Über das allgemeine Dreikörperproblem

von

W. NIKLIBORC (Warszawa).

Erste Mitteilung.

Diskussion einer Ungleichung.

Einleitung.

In dieser Arbeit wird das allgemeinste Dreikörperproblem betrachtet, d. h. es werden über die Größe der Massen keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht. Es wird sich außerdem als vorteilhaft erweisen (was eigentlich erst in den weiteren Mitteilungen deutlicher zu Tage treten wird), die Untersuchung nicht auf das klassische Newtonsche Gravitationsgesetz zu beschränken, sondern vielmehr allgemeine, nur von den gegenseitigen Abständen der Massen abhängige Kräfte zugrundezulegen. Wir werden uns nämlich in den weiteren Teilen dieser Arbeitenreihe überzeugen, daß viele verschiedene Formeln und Rechnungen sich übersichtlicher gestalten, wenn man die Bewegungsgleichungen der materiellen Punkte in der allgemeineren, als es in der Himmelsmechanik üblich ist, Form (1), als Ausgangspunkt der Untersuchungen wählt. Andererseits, da sehr viele Sätze der Himmelsmechanik unabhängig von der Natur der wirkenden Kräfte gelten, ist est naheliegend, diejenigen besonders hervorzuheben, die nur im klassischen Newtonschen Falle richtig bleiben. Namentlich ist die Frage besonders interessant, ob der Umstand, daß der Ausdruck $1/r$ der Laplace'schen Differentialgleichung genügt, irgendwelche besondere Konsequenzen zur Folge hat.

Als erstes in unseren Untersuchungen vorkommendes Problem, wird das Problem der Reduktion des Differentialsystems (1)

auf die sechste Ordnung betrachtet. Doch wird diese Aufgabe erst in der dritten Mitteilung gelöst, wo auch Literaturangaben über diesen Gegenstand zusammengestellt werden. Wir werden dort ein reduziertes Differentialsystem sechster Ordnung aufstellen, das verhältnismäßig einfach ist, und sich für weitere Untersuchungen besonders eignet.

In dieser ersten Mitteilung, die als vorbereitende für die weiteren zu betrachten ist, wird eine Ungleichheit bewiesen, die an sich sehr interessant und von hoher Bedeutung zu sein scheint. Es ist dies die Ungleichung (83) und die mit ihr verbundene Gleichung (84), die als ein Seitenstück des im restringierten Dreikörperproblem vorkommenden Jacobischen Integrals aufzufassen ist. Die Gleichung (84) erscheint nämlich nach Sicherstellung der Ungleichung (83) als ein Analogon zu der im restringierten Problem vorkommenden Gleichung der Fläche von der relativen Nullgeschwindigkeit.

Auf Grund von (83) werden im sechsdimensionalen Raum der Koordinaten $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ der relativen Bewegung der Massen m_1 und m_2 (relativ in bezug auf m_0) gewisse Bereiche definiert, in welchen das von diesen Koordinaten gebildete Zahlensystem $(x_1 \dots z_2)$ stets verbleiben muß.

Abgesehen von dem Umstand, daß die Ungleichung (83) eine ganze Reihe der bei dem restringierten Dreikörperproblem durchgeführten Untersuchungen mindestens theoretisch zu übertragen gestattet (wir sagen theoretisch, denn in der Praxis wird dies wohl mit großen Rechnungsschwierigkeiten verbunden sein, da der relative Raum sechsdimensional und der Grad der Gleichung (84) selbst in den einfachsten Fällen sehr hoch ist), führt sie zu vielen interessanten Konsequenzen. So wird z. B. im letzten Kapitel bewiesen, daß, falls es zu einem Zusammenstoß der zwei Massen kommt, dieser sich notwendig in der Laplace'schen invariablen Ebene ereignen muß. Auch der Sundmansche Satz, der besagt, daß im Falle eines gleichzeitigen Zusammenstosses aller drei Massen alle drei Flächenkonstanten verschwinden müssen, erweist sich als eine unmittelbare Folgerung aus der Ungleichung (83). Freilich stimmen unsere Voraussetzungen mit den Sundmanschen nicht vollkommen überein.

Eine ausführliche Diskussion der Hyperfläche (84) soll einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben.

