Sur les multiplicateurs des séries de Fourier

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

1. On dit qu'une suite numérique $\{\lambda_\nu\}$ est un *multiplicateur* des classes L^r et L^s, en symboles $\{\lambda_\nu\} \in (L^r, L^s)$, lorsque pour toute fonction $f \in L^r$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = \sum_1^\infty A_\nu(x), \tag{1.1}$$

la série

$$g(x) = \sum_1^\infty \lambda_\nu A_\nu(x) \tag{1.2}$$

représente une fonction de classe L^s. Une définition analogue subsiste aussi pour les séries doubles. A savoir, on dit qu'une suite numérique $\{\lambda_{\mu,\nu}\}$ est un multiplicateur des classes L^r et L^s, ou bien $\{\lambda_{\mu,\nu}\} \in (L^r, L^s)$, lorsque pour toute fonction $f \in L^r$,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{m,n=1}^\infty \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y), \\ A_{m+1,n+1}(x, y) &= a_{m,n} \cos mx \cos ny + b_{m,n} \cos mx \sin ny \\ &\quad + c_{m,n} \sin mx \cos ny + d_{m,n} \sin mx \sin ny, \end{aligned} \tag{1.3}$$

la série

$$g(x, y) = \sum_{m,n=1}^\infty \lambda_{m,n} A_{m,n}(x, y) \tag{1.4}$$

représente une fonction de la classe L^s. Cette définition peut être encore généralisée aux séries de plusieurs variables. Le théorème central du présent travail est le

Théorème 2. *Les inégalites*

$$\begin{aligned} K_{\alpha,\beta} &= \sum_{\mu=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}-2} \sum_{\nu=2^\beta}^{2^{\beta+1}-2} |\lambda_{\mu,\nu} - \lambda_{\mu+1,\nu} - \lambda_{\mu,\nu+1} + \lambda_{\mu+1,\nu+1}| \\ &+ \sum_{\mu=2^\alpha}^{2^{\alpha+1}-2} |\lambda_{\mu,2^{\beta+1}} - \lambda_{\mu+1,2^{\beta+1}}| + \sum_{\nu=2^\beta}^{2^{\beta+1}-2} |\lambda_{2^\alpha,\nu} - \lambda_{2^\alpha,\nu+1}| + |\lambda_{2^{\alpha+1}-1,\,2^{\beta+1}-1}| \leqslant M, \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots$ et M est indépendant de α et β, entraînent

$$\{\lambda_{\nu,\mu}\} \in \{L^r, L^r\} \qquad (r > 1). \tag{1.6}$$

Pour rendre la démonstration plus claire je démontre d'abord le théorème analogue pour les séries d'une variable. En appliquant le théorème 2 à certaines séries particulières j'obtiens le théorème 3.

Enfin je donne quelques généralisations de ces théorèmes.

2. Théorème 1. *Les inégalités*

$$|\lambda_\nu| \leqslant M \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.1}$$

$$\sum_{2^\alpha}^{2^{\alpha+1}} |\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}| \leqslant M \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

entraînent

$$\{\lambda_\nu\} \in \{L^r, L^r\}. \tag{2.3}$$

La démonstration de ce théorème est basée sur certains résultats dûs à J. Littlewood, R. Paley et A. Zygmund.

Lemme 1. Soit

$$f(x) = \sum_0^\infty A_\nu(x), \quad \Delta_\nu(f, x) = \Delta_\nu(x) = \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} A_\mu(x). \tag{2.4}$$

On a

$$A_r \int_0^{2\pi} \left(\sum \Delta_\nu^2(x)\right)^{r/2} dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f|^r dx \leqslant B_r \int_0^{2\pi} \left(\sum \Delta_\nu^2(x)\right)^{r/2} dx \quad (r>1), \tag{2.5}$$

où A_r et B_r [1]) désignent des constantes positives [2]).

---

[1]) Les lettres A_r, B_r, C_r, désignent des constantes différentes dans les différents contextes.

[2]) Paley et Littlewood [2].

