Sur les problèmes réguliers du calcul des variations de la forme

$$I[\mathfrak{z}] = \int_{D_n} F(p_i)\, d(x^i) = \text{minimum}$$

par

P. GILLIS (Bruxelles).

Introduction. Considérons un problème du calcul des variations du type

$$I[\mathfrak{z}] = \int_{D_n} F(p_i)\, d(x^i) = \text{minimum} \tag{1}$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, n;\ p_i = \frac{\partial \mathfrak{z}(x^i)}{\partial x^i};\ d(x^i) = dx^1\, dx^2 \ldots dx^n\right),$$

où D_n représente un domaine à n dimensions de l'espace euclidien à n dimensions, dont nous désignons la frontière — multiplicité à $n-1$ dimensions — par D_{n-1}, et F une fonction définie et continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre, pour tout système de valeurs réelles des p_i. Nous supposons le problème „régulier", c'est-à-dire la forme quadratique

$$F_{p_i p_j} \xi^i \xi^j \qquad \left(F_{p_i p_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}\right) \tag{2}$$

définie positive.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, d'établir, sous certaines conditions imposées au domaine et aux données, un *théorème d'existence* pour (1). Ce théorème est l'extension, au cas

de n variables, de la proposition bien connue, démontrée par A. HAAR [1]), relative à l'intégrale double

$$\iint_D F\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right) dx\, dy .$$

Le principe de la méthode directe que nous utilisons est dû à M. T. RADÓ [1]). Avant d'aborder le théorème d'existence, nous démontrons deux lemmes. Le premier, relatif à la *semi-continuité* de l'intégrale, peut s'établir pour un problème „régulier" tout à fait général. Le second est la généralisation d'une proposition démontrée, pour le cas de deux variables indépendantes, par M. T. RADÓ [1]).

Pour abréger l'écriture nous faisons usage des expressions suivantes. Nous disons que:

une fonction est de classe C^q, lorsque ses dérivées $q^{\text{ièmes}}$ sont continues,

une fonction est de classe L^q, lorsque ses dérivées $q^{\text{ièmes}}$ vérifient une condition de Lipschitz,

une fonction est de classe $L^q_\varDelta$, lorsque ses dérivées $q^{\text{ièmes}}$ vérifient une condition de Lipschitz à constante $\varDelta$.

En particulier, une fonction de classe C^0 sera continue, une fonction de classe L^0, lipschitzienne.

1. Considérons le problème

$$I[\mathfrak{z}^\alpha] = \int_{D_n} F(x^i;\ \mathfrak{z}^\alpha;\ \mathfrak{z}^\alpha_i; \ldots;\ \mathfrak{z}^\alpha_{i_1 \ldots i_q})\, d(x) = \text{minimum}, \tag{1}$$

$$\left(i, i_1, \ldots, i_q = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m;\ \mathfrak{z}^\alpha_{i_1 \ldots i_q} = \frac{\partial^q \mathfrak{z}^\alpha(x^i)}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_q}}\right),$$

F étant une fonction, définie en tout point de D_n et pour tout système de valeurs réelles des $\mathfrak{z}^\alpha, \mathfrak{z}^\alpha_i, \ldots, \mathfrak{z}^\alpha_{i_1 \ldots i_q}$, supposée continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre. Nous disons que le problème est „régulier", lorsque la forme quadratique

[1]) (I) Mathematische Annalen 97 (1927) p. 124—158. Cf. aussi: A. Haar (II), Abh. a. d. Math. Sem. der Hamburgischen Univ. 8 (1930) p. 1—28; T. Radó, Mathematische Annalen 101 (1929) p. 620—632.

$$F_{\mathfrak{z}^\alpha \mathfrak{z}^\beta}\, \xi^\alpha \xi^\beta + F_{\mathfrak{z}^\alpha \mathfrak{z}_i^\beta}\, \xi^\alpha \xi_i^\beta + \ldots\ldots + F_{\mathfrak{z}^\alpha_{i_1 \ldots i_q} \mathfrak{z}^\beta_{j_1 \ldots j_q}}\, \xi^\alpha_{i_1 \ldots i_q}\, \xi^\beta_{j_1 \ldots j_q} \tag{2}$$

est définie positive en tout point de D_n et pour tout système de valeurs réelles des $\mathfrak{z}^\alpha, \mathfrak{z}_i^\alpha, \ldots, \mathfrak{z}^\alpha_{i_1 \ldots i_q}$.