Sowohl in dieser, als in den weiteren Mitteilungen, wird man mit vielen ziemlich umständlichen aber ganz elementaren algebraischen Rechnungen zu tun haben. Daß es uns gelungen ist diese zu erledigen, verdanken wir vor allem einer besonders geeigneten Wahl des *Koordinatensystems*. In den uns bekannten Untersuchungen, die auf die sg. Laplace'sche invariable Ebene Bezug nehmen, wird das Koordinatensystem fast immer so gewählt, dass die xy-Ebene zur invariablen Ebene wird. Betrachtet man diese Wahl näher, so sieht man sofort die ernsten Nachteile derselben, die in der unsymmetrischen Rolle der z-Koordinaten der Massen ihre Quelle haben. Dies führt zu sehr unsymmetrischen und unübersichtlichen Rechnungen und so ist es vielleicht zu erklären, daß man aus der Reduktion des Dreikörperproblems auf ein Differentialsystem sechster Ordnung bisher sehr wenig Nutzen (von der berühmten Lagrange'schen Arbeit abgesehen) gezogen hat. Diese Erwägung hat uns dazu geführt, das Koordinatensystem so zu wählen, daß zur invariablen Ebene die durch die Gleichung

$$x+y+z=0$$

erklärte Ebene wird. Diese Wahl, die offenbar auf ∞^1 Arten für jede Bewegung getroffen werden kann, führt zu ganz besonders symmetrischen Rechnungen und Formeln.

Als ein zweiter Hauptpunkt der Arbeit kann die Einführung der *fundamentalen Ebene* der relativen Bewegung betrachtet werden. Untersucht man nämlich, wie es in der Himmelsmechanik üblich ist, die relative Bewegung der Massen m_1 und m_2 inbezug auf ein Koordinatensystem, welches den Ursprung in m_0 hat, und dessen Achsen zu den alten (absoluten) parallel sind, so erscheint es als plausibel diejenige Ebene einzuführen, die den Punkt m_0 enthält und stets zu der Laplace'schen invariablen Ebene parallel bleibt. Dies ist nun die Ebene, die wir weiter als fundamentale Ebene der relativen Bewegung bezeichnen, und die in unseren Untersuchungen die wichtigste Rolle spielen wird. Wie wir sehen werden, und zwar schon in dieser ersten Mitteilung, erweist sich die Einführung der Distanzen δ_1 und δ_2 der Massen m_1 und m_2 von der Fundamentalebene als besonders natürlich und vorteilhaft.

Und nun einige Worte über die angewandte Methode. Legt man die Differentialgleichungen (9) der relativen Bewegung zugrunde, so besitzen diese bekanntlich noch 4 elementare Integrale und zwar 3 Flächenintegrale und ein Energieintegral. Nun betrachten wir diese vier Gleichungen als ein algebraisches simultanes System mit den Unbekannten

$$x_1', \ldots . z_2',$$

und suchen die allgemeine Lösung desselben zu finden. Dies erfolgt natürlich auf die naheliegende Weise, daß man zunächst die allgemeine Lösung des durch die drei Flächenintegrale gebildeten linearen Systems bestimmt. Dadurch erscheinen die Geschwindigkeitskomponenten als lineare Funktionen dreier beliebiger Größen σ_1, σ_2, τ. Diese Größen sind noch durch eine Gleichung zweiten Grades verbunden, die man durch die Substitution der für die Geschwindigkeitskomponenten erhaltenen Ausdrücke in die Energiegleichung erhält. Freilich ist diese transformierte Energiegleichung zunächst sehr kompliziert, und so muß man, bevor man an die Parametrisierung derselben schreitet, vor allem diese durch geeignete Parametertransformationen zu vereinfachen versuchen. Dies wird zum großen Teile schon in dieser Mitteilung geleistet und so gelangt man zu den Formeln (78) für die Geschwindigkeitskomponenten. Dieselben erscheinen hier als Funktionen von drei Parametern σ_1, σ_2, τ, welche durch die erheblich einfachere Gleichung (74) verbunden sind. Soll nun dabei die Bewegung reell sein, so kann, wie sich leicht zeigen läßt, die a.a.O. eingeführte Grösse $C-W$ nicht negativ sein, was eben die den Zweck dieser Mitteilung bildende Ungleichung (83) ergibt.