Lemme 2[3]. Soient $\{f_\nu\}$ une suite des fonctions définies dans l'intervalle $(0,2\pi)$ et $n=n(\nu)$ une suite arbitraire des nombres entiers positifs. En désignant par $S_{\alpha,\beta}$ la somme partielle d'ordre β de la fonction f_α, on a pour tout $r>1$

$$\int_0^{2\pi}\Big(\sum S^2_{\nu,n}\Big)^{r/2}dx \leqslant A_r \int_0^{2\pi}\Big(\sum f_\nu^2\Big)^{r/2}. \tag{2.6}$$

Posons

$$\Delta_\nu(\lambda,x)=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}\lambda_\mu A_\mu(x). \tag{2.7}$$

Pour démontrer le théorème 1 il suffit d'après (2.4) et (2.5) d'établir l'inégalité

$$\int_0^{2\pi}\Big(\sum \Delta_\nu^2(\lambda,x)\Big)^{r/2}dx\leqslant A_r\int_0^{2\pi}\Big(\sum\Delta_\nu^2(x)\Big)^{r/2}dx \tag{2.8}$$

avec A_r indépendant de la fonction considérée f. Or, on a en appliquant la transformation d'Abel,

$$\Delta_\nu(\lambda,x)=\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} r_{\nu,\mu}(x)(\lambda_\mu-\lambda_{\mu+1})+\Delta_\nu(x)\lambda_{2^\nu-1}, \tag{2.9}$$

où

$$r_{\nu,\mu}=\sum_{2^\nu}^{\mu}A_i(x). \tag{2.10}$$

L'inégalité de Schwarz donne en vertu de (2.9), (2.1) et (2.2)

$$\Delta_\nu^2(\lambda,x)\leqslant(2M)\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2}|\lambda_\mu-\lambda_{\mu+1}|\,r^2_{\nu,\mu}+|\lambda_{2^\nu-1}|\,\Delta_\nu^2(x), \tag{2.11}$$

ce qui donne d'après (2.6)

$$\int_0^{2\pi}\Big(\sum\Delta_\nu^2(\lambda,x)\Big)^{r/2}dx\leqslant(2M)^{r/2}\int_0^{2\pi}\Big\{\sum_\nu\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2}\big[|\lambda_\mu-\lambda_{\mu+1}|\,r^2_{\nu,\mu}$$
$$+|\lambda_{2^\nu-1}|\,\Delta_\nu^2(x)\big]\Big\}^{r/2}dx$$

[3]) Zygmund [5] et [6].

$$\leqslant(2M)^{r/2}A_r\int_0^{2\pi}\Big\{\sum_\nu\sum_{\mu=2^\nu}^{2^{\nu+1}-2}\big[|\lambda_\mu-\lambda_{\mu+1}|\,\Delta_\nu^2+|\lambda_{2^\nu-1}|\,\Delta_\nu^2\big]\Big\}^{r/2}dx$$
$$\leqslant(2M)^rA_r\int_0^{2\pi}\Big(\sum\Delta_\nu^2(x)\Big)^{r/2}.$$

L'inégalité (2.8) est donc entièrement établie, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

3. La démonstration du théorème 2 est tout à fait analogue à celle du théorème 1. Il faut d'abord généraliser les lemmes 1 et 2 aux séries à deux variables. On voit d'abord que le lemme 2 s'étend aux séries doubles d'une façon immédiate, de sorte que l'on a le

Lemme 3. Soient $\{f_\nu(x,y)\}$ une suite des fonctions définies dans les réctangles $\{(0,0),\,(2\pi,2\pi)\}$ et $m=m(\nu)$, $n=n(\nu)$ deux suites de nombres entiers positifs. Désignons par $S_{\nu,\alpha,\beta}$ la somme partielle d'ordre α,β de la série de Fourier de la fonction f_ν. On a, pour tout $r>1$,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum S^2_{\nu,m,n}\Big)^{r/2}dx\,dy\leqslant A_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum f_\nu^2\Big)^{r/2}dx\,dy. \tag{3.1}$$

