_2'. Alles weitere reduziert sich also auf die Auswertung der Größen a_{ik} nach der Substitution (100) in den Gleichungen (81).

15. Die Formeln für die a_{ik}. Die Formeln für die a_{ik} $(k>0)$ lassen sich nach (81) zunächst folgendermaßen darstellen:

$$(104)\quad a_{ik} = \vartheta_{ik}^{(0)} + \vartheta_{ik}^{(1)}\sin\theta_1 + \vartheta_{ik}^{(2)}\cos\theta_1\cos\theta_2 + \vartheta_{ik}^{(3)}\cos\theta_1\sin\theta_2$$

$(i,k=1,2)$. Dabei erhält man die folgende Tafel der Koeffizienten $\vartheta_{ik}^{(j)}$:

$$(105)\quad \begin{cases} \vartheta_{11}^{(0)} = -\dfrac{a\,A\,M}{8F^2J\sqrt{3}}\,(r_1^2 + r_2^2 + r_{12}^2)\,, & \vartheta_{11}^{(1)} = \dfrac{S_{11}\,E_{11}\,\Omega}{4FJ}\sqrt{\dfrac{m_2 M}{m_1 l}}\,, \\ \vartheta_{12}^{(0)} = \dfrac{a\,A\,M}{4F^2J\sqrt{3}}\,r_1^2\,, & \vartheta_{12}^{(1)} = -\dfrac{S_{22}\,E_{22}\,\Omega}{4FJ}\sqrt{\dfrac{m_2 M}{m_1 l}}\,, \\ \vartheta_{21}^{(0)} = -\dfrac{a\,A\,M}{4F^2J\sqrt{3}}\,r_2^2\,, & \vartheta_{21}^{(1)} = -\dfrac{S_{11}\,E_{11}\,\Omega}{4FJ}\sqrt{\dfrac{m_1 M}{m_2 l}}\,, \\ \vartheta_{22}^{(0)} = \dfrac{a\,A\,M}{8F^2J\sqrt{3}}\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,, & \vartheta_{22}^{(1)} = \dfrac{S_{22}\,E_{12}\,\Omega}{4FJ}\sqrt{\dfrac{m_1 M}{m_2 l}}\,, \\ \vartheta_{11}^{(2)} = -\dfrac{(m_0+m_2)\,\omega_1\,k_1\,\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,, & \vartheta_{11}^{(3)} = -\dfrac{(m_0+m_2)\,\omega_1\,k_2\,\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,, \\ \vartheta_{12}^{(2)} = \dfrac{m_2\,\omega_1\,k_1\,\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,, & \vartheta_{12}^{(3)} = \dfrac{m_2\,\omega_1\,k_2\,\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,, \\ \vartheta_{21}^{(2)} = \dfrac{m_1\,\omega_2\,k_1\,\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,, & \vartheta_{21}^{(3)} = -\dfrac{m_1\,\omega_2\,k_2\,\Omega}{M\sqrt{m_0 J}}\,, \\ \vartheta_{22}^{(2)} = -\dfrac{(m_0+m_1)\,\omega_2\,k_1}{M\sqrt{m_0 J}}\,, & \vartheta_{22}^{(3)} = \dfrac{(m_0+m_1)\,\omega_2\,k_2}{M\sqrt{m_0 J}}\,. \end{cases}$$

Aus (104) und (100) folgt, daß nach der Ausführung der oben besprochenen Substitution die Koeffizienten a_{ik} die folgende Gestalt annehmen:

$$(106)\quad a_{ik} = l_{ik}^{(0)} + l_{ik}^{(1)}\,\delta_1' + l_{ik}^{(2)}\,\delta_2' + l_{ik}^{(3)}\sqrt{R} \qquad (i,k=1,2)$$

mit

$$(107)\quad \begin{cases} l_{ik}^{(0)} = \vartheta_{ik}^{(0)} + \vartheta_{ik}^{(1)}\,\varrho_{10} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,\varrho_{20} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,\varrho_{30} & (i,k=1,2), \\ l_{ik}^{(j)} = \vartheta_{ik}^{(1)}\,\varrho_{1j} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,\varrho_{2j} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,\varrho_{3j} & (j=1,2,3). \end{cases}$$