In der zweiten Mitteilung wird die Transformation der Energiegleichung weiter verfolgt, wodurch man zu einer Darstellung der Geschwindigkeitskomponenten durch zwei willkürliche Größen gelangt. Die entsprechenden Formeln erweisen sich für viele Untersuchungen als besonders geeignet.

Diese Formeln werden uns dann in der dritten Mitteilung die Reduktion des Problems auf ein Differentialsystem sechster Ordnung, mit einem Schlage durchzuführen erlauben.

Will man nach dem was oben gesagt wurde, die von uns angewandte Methode kurz charakterisieren, so kann man sie als Parametrisierungsmethode bezeichnen. Es werden nämlich die 3 Flächenintegrale und das Energieintegral durch sechs Formeln ersetzt, in welchen die Geschwindigkeitskomponenten der Massen m_1 und m_2 durch zwei willkürliche Größen dargestellt werden.

Im Einzelnen gliedert sich diese Mitteilung folgendermaßen: Teil I enthält allgemeines über das Dreikörperproblem sowie die Einführung der Fundamentalebene. Im Teil II werden verschiedene Hilfsausdrücke eingeführt, die dann im Laufe der Arbeit öfters vorkommen. Dabei werden verschiedene für uns nützliche Identitäten zusammengestellt. Im Teil III wird das Problem der Lösung des von den drei Flächenintegralen und dem Energieintegral gebildeten simultanen algebraischen Systems in Angriff genommen und so weit fortgeführt, bis man zu der Ungleichheit (83) gelangt. Diese wird im Teil IV näher untersucht.

I. Allgemeines über das Dreikörperproblem.

1. Differentialgleichungen der absoluten Bewegung. Wir bezeichnen mit t die Zeit und betrachten drei vollkommen beliebige Massen m_0, m_1 und m_2. Den Massenmittelpunkt derselben wählen wir zum Koordinatenursprung eines rechtwinkligen Achsenkreuzes. Es werden mit M die Gesammtmasse des Systems

$$M = m_0 + m_1 + m_2\,,$$

mit (ξ_k, η_k, ζ_k) die Koordinaten der Masse m_k, mit r_{ik} der Abstand der Massen m_i und m_k

$$r_{ik} = \sqrt{(\xi_i - \xi_k)^2 + (\eta_i - \eta_k)^2 + (\zeta_i - \zeta_k)^2}\,,$$

bezeichnet. Es sei endlich $\varphi(u)$ eine beliebige für $u > 0$ erklärte und stetige Funktion.

Wir legen unseren Betrachtungen folgende Differentialgleichungen (die als Differentialgleichungen des absoluten Dreikörperproblems zu bezeichnen sind) zugrunde:

$$(1)\qquad \begin{cases} m_0 \dfrac{d^2\xi_0}{dt^2} = m_0 m_1 \varphi(r_{01})(\xi_0 - \xi_1) + m_0 m_2 \varphi(r_{02})(\xi_0 - \xi_2) \\ m_1 \dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} = m_1 m_2 \varphi(r_{12})(\xi_1 - \xi_2) + m_1 m_0 \varphi(r_{10})(\xi_1 - \xi_0) \\ m_2 \dfrac{d^2\xi_2}{dt^2} = m_2 m_0 \varphi(r_{20})(\xi_2 - \xi_0) + m_2 m_1 \varphi(r_{21})(\xi_2 - \xi_1) \\ \quad - - - - - - - - - - - - . \end{cases}$$

Wir haben hier nur die drei ersten Gleichungen aufgeschrieben. Die sechs übrigen bekommt man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben ξ_k, η_k, ζ_k. Die Funktion $\varphi(u)$ bestimmt natürlich das Wirkungsgesetz. Ist insbesondere

$$(2)\qquad \varphi(u) = -\frac{f}{u^3}\,,$$

wo f die (Gauß'sche) Gravitationskonstante bedeutet, so hat man mit dem klassischen Gravitationsgesetz zu tun.

Wir setzen

$$(3)\qquad \Phi(u) = \int u\,\varphi(u)\,du\,,$$

$$(4)\qquad U = m_0 m_1 \Phi(r_{01}) + m_1 m_2 \Phi(r_{12}) + m_2 m_0 \Phi(r_{20})$$

und treffen die folgende Verabredung:

Konvergiert das Integral

$$\int_a^\infty u\,\varphi(u)\,du\,,$$

wo $a > 0$ und sonst beliebig ist, so wird unter $\Phi(u)$ diejenige durch (3) erklärte Funktion verstanden, welche im Unendlichen verschwindet. Ist dagegen dieses Integral divergent, so wird unter $\Phi(u)$ irgendwelche durch (3) erklärte, aber ein für allemal gewählte Funktion verstanden.