Pour presque tout x la fonction $f(x,y)$, considérée comme fonction de la variable y, est une fonction de la classe L^r. Posons

$$f_\nu(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{\nu,i}(x)\cos iy+b_{\nu,i}(x)\sin iy),$$

$$S_{\nu,x,q}(y)=\sum_{i=0}^{q}(a_{\nu,i}(x)\cos iy+b_{\nu,i}(x)\sin iy).$$

On a d'après (2.6)

$$\int_0^{2\pi}\Big(\sum S^2_{\nu,x,n}(y)\Big)^{r/2}dy\leqslant A_r\int_0^{2\pi}\Big\{\sum f_\nu^2(x,y)\Big\}^{r/2}dy. \tag{3.2}$$

En intégrant la dérnière inégalité par rapport à x, on trouve

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum S^2_{\nu,x,n}(y)\Big)^{r/2}dx\,dy\leqslant A_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum f_\nu^2\Big)^{r/2}. \tag{3.3}$$

D'autre part, la fonction $S_{\nu,x,n}(y)$, considérée comme une fonction de la variable x, est pour presque tout y une fonction de la classe L^r. On vérifie facilement[4]) que la somme partielle d'ordre α de sa série de Fourier est égale à $S_{\nu,\alpha,n}(x,y)$, ce qui donne d'après (2.6)

$$\int_0^{2\pi}(\sum S^2_{\nu,m,n}(x,y))^{r/2}dx \leqslant A_r \int_0^{2\pi}(\sum S^2_{\nu,\alpha,n}(y))^{r/2}dx.$$

Il en résulte

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\sum S^2_{\nu,m,n}(x,y)\}^{r/2}dx\,dy \leqslant A_r \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum S^2_{\nu,x,n}(y))^{r/2}dx\,dy. \tag{3.4}$$

Les inégalités (3.3) et (3.4) donnent (3.1).

L'extension du lemme 1 au cas des séries à deux variables est aussi facile, bien que les calculs deviennent plus compliqués. Le lemme 1 est équivalent au

Lemme 4[5]). Soient $\omega_\nu(\theta)$ les fonctions de Rademacher. La définition des $\Delta_\nu(x)$ étant la même que dans (2.4), on a pour tout θ $(\theta \neq \nu/2^\mu,\ \nu, \mu$ entiers)

$$A_r\int_0^{2\pi}|f(x)|^r dx \leqslant \int_0^{2\pi}|\sum \omega_\nu(\theta)\Delta_\nu(x)|^r dx \leqslant B_r\int_0^{2\pi}|f(x)|^r dx. \tag{3.5}$$

Posons

$$\varrho(n) = p+1 \text{ si } 2^p \leqslant n < 2^{p+1}.$$

L'inégalité (3.5) peut être écrite sous la forme

$$A_r\int_0^{2\pi}|f|^r dx \leqslant \int_0^{2\pi}|\sum \omega_{\varrho(\nu)}(\theta)A_\nu(x)|^r dx \leqslant B_r\int_0^{2\pi}|f|^r dx. \tag{3.6}$$

Il en résulte pour toute fonction $f(x,y)$ et presque tout point x

$$A_r\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dy \leqslant \int_0^{2\pi}|\sum \omega_{\varrho(m)}A_{m,n}(x,y)|^r dy \leqslant B_r\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dy.$$

4) Grâce à un théorème classique de M. Riesz, d'après lequel les sommes partielles d'une série de Fourier d'une fonction $f \in L^r\ (r>1)$ convergent fortement vers f. Riesz [4].

5) Littlewood et Paley [2].