Aus (101), (102), (103) und (107) folgt dann weiter

$$(108)\quad \begin{cases} l_{ik}^{(1)} = \dfrac{1}{S^2}\,[e_{22}\,(\vartheta_{ik}^{(1)}\,b_{11} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,b_{12} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,b_{13}) \\ \qquad - e_{12}\,(\vartheta_{ik}^{(1)}\,b_{21} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,b_{22} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,b_{23})]\,, \end{cases}$$

$$
(108)\quad \left\{
\begin{aligned}
l_{ik}^{(2)} &= \frac{1}{S^2}\,[e_{11}\,(\vartheta_{ik}^{(1)}\,b_{21} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,b_{22} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,b_{23}) \\
&\qquad - e_{12}\,(\vartheta_{ik}^{(1)}\,b_{11} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,b_{12} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,b_{13})] \qquad (i, k = 1, 2), \\
l_{ik}^{(0)} &= \vartheta_{ik}^{(0)} + l_{ik}^{(1)}\,\mathring{f}_1 + l_{ik}^{(2)}\,\mathring{f}_2\,, \\
l_{ik}^{(3)} &= \frac{\varepsilon\,\Omega_1}{S^2}\,(\vartheta_{ik}^{(1)}\,B_1 + \vartheta_{ik}^{(2)}\,B_2 + \vartheta_{ik}^{(3)}\,B_3)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

16. Die Größen $\vartheta_{ik}^{(1)}\,b_{j1} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,b_{j2} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,b_{j3}$. Bei der Berechnung der Größen $l_{ik}^{(0)}$ beginnen wir mit den Ausdrücken

$$\vartheta_{ik}^{(1)}\,b_{j1} + \vartheta_{ik}^{(2)}\,b_{j2} + \vartheta_{ik}^{(3)}\,b_{j3}\,.$$

Es ist z. B. nach (105) und (85):

$$
\begin{aligned}
(\times) &= \vartheta_{11}^{(1)}\,b_{11} + \vartheta_{11}^{(2)}\,b_{12} + \vartheta_{11}^{(3)}\,b_{13} \\
&= \frac{m_2\,M\,\Omega^2}{16\,m_1\,l\,F^2\,J^2}\,S_{11}\,E_{12}\,(S_{11}\,E_{12}\,\delta_1 - S_{22}\,E_{22}\,\delta_2) \\
&\quad - \frac{(m_0 + m_2)\,\omega_1^2\,(k_1^2 + k_2^2)\,\Omega^2}{m_0\,M^2\,J}\,[m_2\,\delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1]\,.
\end{aligned}
$$

Wegen (75) ist dann

$$
\begin{aligned}
(\times) &= \frac{\Omega^2}{16\,m_0\,m_1\,l\,F^2\,J^2}\,\{[m_0\,m_1\,M\,S_{11}^2\,E_{12}^2 + 16\,(m_0 + m_1)\,(m_0 + m_2)^2\,E_{22}\,F^2\,J]\,\delta_1 \\
&= [m_0\,M\,S_{11}\,S_{22}\,E_{12} + 16\,(m_0 + m_1)\,(m_0 + m_2)\,F^2\,J]\,m_2\,E_{22}\,\delta_2\}\,.
\end{aligned}
$$

Die Anwendung der Identitäten (45) und (46) (bzw. (47) bei den anderen Größen dieser Gestalt) liefert ohne weiteres

$$
\begin{aligned}
(\times) &= \frac{M\,\Omega^2}{8\,m_1\,F^2\,J^2}\,\{2\,(m_2\,r_2^2\,E_{22} + 4\,m_1\,F^2)\,\delta_1 - m_2\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{21}^2)\,E_{22}\,\delta_2\} \\
&= \frac{M\,\Omega^2}{4\,m_1\,F^2\,J^2}\,\{m_2\,E_{22}\,[r_2^2\,\delta_1 - \tfrac{1}{2}\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_2] + 4\,m_1\,F^2\,\delta_1\} \\
&= \frac{M\,\Omega^2}{4\,m_1\,F^2\,J^2}\,(m_2\,E_{22}\,Q_1 + 4\,m_1\,F^2\,\delta_1).
\end{aligned}
$$