2. Die 10 bekannten Integrale. Invariable Ebene. Die Gleichungen (1) besitzen bekanntlich 10 elementare Integrale und zwar:

a) die 6 Schwerpunktsintegrale, die der besonderen Wahl des Koordinatensystems zufolge folgendermaßen dargestellt werden können:

$$\sum_{k=0}^{2} m_k \xi_k = \sum_{k=0}^{2} m_k \eta_k = \sum_{k=0}^{2} m_k \zeta_k = 0\,,$$

b) die drei Flächenintegrale

$$(5)\qquad \begin{gathered} \sum_{k=0}^{2} m_k (\eta_k \zeta_k' - \zeta_k \eta_k') = a\,, \quad \sum_{k=0}^{2} m_k (\zeta_k \xi_k' - \xi_k \zeta_k') = b\,, \\ \sum_{k=0}^{2} m_k (\xi_k \eta_k' - \eta_k \xi_k') = c\,, \end{gathered}$$

c) das Energieintegral

$$\sum_{k=0}^{2} m_k(\xi_k'^2 + \eta_k'^2 + \zeta_k'^2) = 2(U+h). \tag{6}$$

Dabei bedeuten a, b, c, h beliebige Konstanten. Aus (6) folgt noch

$$U + h \geqq 0. \tag{7}$$

Die Konstanten a, b, c kann man als Komponenten eines Vektors (sg. resultierendes Moment der Bewegungsgröße) auffassen. Darunter ist folgendes zu verstehen: Die Koordinatentransformation läßt die Form der Differentialgleichungen (1) invariant. Dabei transformieren sich die Flächenintegrale (5) in die analogen Integrale der transformierten Differentialgleichungen, mit gewissen neuen Konstanten a', b', c', die sich nach den Formeln für die Transformation der Komponenten eines Vektors durch a, b, c ausdrücken lassen.

Ist $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, so bezeichnet man die durch die Gleichung

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 0$$

eindeutig erklärte Ebene als die *Laplace'sche invariable Ebene* der Bewegung.

3. Differentialgleichungen der relativen Bewegung. Bekanntlich wird im Dreikörperproblem vor allem die relative Bewegung untersucht. Zu diesem Zwecke betrachten wir ein neues Koordinatensystem, dessen Ursprung sich in m_0 befindet, und welches sich mit m_0 derart bewegt, dass die neuen Achsen stets zu den ursprünglichen parallel und gleichgerichtet sind. Bezeichnet man mit (x_k, y_k, z_k) die neuen Koordinaten der Masse m_k $(k=1,2)$, und setzt noch zur Abkürzung

$$r_k = r_{0k} = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \qquad (k=1,2), \tag{8}$$

so nehmen die Differentialgleichungen der relativen Bewegung der Punkte m_1 und m_2 folgende Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= [(m_0+m_1)\varphi(r_1) + m_2\varphi(r_{12})]\,x_1 + m_2[\varphi(r_2) - \varphi(r_{12})]\,x_2, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= [(m_0+m_2)\varphi(r_2) + m_1\varphi(r_{12})]\,x_2 + m_1[\varphi(r_1) - \varphi(r_{12})]\,x_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Weitere nicht aufgeschriebene Gleichungen folgen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x_k, y_k, z_k. Die Gleichungen (9) sind in jedem Lehrbuch der Himmelsmechanik zu finden, wobei sie freilich meistenteils für den Spezialfall (2) angegeben werden [1]).

Wir werden gelegentlich die Masse m_0 als „Sonne", die Massen m_1 und m_2 als „Planeten" bezeichnen.