En intégrant cette inégalité par rapport à x, on trouve

$$\begin{aligned} A_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy &\leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sum \omega_{\varrho(m)}(\theta)A_{m,n}(x,y)|^r dx\,dy \\ &\leqslant B_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En itérant l'inégalité (3.7) on obtient

$$\begin{aligned} A_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy &\leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sum \omega_{\varrho(m)}(\theta)\,\omega_{\varrho(n)}(\theta')\,A_{m,n}(x,y)|^r dx\,dy \\ &\leqslant B_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Le résultat démontré peut être formulé dans le

Lemme 5. Soit

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{m,n=1}^{\infty}A_{m,n}(x,y), \\ \Delta_{\mu,\nu} &= \sum_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-1}\ \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}A_{m,n}(x,y). \end{aligned} \tag{3.9}$$

On a $(\theta, \theta' \neq \nu/2^\mu,\ \nu$ et μ entiers arbitraires)

$$\begin{aligned} A_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy &\leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sum \omega_\mu(\theta)\,\omega_\nu(\theta')\,\Delta_{\mu,\nu}(x,y)|^r dx\,dy \\ &\leqslant B_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} A_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy &\leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum \Delta^2_{\mu,\nu}(x,y))^{r/2} dx\,dy \\ &\leqslant B_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^r dx\,dy. \end{aligned} \tag{3.11}$$

L'inégalité (3.10) est identique avec (3.8), et (3.11) est une conséquence immédiate de (3.10) et du

Lemme 6[6]). On a pour toute suite $\{a_{m,n}\}$ et tout $r>0$

$$A_r\left(\sum a_{m,n}^2\right)^{r/2} \leqslant \int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{m,n}\,\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^r d\theta\, d\theta' \leqslant B_r\left(\sum a_{m,n}^2\right)^{r/2}. \tag{3.12}$$

Ce lemme est connu. C'est une généralisation de l'inégalité de Khintchine:

$$A_r\left(\sum a_m^2\right)^{r/2} \leqslant \int_0^1 \left|\sum a_m\,\omega_m(\theta)\right|^r d\theta \leqslant B_r\left(\sum a_m^2\right)^{r/2}. \tag{3.13}$$

Pour la commodité du lecteur je vais réproduire la démonstration de l'inégalité (3.12). Soit s entier positif. On a

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{m,n}\,\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^{2s} d\theta\, d\theta'$$
$$= \sum \frac{(2s)!}{(2\alpha_1)!\,(2\alpha_2)!\dots(2\alpha_{2s})!}\, a_{m_1,n_1}^{2\alpha_1}\, a_{m_2,n_2}^{2\alpha_2}\dots a_{m_{2s},n_{2s}}^{2\alpha_{2s}},$$

ce qui donne

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{m,n}\,\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^{2s} d\theta\, d\theta' \leqslant \frac{(2s)!}{s!\;2^s}\left(\sum a_{m,n}^2\right)^s. \tag{3.14}$$

Soit maintenant $s-2\leqslant r<s$. L'inégalité de Hölder donne d'après (3.14)

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{m,n}\,\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^{r} d\theta\, d\theta' \leqslant A_r\left(\sum a_{m,n}^2\right)^{r/2}. \tag{3.15}$$

Les inégalités (3.14) et (3.15) démontrent la seconde partie de l'inégalité (3.12), lorsque $r>2$. La première partie de cette inégalité pour $r>2$, de même que la seconde partie pour $r<2$, étant banales, il reste à démontrer la première partie pour $r<2$. Remarquons d'abord que l'on d'après (3.14)

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum a_{m,n}\,\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|^{4} d\theta\, d\theta' \leqslant 3\left(\sum a_{m,n}^2\right)^2. \tag{3.16}$$

[6]) Paley [3].

Soient $s^2=\sum a_{m,n}^2$, $S=\left|\sum a_{m,n}\,\omega_m(\theta)\,\omega_n(\theta')\right|$ et A l'ensemble des points (θ,θ') tels que $|S(\theta,\theta')|>s/2$. On a d'une façon évidente

$$s^2=\int_0^1\int_0^1 S^2 d\theta\, d\theta' = \iint_A + \iint_{CA} \leqslant \frac{1}{4}\, s\,|CA| + \sqrt{|A|}\,\left\{\int_0^1\int_0^1 S^4 d\theta\, d\theta'\right\}^{1/2}.$$