Lemme I. *Soient m suites de fonctions*

$$u^{\alpha . l}(x^i) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ l = 1, 2, \ldots),$$

de classe L^{q-1}, définies dans D_n et telles que les $u^{\alpha . 1}, u^{\alpha . 2}, \ldots$ convergent uniformément, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$, vers une fonction $u^\alpha(x^i)$, de classe L^{q-1} et ses dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$, respectivement. La condition (2) étant remplie, nous avons

$$\liminf_{l=\infty} \int_{D_n} F(x^i;\ u^{\alpha . l};\ u_i^{\alpha . l};\ldots;\ u^{\alpha . l}_{i_1 \ldots i_q})\, d(x^i)$$
$$\geqslant \int_{D_n} F(x^i;\ u^\alpha;\ u_i^\alpha;\ldots;\ u^\alpha_{i_1 \ldots i_q})\, d(x^i).$$

La démonstration de ce théorème peut se faire comme dans le cas de deux variables indépendantes [2]); on supposera d'abord les fonctions $u^{\alpha . l}(x^i)$ et $u^\alpha(x^i)$ de classe C^q, et on considérera ensuite le cas des fonctions de classe L^{q-1}.

Remarques. 1°) Etant données les valeurs des $\mathfrak{z}^\alpha(x^i)$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$ sur D_{n-1}, et la condition (2) étant remplie, tout système de m fonctions annulant la variation première de l'intégrale fournit un minimum absolu pour (1).

2°) Sous les mêmes conditions, le problème ne peut admettre plus d'une solution.

Ces propositions se démontrent aisément en observant que si $u^\alpha(x^i)$ et $v^\alpha(x^i)$ représentent deux systèmes de fonctions prenant sur D_{n-1}, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$, respectivement les mêmes valeurs et si nous posons

$$f(\theta) = I[(1-\theta)\, u^\alpha + \theta v^\alpha] \qquad (0 < \theta < 1),$$

[2]) Cf. A. Haar, loc. cit. (I).

nous avons $\dfrac{d^2 f}{d\theta^2} > 0$ et par conséquent

$$f(\theta) > f(0) + \theta f'(0), \qquad f(\theta) < (1-\theta) f(0) + \theta f(1),$$

les différences $u^\alpha - v^\alpha$ et celles de leurs dérivées jusqu'à l'ordre q étant supposées non toutes nulles dans D_n. De la première inégalité résulte que, si le système de fonctions $\mathfrak{z}^\alpha(x^i)$ annule la variation première de l'intégrale (1) et si nous désignons par $\zeta^\alpha(x^i)$ des fonctions de classe L^{q-1}, s'annulant ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $q-1$ sur D_{n-1} et non identiquement nulles dans D_n, l'on a

$$I[\mathfrak{z}^\alpha] < I[\mathfrak{z}^\alpha + \zeta^\alpha].$$

De la seconde inégalité, on déduit immédiatement la propriété d'*unicité*.

2. Lemme II. *Soit $\mathfrak{z}(x^i)$ une fonction continue dans un domaine D_n, supposé convexe. Désignons par Γ l'image, dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x^i; \mathfrak{z})$, des valeurs prises par $\mathfrak{z}(x^i)$ sur D_{n-1}. Si la fonction satisfait aux conditions:*

α) la pente de tout hyperplan [3]) contenant au moins $n+1$ points de Γ est inférieure à une constante finie, Δ;

β) $\mathfrak{z}(x^i) - (a^i x^i + a^0)$ est monotone, au sens de M. Lebesgue, *dans D_n, pour tout choix des constantes a^i, a^0;*

γ) $D_n^{h^i}$ étant le domaine se déduisant de D_n par une translation de vecteur de composantes h^i, $\mathfrak{z}(x^i) - \mathfrak{z}(x^i - h^i)$ est monotone [4]) dans le domaine partiel commun à D_n et $D_n^{h^i}$, quelles que soient les h^i;

elle est de classe L^0_Δ.