Auf dieselbe Weise mit ähnlichen Ausdrücken verfahrend, gelangt man zu den nachstehenden Formeln:

$$
(109)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\vartheta_{11}^{(1)}\,b_{11} + \vartheta_{11}^{(2)}\,b_{12} + \vartheta_{11}^{(3)}\,b_{13} = \frac{M\,\Omega^2}{4\,m_1\,F^2\,J^2}\,(m_2\,E_{22}\,Q_1 + 4\,m_1\,F^2\,\delta_1), \\
&\vartheta_{12}^{(1)}\,b_{11} + \vartheta_{12}^{(2)}\,b_{12} + \vartheta_{12}^{(3)}\,b_{13} = \frac{m_2\,M\,E_{22}\,Q_2\,\Omega^2}{4\,m_1\,F^2\,J^2}\,, \\
&\vartheta_{21}^{(1)}\,b_{11} + \vartheta_{21}^{(2)}\,b_{12} + \vartheta_{21}^{(3)}\,b_{13} \\
&\qquad = \frac{\Omega^2}{4\,m_0\,F^2\,J^2}\,[-\,m_0\,M\,r_2^2\,E_{12}\,\delta_1 + (E_{12}\,J + m_0\,M\,E_{11}\,E_{22})\,\delta_2], \\
&\vartheta_{22}^{(1)}\,b_{11} + \vartheta_{22}^{(2)}\,b_{12} + \vartheta_{22}^{(3)}\,b_{13} = -\,\frac{M\,E_{12}\,Q_2\,\Omega^2}{4\,F^2\,J^2}\,, \\
&\vartheta_{11}^{(1)}\,b_{21} + \vartheta_{11}^{(2)}\,b_{22} + \vartheta_{11}^{(3)}\,b_{23} = -\,\frac{M\,E_{12}\,Q_1\,\Omega^2}{4\,F^2\,J^2}\,, \\
&\vartheta_{12}^{(1)}\,b_{21} + \vartheta_{12}^{(2)}\,b_{22} + \vartheta_{12}^{(3)}\,b_{23} \\
&\qquad = \frac{\Omega^2}{4\,m_0\,F^2\,J^2}\,[-\,m_0\,M\,r_1^2\,E_{12}\,\delta_2 + (E_{12}\,J + m_0\,M\,E_{11}\,E_{22})\,\delta_1], \\
&\vartheta_{21}^{(1)}\,b_{21} + \vartheta_{21}^{(2)}\,b_{22} + \vartheta_{21}^{(3)}\,b_{23} = \frac{m_1\,M\,E_{11}\,Q_1\,\Omega^2}{4\,m_2\,F^2\,J^2}\,, \\
&\vartheta_{22}^{(1)}\,b_{21} + \vartheta_{22}^{(2)}\,b_{22} + \vartheta_{12}^{(3)}\,b_{23} = \frac{M\,\Omega^2}{4\,m_2\,F^2\,J^3}\,(m_1\,E_{11}\,Q_2 + 4\,m_2\,F^2\,\delta_2)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

17. Die Koeffizienten $l_{ik}^{(1)}$ und $l_{ik}^{(2)}$. Es ist z. B. nach (108), (89), (90) und (109)

$$
\begin{aligned}
l_{11}^{(1)} &= \frac{m_0\,M}{4\,F^2\,J\,P\,\Delta^2}\,[(m_1\,E_{11}\,\Delta^2 + 4\,m_2\,F^2\,\delta_2^2)\,(m_2\,E_{22}\,Q_1 + 4\,m_1\,F^2\,\delta_2) \\
&\qquad - m_1\,m_2\,E_{12}\,Q_1\,(E_{12}\,\Delta^2 - 4\,F^2\,\delta_1\,\delta_2)] \\
&= \frac{m_0\,M}{J\,P\,\Delta^2}\,[m_1\,m_2\,\Delta^2\,Q_1 + m_1^2\,E_{11}\,\Delta^2\,\delta_1^2 + m_2^2\,E_{22}\,Q_1\,\delta_2^2 \\
&\qquad + 4\,m_1\,m_2\,F^2\,\delta_1\,\delta_2^2 + m_1\,m_2\,E_{12}\,Q_1\,\delta_1\,\delta_2]\,.
\end{aligned}
$$