Il s'ensuit, d'après (3.16), $1\leqslant 1/4+2\sqrt{|A|}$, ou bien $|A|>1/7$. On en tire

$$\int_0^1\int_0^1 |S|^r d\theta\, d\theta' \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^r \frac{1}{7}\, s^r \geqslant \frac{1}{28}\, s^r,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

4. Supposons les $\Delta_{\mu,\nu}(f)$ définis par les formules (3.9). Posons

$$g=\sum \lambda_{\mu,\nu}\,A_{\mu,\nu}(x,y) \tag{4.1}$$

$$\Delta_{\mu,\nu}(\lambda,x,y)=\Delta_{\mu,\nu}(g,x,y),\quad r_{\mu,\nu,p,q}=\sum_{2^\mu}^{p}\sum_{2^\nu}^{q} A_{i,j}(x,y). \tag{4.2}$$

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de prouver l'inégalité

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum \Delta_{\mu,\nu}^2(\lambda,x,y)\right)^{r/2} dx\,dy \leqslant A_r\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum \Delta_{\mu,\nu}^2(x,y)\right)^{r/2} dx\,dy. \tag{4.3}$$

En tenant compte de (4.1) et (4.2) on trouve

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu,\nu}(\lambda,x,y) &= \sum_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-2}\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} r_{i,j}\left[\lambda_{i,j}-\lambda_{i,j+1}-\lambda_{i+1,j}+\lambda_{i+1,j+1}\right]\\ &+\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-2} r_{2^{\mu+1}-1,j}\left(\lambda_{2^{\mu+1}-1,j}-\lambda_{2^{\mu+1}-1,j+1}\right)\\ &+\sum_{2^\mu}^{2^{\mu+1}-2} r_{i,2^{\nu+1}-1}\left(\lambda_{i,2^{\nu+1}-1}-\lambda_{i+1,2^{\nu+1}-1}\right)+\Delta_{\mu,\nu}\,\lambda_{2^{\mu+1}-1,\,2^{\nu+1}-1}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Il en vient, d'après l'inégalité de Schwarz et les formules (4.1) et (4.2),

$$(4.5)\quad \Delta^2_{\mu,\nu}(\lambda, x, y) \leqslant M\{\sum\sum r^2_{i,j}|\lambda_{i,j}-\lambda_{i,j+1}-\lambda_{i+1,j}+\lambda_{i+1,j+1}| + \sum r^2_{2^\mu+1-1,j}|\lambda_{2^\mu+1-1,j}-\lambda_{2^\mu+2-1,j+1}|+\ldots\},$$

où les limites de sommation sont les mêmes que dans la formule (4.4).

L'inégalité (4.5), appliquée aux termes de la somme

$$S=\sum \Delta^2_{\mu,\nu}(\lambda, x, y),$$

donne d'après (3.1)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum \Delta^2_{\mu,\nu})^{r/2}\,dx\,dy \leqslant M^{r/2}_{\mu,\nu}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{\mu,\nu}\Delta^2_{\mu,\nu}(x,y))^{r/2}\,dx\,dy.$$

Le théorème 2 se trouve ainsi entièrement établi.

5. Théorème. 3.[7]) *On a les relations*

$$(5.1)\qquad \left\{\frac{m^2}{m^2+n^2}\right\}\in\{L^r, L^r\},$$

$$(5.2)\qquad \left\{\frac{n^2}{m^2+n^2}\right\}\in\{L^r, L^r\}\qquad (r\leqslant 1),$$

$$(5.3)\qquad \left\{\frac{mn}{m^2+n^2}\right\}\in\{L^r, L^r\}.$$

Il suffit évidemment de démontrer que les suites en question vérifient les inégalités (1.5).