Considérons, en effet, un point quelconque de Γ, P^0, et $n-1$ suites déterminées de points distincts de Γ,

$$P^{1.k},\ P^{2.k}, \ldots\ldots,\ P^{n-1.k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

[3]) Nous appelons pente de l'hyperplan d'équation $\mathfrak{z} = a^i x^i + a^0$, l'expression $\sqrt{(a^i)^2}$.

[4]) Une fonction $f(x^i)$ est monotone, au sens de M. Lebesgue, dans un domaine D_n, lorsque la condition suivante est remplie: si sur la frontière d'un domaine partiel quelconque de D_n, d_n, on a $A \leqslant f(x^i) \leqslant B$ (A et B étant des constantes), ces inégalités valent dans tout le domaine d_n.

tendant simultanément vers P^0; les plans p^k, passant par P^0, $P^{1.k}, \ldots, P^{n-1.k}$, tendront, lorsque $k \to \infty$, vers une position limite déterminée, p^0. Observons que P^0 est le seul point commun à p^0 et Γ. Supposons, en effet, que le plan p^0 contienne un point T dont la projection sur l'hyperplan $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ se trouve dans D_n ou sur sa frontière. Désignons par Q^0, $Q^{1.k}, \ldots, Q^{n-1.k}$, S, q^0 et q^k respectivement les projections de P^0, $P^{1.k}, \ldots, P^{n-1.k}$, T, p^0 et p^k. Soit M le milieu du segment Q^0S. S appartenant à D_n ou D_{n-1}, M sera un point intérieur à D_n, en vertu de l'hypothèse sur la convexité du domaine. Abaissons de M la perpendiculaire sur q^k; soit M^k le pied de cette perpendiculaire. Lorsque $k \to \infty$, $M^k \to M$. Donc pour k suffisamment grand, les points M^k seront intérieurs à D_n. Comme les points intérieurs à D_n de q^k convergent, pour $k \to \infty$, vers le point Q^0 et non vers un point tel que M, la propriété en résulte.

Si H désigne un hyperplan quelconque passant par p^0 et dont la pente est supérieure à Δ, P^0 est le seul point commun à H et Γ. Car, si un tel point T existe, il ne peut se trouver dans p^0. Nous pouvons considérer alors H comme la position limite des hyperplans H^k passant par $P^0, P^{1.k}, \ldots, P^{n-1.k}, T$. En vertu de α), la pente des H^k est $\leqslant \Delta$; donc la pente de H sera $\leqslant \Delta$; d'où contradiction.

Démontrons, à présent, que si (X^i) et (Y^i) sont deux points quelconques de D_n, nous avons

$$(1) \qquad |\mathfrak{z}(X^i) - \mathfrak{z}(Y^i)| \leqslant \Delta[(X^i - Y^i)^2]^{1/2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Supposons d'abord un des points, (X^i) par exemple, sur D_{n-1}. Soit H l'hyperplan passant par $p(X^i)$[5] et (Y^i), et supposons que l'inégalité (1) ne soit pas remplie; dans ces conditions, la pente de H est supérieure à Δ. Si nous faisons pivoter H autour de $p(X^i)$ de telle manière que la pente reste supérieure à Δ, d'après ce qui précède, (X^i) sera le seul point commun à Γ et aux hyperplans ainsi obtenus. Supposons, pour fixer les idées, Γ situé en-dessous de H. Nous pouvons alors procéder de telle sorte, qu'après une rotation de H autour de $p(X^i)$, conservant à ce plan une pente supérieure à Δ, le point (Y^i) soit situé au-dessus

[5]) Nous désignons par $p(X^i)$ le plan, au point (X^i), obtenu de la même manière que le plan p^0, au point P^0.

de ce plan. Par conséquent, si $\mathfrak{z} = a^i x^i + a^0$ est l'équation de H après rotation, la différence $\mathfrak{z}(x^i) - (a^i x^i + a^0)$ sera inférieure ou égale à zéro sur D_{n-1} et supérieure à zéro en (Y^i), résultat en contradiction avec l'hypothèse β).