Aus der Definition der Größen Q_1 und $\varDelta^2$ sieht man, daß der rechterseits stehende Klammerausdruck eine homogene Form dritten Grades inbezug auf die Größen δ_1 und δ_2 ist. Berechnet man die Koeffizienten dieser Form, so erweisen sich diese unter Benutzung von (41) sämtlich durch die Größe J teilbar und man findet zunächst

$$l_{11}^{(1)} = \frac{1}{P\varDelta^2}\Big\{m_1(m_0+m_2)\,r_2^2\,\delta_1^3$$
$$-\,m_1[m_2 r_2^2+(m_0+m_2)(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)]\,\delta_1^2\delta_2+[m_1(m_0+m_2)\,r_1^2+m_2(m_0+m_1)\,r_2^2$$
$$+\tfrac{1}{2}m_1 m_2(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)]\,\delta_1\delta_2^2-\tfrac{1}{2}m_2(m_0+m_1)(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)\,\delta_2^3\Big\},$$

und dann

$$l_{11}^{(1)} = \frac{1}{P\varDelta^2}\left\{m_1(m_0+m_2)\varDelta^2\delta_1-m_2 Q_1\delta_2[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\right\}.$$

Auf ähnliche Weise können auch die übrigen Koeffizienten $l_{ik}^{(j)}$ berechnet werden und man gelangt so zu dem folgenden Formelsystem:

$$(110)\quad \left\{\begin{aligned}
l_{11}^{(1)} &= \frac{1}{P\varDelta^2}\left\{m_1(m_0+m_2)\varDelta^2\delta_1-m_2 Q_1\delta_2[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\right\},\\
l_{12}^{(1)} &= -\frac{m_2}{P\varDelta^2}\left\{m_1\varDelta^2\delta_1+Q_2\delta_2[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\right\},\\
l_{21}^{(1)} &= -\frac{m_1\delta_2^2 S_2}{2P\varDelta^2},\\
l_{22}^{(1)} &= \frac{m_1\delta_1\delta_2 S_2}{2P\varDelta^2},\\
l_{11}^{(2)} &= \frac{m_2\delta_1\delta_2 S_1}{2P\varDelta^2},\\
l_{12}^{(2)} &= -\frac{m_2\delta_1^2 S_1}{2P\varDelta^2},\\
l_{21}^{(2)} &= -\frac{m_1}{P\varDelta^2}\left\{m_2\varDelta^2\delta_2+Q_1\delta_1[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1]\right\},\\
l_{22}^{(2)} &= \frac{1}{P\varDelta^2}\left\{m_2(m_0+m_1)\varDelta^2\delta_2-m_1 Q_2\delta_1[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1]\right\}.
\end{aligned}\right.$$

18. Die Koeffizienten $l_{ik}^{(0)}$. Die Formeln (108), (105), (86) und (110) liefern zunächst

$$\frac{8m_1F^2JP\varDelta^2\sqrt{3}}{aAM}\,l_{11}^{(0)} = -\,m_1(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)P\varDelta^2$$
$$+\,2\left\{m_1(m_0+m_2)\varDelta^2\delta_1-m_2Q_1\delta_2[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\right\}(m_1E_{12}\delta_1$$
$$+\,m_2E_{22}\delta_2)-m_1\delta_1\delta_2S_1(m_1E_{11}\delta_1+m_2E_{12}\delta_2).$$

Nach (17) und (35) ist dann

$$\frac{8m_1F^2JP\varDelta^2\sqrt{3}}{aAM}\,l_{11}^{(0)} = -\,m_1(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)P\varDelta^2$$
$$+\,2\left\{Q_1[m_1(m_0+m_2)\delta_1^2-m_1m_2\delta_1\delta_2+m_2(m_0+m_1)\delta_2^2]\right.$$
$$\left.+\,m_1(m_0+m_2)\delta_1\delta_2Q_2\right\}(m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2)$$
$$-\,m_1\delta_1\delta_2S_1(m_1E_{11}\delta_1+m_2E_{12}\delta_2)$$
$$=-\,m_1(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)P\varDelta^2+2PQ_1(m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2)$$
$$+\,m_1\delta_1\delta_2\left\{2[m_2Q_1+(m_0+m_2)Q_2](m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2)\right.$$
$$\left.-\,S_1(m_1E_{11}\delta_1+m_2E_{12}\delta_2)\right\}.$$