Considérons par exemple la suite $\lambda_{m,n}=\dfrac{mn}{m^2+n^2}$; on trouve

$$(5.4)\qquad |\lambda_{m,n}-\lambda_{m+1,n}-\lambda_{m,n+1}-\lambda_{m+1,n+1}|\leqslant 7/(m^2+n^2),$$

$$(5.5)\qquad |\lambda_{m,n}-\lambda_{m+1,n}|\leqslant 1/\sqrt{m^2+n^2};\ |\lambda_{m,n}-\lambda_{m,n+1}|\leqslant 1/\sqrt{m^2+n^2}.$$

Il en vient

$$K_{\mu,\nu}(\lambda)\leqslant\sum\frac{1}{m^2+n^2}+\sum\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}+\sum\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}+\frac{mn}{m^2+n^2},$$

où les limites de sommation sont les mêmes que dans la formule (4.4). On en obtient, en supposant $\mu\leqslant\nu$,

$$K_{\mu,\nu}\leqslant 9.$$

[7]) Le problème résolu par ce théorème a été posé par M. J. Schauder. Le cas $r=2$ est banal.

La démonstration pour les suites $\left\{\dfrac{m^2}{m^2+n^2}\right\}$ et $\left\{\dfrac{n^2}{m^2+n^2}\right\}$ est tout à fait analogue.

6. Le théorème 2 peut être facilement généralisé aux séries d'un nombre quelconque des variables. Il faut d'abord généraliser les lemmes 3 et 5. La première généralisation ne présente aucune difficulté et la seconde peut être obtenue facilement par itération de l'inégalité (3.7) et par une généralisation convenable du lemme 6.

Je ne crois pas utile de reproduire les calculs ni de formuler explicitement la généralisation du théorème 2 au cas d'un nombre quelconque des variables et je ne donne que l'énoncé d'une généralisation du théorème 3:

Théorème 4.[8]) *On a pour tout* $r>1$

$$(6.1)\qquad \left\{\frac{m_i^2}{m_1^2+m_2^2+\ldots+m_s^2}\right\}\in\{L^r, L^r\}\qquad (i=1,2,\ldots,s)$$

$$(6.2)\qquad \left\{\frac{m_i m_j}{m_1^2+m_2^2+\ldots+m_s^2}\right\}\in\{L^r, L^r\}\qquad (i,j=1,2,\ldots,s)$$

7. On peut généraliser les théorèmes 1 et 2 encore d'une autre manière. Ces généralisations sont étroitement liées avec le

Théorème 5. *Soit* $\{f_n\}$ *une suite des fonctions définies dans l'intervalle* $(0,2\pi)$. *Posons* $\Delta_{n,\nu}(x)=\Delta_\nu(f_n)$. *On a*

$$(7.1)\qquad A_r\int_0^{2\pi}(\sum f_\nu^2)^{r/2}\,dx\leqslant\int_0^1(\sum_{n,\nu}\Delta^2_{n,\nu})^{r/2}\,dx\leqslant B^r\int_0^{2\pi}(\sum f_\nu^2)^{r/2}\,dx.$$

Il sera plus commode de formuler d'abord un lemme:

Lemme 7.[9]) Soit $U(f)$ une opération linéaire dont le domaine et contre-domaine est l'espace L^r. On a pour toute suite $\{f_\nu\}$

$$(7.2)\qquad \int_0^{2\pi}(\sum U^2(f_\nu))^{r/2}\,dx\leqslant A_r M^{r/2}\int_0^{2\pi}(\sum f_\nu^2)^{r/2},$$

[8]) Ce problème m'a été posé aussi par M. J. Schauder.

[9]) Ce lemme est connu; voir Zygmund [6] et Zygmund et Marcinkiewicz [1].

où M désigne la norme de l'opération U. En effet, on a d'une façon évidente

$$U\{\sum \omega_\nu(\theta) f_\nu(x)\} = \sum \omega_\nu(\theta)\, U(f_\nu).$$

Il en vient

$$\int_0^{2\pi} |\sum \omega_\nu(\theta) U(f_\nu)|^r\, dx \leq M^{r/2} \int_0^{2\pi} |\sum \omega_\nu(\theta) f_\nu(x)|^r\, dx.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à θ et en appliquant l'inégalité de Khintchine on trouve (7.2).