Si (X^i) et (Y^i) sont intérieurs à D_n, nous posons $X^i - Y^i = h^i$, et nous désignons par $D_n^{h^i}$ le transformé du domaine D_n par la translation de vecteur (h^i). Puisque (Y^i) est intérieur au domaine $D_n \cdot D_n^{h^i}$, en vertu de γ), nous savons que sur la frontière de $D_n \cdot D_n^{h^i}$ existe un point (Z^i), tel que

$$(2) \qquad |\mathfrak{z}(Z^i) - \mathfrak{z}(Z^i - h^i)| \geqslant |\mathfrak{z}(Y^i) - \mathfrak{z}(Y^i - h^i)|.$$

(Z^i) étant sur la frontière de $D_n \cdot D_n^{h^i}$, un au moins des points (Z^i), $(Z^i - h^i)$ se trouve sur D_{n-1}. En vertu du premier cas considéré, nous pouvons écrire

$$(3) \qquad |\mathfrak{z}(Z^i) - \mathfrak{z}(Z^i - h^i)| \leqslant \Delta[(h^i)^2]^{1/2}.$$

De (2) et (3) résulte la propriété à démontrer.

3. Théorème. Soit l'intégrale

$$(1) \qquad I[\mathfrak{z}] = \int_{D_n} F(p_i)\, d(x^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$\mathfrak{z}(x^i)$ étant une fonction de classe L^0, F une fonction définie et continue, ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au second ordre, pour tout système de valeurs réelles des p_i. Nous faisons les hypothèses suivantes:

a) la forme quadratique

$$(2) \qquad F_{p_i p_j} \xi^i \xi^j$$

est définie positive;

b) le domaine D_n est convexe;

c) en désignant par Γ l'image, dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x^i; \mathfrak{z})$, des valeurs données, a priori, pour $\mathfrak{z}(x^i)$ sur D_{n-1}, nous supposons:

1°) qu'il existe au moins une fonction, $f(x^i)$, de classe L^0 dans D_n, passant par Γ;

2°) que la pente de tout hyperplan contenant au moins $n+1$ points de Γ est inférieure à une constante Δ.

Dans ces conditions, il existe une fonction, $\mathfrak{z}(x^i)$, de classe L^0_Δ dans D_n et prenant sur D_{n-1} les valeurs données, réalisant le minimum absolu de (1) relativement à l'ensemble des fonctions de classe L^0 dans D_n, passant par Γ.

En effet, soit N la constante de Lipschitz relative à la fonction $f(x^i)$ [6]; désignons par M un nombre supérieur ou égal à N et $\Delta+1$. Considérons l'ensemble des fonctions de classe L^0_M

$$(E) \qquad \{u(x^i)\}$$

passant par Γ. Comme leurs dérivées premières existent presque partout et sont, en valeur absolue, inférieures à M, l'ensemble des valeurs que prend l'intégrale (1) pour de telles fonctions admet une limite inférieure que nous désignerons par l. Si cette valeur l n'est pas atteinte pour une fonction de l'ensemble (E), nous pouvons en extraire une suite $u^k(x^i)$ $(k=1,2,\ldots)$, telle que

$$\lim_{k=\infty}\int_{D_n} F\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right) d(x^i) = l.$$