Wegen (37) ist weiter

$$\frac{8m_1F^2JP\varDelta^2\sqrt{3}}{aAM}\,l_{11}^{(0)} = P[-m_1(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)(Q_1\delta_1+Q_2\delta_2)$$
$$+\,2Q_1(m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2)]-m_1\delta_1\delta_2[(m_1E_{11}\delta_1+m_2E_{12}\delta_2)S_1$$
$$+\,(m_1E_{12}\delta_1+m_2E_{22}\delta_2)S_2].$$

Die Identität (48) liefert nun weiter

$$\frac{8m_1F^2J\varDelta^2\sqrt{3}}{aAM}\,l_{11}^{(0)} = Q_1[-m_1\delta_1(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)$$
$$+\,2(m_1E_{12}+m_2E_{22}\delta_2)]-m_1Q_2\delta_2(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)+8m_1\delta_1\delta_2F^2.$$

Benutzt man jetzt die Formeln (36), so bekommt man

$$-\,m_1Q_2\delta_2(r_1^2+r_2^2-r_{12}^2)+8m_1\delta_1\delta_2F^2 = -\,2m_1\delta_2(4F^2\delta_1-Q_1r^2)$$
$$+\,8m_1F^2\delta_1\delta_2 = 2m_1Q_1r_1^2\delta_2,$$

woraus

$$\frac{8\,m_1 F^2 J \varDelta^2 \sqrt{3}}{a\,A\,M}\, l_{11}^{(0)} = Q_1 \left[-m_1 (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_1 \right.$$
$$\left. + 2\,(m_1 E_{12}\,\delta_1 + m_2 E_{22}\,\delta_2) + 2\,m_1 r_1^2\,\delta_2\right]$$

folgt. Es ist also

$$l_{11}^{(0)} = \frac{a\,A\,M\,Q_1}{8\,m_1 F^2 J \varDelta^2 \sqrt{3}} \left\{ m_1 \delta_1 \left[-(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2) + 2\,E_{12}\right]\right.$$
$$\left. + 2\,\delta_2 (m_2 E_{22} + m_1 r_1^2)\right\}.$$

Aus (41) folgt dann schließlich

$$l_{11}^{(0)} = -\frac{a\,A\,Q_1}{4\,m_0 m_1 F^2 \varDelta^2 \sqrt{3}} \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right].$$

Berechnet man auf ähnliche Weise die übrigen Koeffizienten $l_{ik}^{(0)}$, so bekommt man

$$(111)\quad \begin{cases} l_{11}^{(0)} = -\dfrac{a\,A\,Q_1}{4\,m_0 m_1 F^2 \varDelta^2 \sqrt{3}} \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right], \\[2ex] l_{12}^{(0)} = -\dfrac{a\,A\,Q_2}{4\,m_0 m_1 F^2 \varDelta^2 \sqrt{3}} \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right], \\[2ex] l_{21}^{(0)} = \dfrac{a\,A\,Q_1}{4\,m_0 m_2 F^2 \varDelta^2 \sqrt{3}} \left[m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1\right], \\[2ex] l_{22}^{(0)} = \dfrac{a\,A\,Q_2}{4\,m_0 m_2 F^2 \varDelta^2 \sqrt{3}} \left[m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1\right]. \end{cases}$$

19. Die Koeffizienten $l_{ik}^{(3)}$. Es bleibt uns noch übrig die Größen $l_{ik}^{(3)}$ zu berechnen. Nach (107), (102) und (105) ist

$$\frac{\varepsilon S^2}{\Omega_1}\, l_{11}^{(3)} = -\frac{\Omega^3 \sqrt{M}}{4\,m_0 m_1 F J^2 l}\, S_{11} E_{12} \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right]\left[m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1\right]$$
$$- \frac{m_2 (m_0 + m_2)\,\omega_1 \omega_2 k_1 k_2 \Omega^3}{2\,m_0 M F J^2 \sqrt{m_1 m_2 M}\, l} (S_{11} E_{12}\,\delta_1 - S_{22} E_{22}\,\delta_2)\left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right].$$