Pour démontrer (7.1) je pose pour toute fonction $f(x)$

$$(7.3) \qquad f(\theta, x) = \sum \omega_\nu(\theta)\, \Delta_\nu(f, x).$$

D'après le lemme 4 on conclut facilement que, pour tout $f \in L^r, f(\theta, x)$ est une opération linéaire à domaine et contre-domaine L^r. En appliquant l'inégalité (7.2) on en conclut

$$(7.4) \qquad \int_0^{2\pi} (\sum f_\nu^2(\theta, x))^{r/2}\, dx \leq A_r \int_0^{2\pi} (\sum f_\nu^2)^{r/2}\, dx,$$

ou bien, en tenant compte de l'inégalité de Khintchine,

$$(7.5) \qquad \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\sum \omega_n(\theta') f_n(\theta, x)|^r\, d\theta'\, dx \leq A_r \int_0^{2\pi} |\sum f_n^2(x)|\, dx.$$

On en tire, d'après le lemme 6, le second terme de l'inégalité (7.1). D'autre part, $f(x)$ peut être considéré comme une opération sur la fonction $f(\theta, x)$, car on a d'une façon évidente $U(U(f)) = f$. On en tire d'après (7.2)

$$\int_0^{2\pi} (\sum f_\nu^2)^{r/2}\, dx \leq A_r \int_0^{2\pi} (\sum f_\nu^2(\theta, x))^{r/2}\, dx,$$

ou bien, d'après l'inégalité de Khintchine,

$$\int_0^{2\pi} (\sum f_\nu^2)^{r/2}\, dx \leq A_r \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\sum \omega_\nu(\theta') f_\nu(\theta, x)|^r\, dx\, d\theta'.$$

En intégrant la dernière inégalité par rapport à θ et θ' on trouve, d'après (2.12), la première partie de l'inégalité (7.1).

Nous avons formulé et démontré le théorème 5 pour les fonctions f réelles, mais ce théorème subsiste aussi pour les fonctions complexes de sorte que l'on le

Théorème 6. *Soit*

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{n,\nu} e^{i\nu x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{(n)}(x);$$

$$\Delta_{n,\nu} = \sum_{i=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} A_i^{(n)}.$$

On a

$$(7.6) \qquad A_r \int_0^{2\pi} (\sum |f_\nu|^2)^{r/2}\, dx = \int_0^{2\pi} (\sum |\Delta_{n,\nu}|^2)^{r/2}\, dx \leq B_r \int_0^{2\pi} (\sum |f_\nu|^2)^{r/2}\, dx \quad (r<1)$$

La démonstration est la même que dans le cas des fonctions réelles, car les lemmes 1,6 et 7 [10]) sont vrais aussi pour les fonctions complexes.

Comme une conséquence immédiate de ce théorème on trouve le

Théorème 7. *Soit*

$$(7.7) \qquad f = \sum_0^\infty c_\nu e^{i\nu x} = \sum_1^\infty A_i(x); \quad \Delta_\nu(f) = \sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} A_i(x)$$

$$\Delta_\nu^{(i)} = \Delta_i [e^{-2^\nu i x} \Delta_\nu(x)].$$

On a

$$(7.8) \qquad A_r \int_0^{2\pi} |f|^r\, dx \leq \int_0^1 (\sum_{\nu,i} |\Delta_\nu^{(i)}(x)|^2)^{r/2}\, dx \leq B_r \int_0^1 |f|^r\, dx.$$

Pour le prouver, il suffit, d'après le lemme 1, de démontrer l'inégalité suivante:

$$(7.9) \qquad A_r \int_0^1 (\sum |\Delta_\nu^2|)^{r/2}\, dx \leq \int_0^1 (\sum_{\nu,i} |\Delta_\nu^{(i)}|^2)^{r/2}\, dx \leq B_r \int_0^1 (\sum |\Delta_\nu|^2)^{r/2}\, dx.$$

Or, la dernière inégalité resulte immédiatement de (7.6) lorsqu'on y pose $f_\nu = \Delta_\nu$.

[10]) Pour le lemme 1 voir Littlewood et Paley [2]. Le lemme 6 pour les coefficients complexes est une conséquence immédiate de (3.12) dans le cas où les $a_{m,n}$ sont réels.