4. Integrale der relativen Bewegung. Die Gleichungen (9) besitzen 4 bekannte Integrale [2]) und zwar:

a) die drei Flächenintegrale

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2} m_k(y_k z_k' - z_k y_k') - \frac{1}{M}\Big[&\Big(\sum_{k=1}^{2} m_k y_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{2} m_k z_k'\Big) \\ &- \Big(\sum_{k=1}^{2} m_k z_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{2} m_k y_k'\Big)\Big] = a, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{10}$$

von denen hier nur eines aufgeschrieben wurde, und die zwei weiteren durch zyklische Vertauschung der Buchstaben x_k, y_k, z_k und a, b, c zu ermitteln sind,

b) das Energieintegral

$$\begin{aligned} m_1(m_0+m_2)(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - 2m_1m_2(x_1'x_2' + y_1'y_2' + z_1'z_2') \\ + m_2(m_0+m_1)(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2) = 2M(U+h). \end{aligned}$$

Ist $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, so stellt die Gleichung

$$ax + by + cz = 0$$

[1]) S. z. B. Tisserand, Traité de Mécanique Céleste I, p. 72, Formeln (g).

[2]) Vgl. Tisserand, l. c., p. 73, Formeln (d'). Es ist zu beachten, dass die dort eingeführten Konstanten a', b', c', h', bei unserer Wahl des Koordinatenursprungs des „absoluten" Systems, den früheren Konstanten a, b, c, h einfach gleich sind.

eine Ebene dar, der in dieser Arbeit eine prinzipielle Bedeutung zukommt. Zum Unterschiede von der Laplace'schen Ebene, werden wir sie als *fundamentale Ebene* der relativen Bewegung der Planeten m_1 und m_2 (auch kürzer Fundamentalebene) bezeichnen.

Die Gleichung dieser Ebene in absoluten Koordinaten lautet:

$$a(\xi-\xi_0)+b(\eta-\eta_0)+c(\zeta-\zeta_0)=0;$$

da sich die Grössen ξ_0, η_0, ζ_0 im allgemeinen mit der Zeit ändern, so ändert auch die Fundamentalebene ihre Lage inbezug auf das absolute Koordinatensystem, jedoch so, daß sie der Laplace'schen invariablen Ebene stets parallel bleibt.

5. Die Wahl des Koordinatensystems. Da die Konstanten a, b, c als Komponenten eines Vektors aufgefaßt werden können, so schließen wir daraus folgendes:

Sind a', b', c' drei beliebige andere der Bedingung

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$$

genügende Zahlen, so kann man das Koordinatenachsenkreuz einer derartigen Drehung unterziehen, daß in diesem neuen System unserer Bewegung eben diese vorgeschriebenen Konstanten a', b', c' als Flächenkonstanten entsprechen. Und zwar, wie leicht festzustellen ist, gibt es ∞^1 derartige Drehungen. Hieraus folgt insbesondere, daß man die drei der zu betrachtenden Bewegung entsprechenden Flächenkonstanten stets als untereinander gleich voraussetzen darf. Wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit $a/\sqrt{3}$ ($a \geqslant 0$, sonst beliebig). Dies kommt darauf hinaus, daß zur Fundamentalebene der relativen Bewegung die Ebene

$$x+y+z=0 \tag{11}$$

gewählt wird, und daß das resultierende Moment der Bewegungsgröße gleich a gesetzt wird.

Diese Wahl des Koordinatensystems wird sich später als außerordentlich vorteilhaft erweisen, indem alle drei Koordinaten in den späteren Formeln symmetrisch auftreten werden, was uns die ohnehin umfangreichen Rechnungen vielfach erleichtern wird.

Die Flächenintegrale (10) lauten jetzt:

$$\begin{aligned}&m_1\{[m_2 z_2-(m_0+m_2)z_1]y_1'-[m_2 y_2-(m_0+m_2)y_1]z_1'\}\\&+m_2\{[m_1 z_1-(m_0+m_1)z_2]y_2'-[m_1 y_1-(m_0+m_1)y_2]z_2'\}=\frac{a}{\sqrt{3}}M,\end{aligned}$$

. . . .