Die Formeln (75) liefern dann

$$\frac{\varepsilon S^2}{\Omega_1}\, l_{11}^{(3)} = -\frac{\varepsilon\,\Omega^3 \sqrt{M}}{4\,m_0 m_1 F^2 J l}\,\delta_2 \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right]\left[m_2 S_{11} E_{12} - (m_0 + m_2)\, S_{22} E_{22}\right].$$

Wegen (44) ist also

$$l_{11}^{(3)} = -\frac{\varepsilon\,\Omega^3\,\Omega_1 \sqrt{M}}{2\,m_0 m_1 F J^2 S^2}\,\delta_2 \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right].$$

Aus (98) und (90) folgt schließlich

$$l_{11}^{(3)} = -\frac{\varepsilon}{m_0 m_1 P \varDelta^2}\,\delta_2 \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right].$$

Auf ähnliche Weise berechnet man die übrigen Koeffizienten $l_{ik}^{(3)}$. Es gelten die Formeln

$$(112)\quad \begin{cases} l_{11}^{(3)} = -\dfrac{\varepsilon}{m_0 m_1 P \varDelta^2}\,\delta_2 \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right], \\[2ex] l_{12}^{(3)} = \dfrac{\varepsilon}{m_0 m_1 P \varDelta^2}\,\delta_1 \left[m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\,\delta_2\right], \\[2ex] l_{21}^{(3)} = \dfrac{\varepsilon}{m_0 m_2 P \varDelta^2}\,\delta_2 \left[m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1, \right. \\[2ex] l_{22}^{(3)} = -\dfrac{\varepsilon}{m_0 m_2 P \varDelta^2}\,\delta_1 \left[m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2)\,\delta_1\right]. \end{cases}$$

10. Zusammenfassung der Endergebnisse. Abschließende Bemerkungen. Unser Endergebniss kann folgendermaßen zusammengefaßt werden: Wir betrachten irgendeine bestimmte relative Bewegung der Massen m_1 und m_2 inbezug auf die Masse m_0, die dann durch das Differentialgleichungssystem (2) geregelt wird. Wir wählen das Koordinatensystem derart, daß zur Fundamentalebene der relativen Bewegung die durch die Gleichung

$$x + y + z = 0$$

erklärte Ebene wird. Dieser Wahl des Koordinatensystems zufolge sind alle drei Flächenkonstanten einander gleich, und wir haben ihren gemeinsamen Wert mit $a/\sqrt{3}$ bezeichnet.

Wir setzen weiter voraus, daß in dem in Betracht kommenden Zeitintervall die ganze Bewegung regulär vor sich geht, d. h. die Größen r_1, r_2, r_{12} endlich und von Null verschieden bleiben, daß weiter die drei Massen in keinem Augenblick auf einer Geraden oder in der Fundamentalebene der relativen Bewegung gleichzeitig liegen.

Unter diesen Umständen gelten für die Geschwindigkeitskomponenten x_k', y_k', z_k' der Massen m_k $(k=1,2)$ die Formeln (68), (69), (70), (106), (110), (111) und (112). Diese Formeln stellen eine Zerlegung jeder der Geschwindigkeiten in drei Vektoren dar. Sind die oben angegebenen Bedingungen erfüllt, so liegen diese Vektoren nicht gleichzeitig in einer Ebene.

Aus (68) und (69) ist nämlich ersichtlich, daß die Geschwindigkeit (x_k', y_k', z_k') als Summe von Vektoren darstellbar ist, die als Richtungskoeffizienten entsprechend die Größen

$$\begin{array}{ccc} y_1 z_2 - z_1 y_2, & z_1 x_2 - x_1 z_2, & x_1 y_2 - y_1 x_2, \\ x_1, & y_1, & z_1, \\ x_2, & y_2, & z_2, \end{array}$$

haben. Demnach stellen die Formeln (68) und (69) die Zerlegung der Geschwindigkeiten in den folgenden drei Richtungen dar:

1) in der zur Fundamentalebene senkrechten Richtung,
2) in der Richtung Sonne-Planet m_1
3) „ „ „ Sonne-Planet m_2.