Nous pouvons choisir, en vertu du théorème d'Ascoli-Arzela, la suite $u^k(x^i)$ de telle manière qu'elle converge uniformément vers une fonction limite, $\mathfrak{z}(x^i)$. La fonction $\mathfrak{z}(x^i)$ appartient à l'ensemble (E), puisqu'elle est de classe L^0_M et passe par Γ. Il en résulte que

$$\int_{D_n} F(p_i)\, d(x^i) \geqslant l.$$

D'autre part, en vertu du lemme I, il vient

$$\int_{D_n} F(p_i)\, d(x^i) \leqslant l,$$

donc

$$\int_{D_n} F(p_i)\, d(x^i) = l.$$

La fonction $\mathfrak{z}(x^i)$ ainsi obtenue, fournit, par conséquent, le minimum absolu de (1) relativement à l'ensemble (E). Nous nous

[6]) C'est-à-dire, la plus petite constante telle qu'on ait $|f(P)-f(Q)| \leqslant N.\overline{PQ}$, pour tout couple de points, P et Q, appartenant à D_n, $\overline{PQ}$ désignant leur distance.

proposons de montrer qu'elle fournit aussi le minimum absolu de (1) relativement à l'ensemble des fonctions de classe L^0, passant par Γ, c'est-à-dire que

$$(3) \qquad I[\mathfrak{z}] < I[v],$$

pour toute fonction $v(x^i)$, de classe L^0, non identique à $\mathfrak{z}(x^i)$ dans D_n, et prenant sur D_{n-1} les valeurs données a priori.

La chose sera aisée lorsque nous aurons montré que la fonction $\mathfrak{z}(x^i)$, que nous venons de construire, est de classe $L^0_{M^*}$, avec $M^* < M$. En effet, posons $\Phi(\theta) = I[\mathfrak{z}+\theta(v-\mathfrak{z})]$, $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$; la fonction $\Phi(\theta)$ possède au point $\theta=0$ un minimum relatif, puisque pour θ suffisamment petit, $\mathfrak{z}+\theta(v-\mathfrak{z})$ est de classe L_M. Or, de (2) nous déduisons $\dfrac{d^2\Phi}{d\theta^2} > 0$. Il en résulte que le point $\theta=0$ est un minimum absolu pour $\Phi(\theta)$; en particulier, nous avons $\Phi(0) < \Phi(1)$, c'est-à-dire (3).

Par conséquent, pour achever la démonstration du théorème, il nous suffira de montrer que $\mathfrak{z}(x^i)$ est de classe L^0_Δ, ou, en vertu du lemme II et des hypothèses faites ci-dessus, que cette fonction vérifie les conditions β) et γ) du § 2.

β) Prouver que $\mathfrak{z}(x^i) - (a^i x^i + a^0)$ est monotone dans D_n, revient à montrer qu'un hyperplan quelconque, d'équation $\mathfrak{z} = a^i x^i + a^0$, ne peut couper la surface $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}(x^i)$ suivant un contour fermé dont la projection est dans D_n. Nous pouvons le démontrer comme suit. Supposons, en effet, qu'il existe un domaine partiel de D_n, δ_n, sur le contour duquel $\mathfrak{z}(x^i) = a^i x^i + a^0$, et à l'intérieur duquel $\mathfrak{z}(x^i) \neq a^i x^i + a^0$. Considérons la fonction

$$\varphi(x^i) = \begin{cases} \mathfrak{z}(x^i), & \text{dans } D_n - \delta_n, \\ a^i x^i + a^0, & \text{dans } \delta_n. \end{cases}$$

$\varphi(x^i)$ satisfait évidemment aux conditions définies, et est de classe L^0_M. En effet, l'inégalité

$$(4) \qquad |\varphi(P) - \varphi(Q)| \leqslant M.\overline{PQ},$$

est remplie lorsque P et Q appartiennent à $D_n - \delta_n$. Il en est de même lorsque P et Q appartiennent à la fermeture de δ_n, puisqu'alors

$$\frac{|\varphi(P)-\varphi(Q)|}{\overline{PQ}}=\frac{|\varphi(P'-\varphi(Q')|}{\overline{P'Q'}},$$

P' et Q' étant les points d'intersection (ou deux de ces points) de la droite passant par P et Q avec la frontière de δ_n. Enfin, si P appartient à $D_n-\delta_n$ et Q à δ_n, en désignant par R le point d'intersection (ou un de ces points) de la droite PQ avec la frontière de δ_n, nous pouvons écrire

$$|\varphi(P)-\varphi(R)|\leqslant M.\overline{PR},\quad |\varphi(R)-\varphi(Q)|\leqslant M.\overline{RQ},$$

d'où, par addition, (4).