6. Bezeichnungen. Wir setzen zur Abkürzung

$$\left\{\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_2 x_2-(m_0+m_2)x_1], & \lambda_2&=\frac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_1 x_1-(m_0+m_1)x_2],\\ \mu_1&=\frac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_2 y_2-(m_0+m_2)y_1], & \mu_2&=\frac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_1 y_1-(m_0+m_1)y_2],\\ \nu_1&=\frac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_2 z_2-(m_0+m_2)z_1], & \nu_2&=\frac{1}{\sqrt{m_0 M}}[m_1 z_1-(m_0+m_1)z_2],\end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$u_k=\sqrt{\frac{m_0}{M}}\cdot x_k',\quad v_k=\sqrt{\frac{m_0}{M}}\cdot y_k',\quad w_k=\sqrt{\frac{m_0}{M}}\cdot z_k'\quad (k=1,2), \tag{13}$$

$$W=2m_0(U+h). \tag{14}$$

Die Flächenintegrale und das Energieintegral nehmen jetzt folgende Gestalt an:

$$\left\{\begin{aligned}m_1(\nu_1 v_1-\mu_1 w_1)+m_2(\nu_2 v_2-\mu_2 w_2)&=\frac{a}{\sqrt{3}}\\ m_1(\lambda_1 w_1-\nu_1 u_1)+m_2(\lambda_2 w_2-\nu_2 u_2)&=\frac{a}{\sqrt{3}}\\ m_1(\mu_1 u_1-\lambda_1 v_1)+m_2(\mu_2 u_2-\lambda_2 v_2)&=\frac{a}{\sqrt{3}},\end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&m_1(m_0+m_2)(u_1^2+v_1^2+w_1^2)-2m_1m_2(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2)\\&+m_2(m_0+m_1)(u_2^2+v_2^2+w_2^2)-W=0.\end{aligned} \tag{16}$$

II. Bezeichnungen. Identitäten, Hilfssätze.

7. Die Größen $\alpha, \beta, \gamma, A, F$. Wir werden zunächst eine ganze Reihe verschiedener Größen einführen, wobei auch gewisse Identitäten zwischen ihnen aufgestellt werden. Die elementaren Beweise dieser Identitäten werden fortgelassen.

Wir betrachten die Minoren der Matrix

$$(17)\qquad \begin{matrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2, \end{matrix}$$

die durch die Größen (12) gebildet ist, und setzen

$$(18)\qquad \alpha = \mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2, \qquad \beta = \nu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nu_2, \qquad \gamma = \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2 .$$

Aus (12) und (18) folgt dann

$$\alpha = y_1 z_2 - z_1 y_2, \qquad \beta = z_1 x_2 - x_1 z_2, \qquad \gamma = x_1 y_2 - y_1 x_2 .$$

Wie leicht festzustellen ist, verschwinden alle drei Größen α, β, γ zugleich dann und nur dann, wenn alle drei Punkte $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) auf einer Geraden liegen. Wir werden diesen Sonderfall stets ausschließen.

Wir setzen weiter

$$(19)\qquad A = \alpha + \beta + \gamma ;$$

es ist offenbar

$$(19,1)\qquad A = \begin{vmatrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} .$$

Betrachtet man das durch die Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $(1, 1, 1)$ und $(0, 0, 0)$ bestimmte Tetraeder, so ist dessen Volumen, bei entsprechender Verabredung über das Vorzeichen, gleich

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} A .$$

Demnach verschwindet die Größe A dann und nur dann, wenn unsere drei Massen mit dem Punkte $(1, 1, 1)$ zugleich in einer Ebene liegen, oder, was dasselbe ist, wenn alle drei Massen in einer zu der Fundamentalebene orthogonalen Ebene liegen.

Als weitere Größe führen wir den Ausdruck

$$(20)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4 F^2 \qquad (F > 0)$$

ein. Offenbar ist F dem Flächeninhalt des durch die drei Massen bestimmten Dreiecks gleich.

8. Die Größen δ_1, δ_2, Δ_1, Δ_2, P. Wir bezeichnen mit δ_1 und δ_2 die Abstände der Planeten m_1 und m_2 von der Fundamentalebene, wobei wir verabreden, daß diese Größen im Halbraume

$$x + y + z > 0$$

als positiv zu rechnen sind. Es ist demnach

$$(21)\qquad \delta_k = \frac{1}{\sqrt{3}} (x_k + y_k + z_k) \qquad (k = 1, 2).$$