Die Koeffizienten dieser Zerlegung sind durch (70), (106), (110), (111) und (112) gegeben.

Eine derartige Zerlegung kann ja a priori sofort angegeben werden. Es war aber durchaus nicht vorauszusehen, daß die Koeffizienten a_{ik} sich lediglich durch die Größen

$$r_1,\ r_2,\ r_{12},\ \delta_1,\ \delta_1',\ \delta_2'$$

ausdrücken lassen, daß sie insbesondere von den Koordinaten x_k, y_k, z_k explicite nicht abhängen, und — was sehr wichtig ist — von den Radialgeschwindigkeiten

$$\frac{dr_1}{dt},\quad \frac{dr_2}{dt},\quad \frac{dr_{12}}{dt}$$

vollständig unabhängig sind. Die letztgenannte Tatsache ist, wie wir später nachweisen werden, von außerordentlicher Bedeutung; sie wird uns die Reduktion der Differentialgleichungen (2) auf die sechste Ordnung in wenigen Zeilen ermöglichen.

Zum Schluß erscheint es uns nützlich, die Formeln für die x_k', y_k', z_k' einmal in ihrem vollen Umfange anzugeben. Sie lauten:

$$(113)\quad \left\{\begin{aligned} x_1' &= \frac{a}{4 m_0 m_1 F^2}[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2](y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ &\quad + \left\{ -\frac{a A Q_1}{4 m_0 m_1 F^2 \varDelta^2\sqrt{3}}[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2] \right. \\ &\quad + \frac{\delta_1'}{P\varDelta^2}\Big(m_1(m_0+m_2)\delta_1\varDelta^2 - m_2 Q_1\delta_2[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\Big) \\ &\quad \left. + \frac{m_2 S_2 \delta_1 \delta_2 \delta_2'}{2P\varDelta^2} - \frac{\varepsilon\delta_2\sqrt{R}}{m_0 m_1 P\varDelta^2}[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\right\} x_1 \\ &\quad + \left\{ -\frac{a A Q_2}{4 m_0 m_1 F^2 \varDelta^2\sqrt{3}}[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2] \right. \\ &\quad - \frac{m_2\delta_1'}{P\varDelta^2}\Big(m_1\delta_1\varDelta^2 + Q_2\delta_2[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\Big) \\ &\quad \left. - \frac{m_2 S_1 \delta_1^2 \delta_2'}{2P\varDelta^2} + \frac{\varepsilon\delta_1\sqrt{R}}{m_0 m_1 P\varDelta^2}[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2]\right\} x_2, \\ x_2' &= -\frac{a A}{4 m_0 m_2 F^2}[m_1\delta_1-(m_0+m_1)\delta_2](y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ &\quad + \left\{ \frac{a A Q_1}{4 m_0 m_2 F^2 \varDelta^2\sqrt{3}}[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_2] - \frac{m_1 S_2 \delta_2^2 \delta_1'}{2P\varDelta^2} \right. \\ &\quad - \frac{m_1\delta_2'}{P\varDelta^2}\Big(m_2\delta_2\varDelta^2 + Q_1\delta_1[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1]\Big) \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon\delta_2\sqrt{R}}{m_0 m_2 P\varDelta^2}[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1]\right\} x_1 \end{aligned}\right.$$

$$
(113) \left\{ \begin{aligned}
&+\left\{\frac{a A Q_2}{4 m_0 m_2 F^2 \Delta^2 \sqrt{3}} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] + \frac{m_1 S_2 \delta_1 \delta_2 S_1'}{2 P \Delta^2} \right. \\
&+ \frac{\delta_2'}{P \Delta^2} \Big(m_2 (m_0 + m_1) \delta_2 \Delta^2 - m_1 Q_2 \delta_1 [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \Big) \\
&\left. \qquad - \frac{\varepsilon \delta_1 \sqrt{R}}{m_0 m_2 P \Delta^2} [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \right\} x_2 .
\end{aligned} \right.
$$

Die Formeln für y_k' und z_k' ergeben sich durch zyklische Vertauschung der Buchstaben.

Bezüglich Realitätsfragen und Vorzeichendiskussionen sei auf eine spätere Mitteilung verwiesen.

(Reçu par la Rédaction le 18. 6. 1938).