Nous avons

$$F(p_i)=F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)+F_{p_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)\cdot\left(p_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)+V,$$

où V représente une quantité positive, en vertu de l'hypothèse a). Comme

$$\int_{D_n}\left(p_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)F_{p_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)d(x^i)=0,$$

il en résulte

$$\int_{D_n}F(p_i)\,d(x^i)>\int_{D_n}F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right)d(x^i),$$

d'où contradiction.

γ) Que la différence $\mathfrak{z}(x^i)-\mathfrak{z}(x^i-h^i)$ soit monotone dans la partie commune, que nous désignerons par δ_n, à D_n et $D_n^{h^i}$, ressort des remarques suivantes:

1°) Si $\mathfrak{z}(x^i)$ est une extrémale (D_n, L_M^0) [7]) et si d_n désigne un domaine partiel quelconque de D_n, $\mathfrak{z}(x^i)$ est aussi une extrémale (d_n, L_M^0). Sinon, il existerait une fonction $\mathfrak{z}^*(x^i)$, de classe L_M^0 dans d_n, coïncidant avec $\mathfrak{z}(x^i)$ sur la frontière de d_n, et telle que $I[\mathfrak{z}^*]<I[\mathfrak{z}]$, les intégrales étant rapportées au domaine d_n. Il en résulterait que la fonction de classe L_M^0

$$\varphi(x^i)=\begin{cases}\mathfrak{z}(x^i), & \text{dans } D_n-d_n,\\ \mathfrak{z}^*(x^i), & \text{dans } d_n,\end{cases}$$

[7]) C'est-à-dire présente un minimum pour l'intégrale (1) rapportée au domaine D_n, relativement à l'ensemble des fonctions de classe L_M^0.

fournirait pour l'intégrale (1) une valeur inférieure à celle prise pour $\mathfrak{z}(x^i)$, ce qui est imposible.

2°) Il est évident que, si $\mathfrak{z}(x^i)$ est une extrémale pour (1), $\mathfrak{z}(x^i)$ + constante jouit de la même propriété. De même, si $\mathfrak{z}(x^i)$ est une extrémale (D_n, L_M^0), $\mathfrak{z}(x^i-h^i)$ est une extrémale $(D_n^{h^i}, L_M^0)$.

Par conséquent, si $\mathfrak{z}(x^i)-\mathfrak{z}(x-h^i)$ n'était pas monotone dans δ_n, il existerait un domaine partiel dans δ_n, tel que le long de la frontière on ait $A\leqslant\mathfrak{z}(x^i)-\mathfrak{z}(x^i-h^i)\leqslant B$, ($A$ et B désignant des constantes), et, en un point intérieur, $\mathfrak{z}(x^i)-\mathfrak{z}(x^i-h^i)>B$, par exemple. Soit d_n l'ensemble des points de δ_n, tel que

$$(5)\qquad\begin{cases}\mathfrak{z}(x^i)-\mathfrak{z}(x^i-h^i)=B, & \text{sur la frontière de } d_n,\\ \mathfrak{z}(x^i)-\mathfrak{z}(x^i-h^i)>B, & \text{dans } d_n.\end{cases}$$

Puisque d_n appartient à D_n et $D_n^{h^i}$, nous savons, en vertu des 1°) et 2°) que $\mathfrak{z}(x^i)-B$ et $\mathfrak{z}(x^i-h^i)$ sont des extrémales (d_n, L_M^0). Étant égales sur la frontière de d_n, elles coïncident dans d_n [8]), résultat en contradiction avec la formule (5).

[8]) En vertu de l'unicité de la solution: cf. § 1, remarque 2°).

(Reçu par la Rédaction le 14. 5. 1938).