L'inégalité (7.8) peut être écrite, d'après l'inégalité de Khintchine, sous la forme

$$(7.10)\quad A_r\int_0^{2\pi}|f|^r\,dx \leqslant \int_0^{2\pi}\int_0^{1}(|\sum \omega_{\varrho(\nu)}(\theta)\, c_\nu e^{i\nu x}|^r\,dx\,d\theta \leqslant B_r\int_0^{2\pi}|f|^r\,dx,$$

où $\varrho(\nu)$ est une fonction n'admettant que des valeurs entières, constante pour les indices appartenant à un groupe quelconque $\Delta_\nu^{(i)}$ et différente pour les différents groupes $\Delta_\nu^{(i)}$. D'après un théorème classique de M. Riesz [11]) on conclut de l'inégalité (7.10), pour toute fonction réelle définie dans l'intervalle $(0,2\pi)$,

$$(7.11)\quad A_r\int_0^{1}|f|^r\,dx \leqslant \int_0^{1}\int_0^{2\pi}|\sum \omega_{\varrho(\nu)}(\theta)\, A_\nu(x)|^r\,dx\,d\theta \leqslant B_r\int_0^{2\pi}|f|^r\,dx.$$

En appliquant l'inégalité de Khintchine on en obtient le

Théorème 8. *Soit*

$$f(x)=\sum A_\nu(x);\quad \Delta_\nu=\sum_{2^\nu}^{2^{\nu+1}-1}A_\mu(x)$$

$$\Delta_\nu^{(i)}=\sum_{2^\nu+2^i}^{2^\nu+2^{i+1}-1}A_\mu(x).$$

On a

$$(7.12)\quad A_r\int_0^{2\pi}|f(x)|^r\,dx \leqslant \int_0^{2\pi}(\sum |\Delta_\nu^{(i)}|^2)^{r/2}\,dx \leqslant B_r\int_0^{2\pi}|f(x)|^r\,dx \qquad (r>1)$$

Ce théorème donne par la méthode utilisée à la démonstration du théorème 1 le

Théorème 9. *Soit* $\{\lambda_\nu\}$ *une suite numérique vérifiant les conditions*

$$(7.13)\qquad |\lambda_\nu| \leqslant M,$$

$$(7.14)\qquad \sum_{2^\nu+2^i}^{2^\nu+2^{i+1}}|\lambda_n-\lambda_{n+1}| \leqslant M.$$

On a

$$(7.14)\qquad \{\lambda_n\}\in\{L^r, L^r\} \qquad (r>1).$$

[11]) M. Riesz [4].

Il est aussi clair que l'on peut généraliser dans cette direction le théorème 2. On pourrait aussi itérer cette généralisation en divisant les intervalles $(2^\nu+2^i,\ 2^\nu+2^{i+1}-1)$ en sous-intervalles de la forme $(2^\nu+2^i+2^j,\ 2^\nu+2^i+2^{j+1}-1)$, $(j\leqslant i\leqslant \nu)$. L'idée directrice de toutes ces généralisations est tout à fait claire et les calculs peuvent être laissés au lecteur.

Bibliographie.

J. Marcinkiewicz et A. Zygmund, [1], Quelques remarques sur les opérations linéaires. A paraître dans les Fund. Math. 32.

J. Littlewood et R. Paley, [2], Theorems on Fourier series and power series: (I) Journal Lond. Math. Soc. 6 (1931) p. 230–233; (II) Proc. Lond. Math. Soc. (2) 42 (1937) p. 52–89.

R. Paley, [3], A remarkable series of orthogonal functions (I), Proc. Lond. Math. Soc. 2 34 (1931) p. 241–264.

M. Riesz, [4], Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr. 27 (1927) p. 218–244.

A. Zygmund, [5], On a theorem of Paley, Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol. 34 part 2 (1938) p. 125–133.

A. Zygmund, [6], On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (I), Fund. Math. 30 (1938) p. 171–196.

(Reçu par la Rédaction le 28. 5. 1938).