Wir setzen weiter

$$(22)\qquad \Delta_k = \lambda_k + \mu_k + \nu_k \qquad (k = 1, 2).$$

Aus (12), (21) und (22) folgt unmittelbar

$$(23)\qquad \begin{cases} (m_0 + m_1) \Delta_1 + m_2 \Delta_2 = - \delta_1 \sqrt{3 m_0 M}, \\ m_1 \Delta_1 + (m_0 + m_2) \Delta_2 = - \delta_2 \sqrt{3 m_0 M}, \end{cases}$$

oder auch

$$(24)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2) \delta_1] \sqrt{\dfrac{3}{m_0 M}}, \\ \Delta_2 = [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1) \delta_2] \sqrt{\dfrac{3}{m_0 M}} \end{cases}$$

Wir führen noch die in der Folge oft zu begegnende Größe

$$(25)\qquad P = \tfrac{1}{3} [m_1 (m_0 + m_1) \Delta_1^2 + 2 m_1 m_2 \Delta_1 \Delta_2 + m_2 (m_0 + m_2) \Delta_2^2]$$

ein.

Hieraus folgt zunächst die nützliche Formel

$$P = - (m_1 \delta_1 \Delta_1 + m_2 \delta_2 \Delta_2) \sqrt{\frac{m_0 M}{3}}$$

und dann

$$(26)\qquad P = m_1 (m_0 + m_2) \delta_1^2 - 2 m_1 m_2 \delta_1 \delta_2 + m_2 (m_0 + m_1) \delta_2^2 .$$

Nach (25) und (26) ist die Größe P eine binäre quadratische Form der Variablen δ_1 und δ_2 bzw. Δ_1 und Δ_2. Augenscheinlich ist diese Form positiv-definit und verschwindet dann und nur dann, wenn beide Planeten m_1 und m_2 gleichzeitig in der Fundamentalebene liegen.

9. Die Größen E_{ik}. Wir setzen

$$(27)\qquad \begin{cases} E_{11} = \lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2 \\ E_{12} = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 \\ E_{22} = \lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 . \end{cases}$$

Aus (27), (12) und (8) folgt unmittelbar

$$(28)\qquad \begin{cases} E_{11} = \dfrac{1}{m_0 M}\,[m_0 (m_0 + m_2)\, r_1^2 - m_0 m_2 r_2^2 + m_2 (m_0 + m_2)\, r_{12}^2] \\ E_{12} = \dfrac{1}{m_0 M}\,[m_0 (\dfrac{M}{2} - m_1)\, r_1^2 + m_0 (\dfrac{M}{2} - m_2)\, r_2^2 - (\dfrac{m_0 M}{2} + m_1 m_2)\, r_{12}^2] \\ E_{22} = \dfrac{1}{m_0 M}\,[- m_0 m_1 r_1^2 + m_0 (m_0 + m_1)\, r_2^2 + m_1 (m_0 + m_1)\, r_{12}^2] . \end{cases}$$

Die Formeln (28) liefern dann

$$(29)\qquad E_{11} E_{22} - E_{12}^2 = 4 F^2 = r_1^2 r_2^2 - \frac{1}{4}\,(r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)^2,$$

wo F die durch (20) erklärte Größe bedeutet.

10. Einige Identitäten zwischen den Größen λ, μ_i, ν_i, Δ_i, A, E_{ik}, α, β, γ. Es gelten folgende Formeln:

$$(30)\qquad \begin{cases} (\nu_1 - \mu_1)\, E_{22} - (\nu_2 - \mu_2)\, E_{12} = -\Delta_2 \alpha + \lambda_2 A , \\ (\lambda_1 - \nu_1)\, E_{22} - (\lambda_2 - \nu_2)\, E_{12} = -\Delta_2 \beta + \mu_2 A , \\ (\mu_1 - \lambda_1)\, E_{22} - (\mu_2 - \lambda_2)\, E_{12} = -\Delta_2 \gamma + \nu_2 A , \end{cases}$$

$$(30\text{ bis})\qquad \begin{cases} (\nu_2 - \mu_2)\, E_{11} - (\nu_1 - \mu_1)\, E_{12} = \Delta_1 \alpha - \lambda_1 A , \\ (\lambda_2 - \nu_2)\, E_{11} - (\lambda_1 - \nu_1)\, E_{12} = \Delta_1 \beta - \mu_1 A , \\ (\mu_2 - \lambda_2)\, E_{11} - (\mu_1 - \lambda_1)\, E_{12} = \Delta_1 \gamma - \nu_1 A , \end{cases}$$

$$(31)\qquad \begin{cases} \lambda_1 (\gamma - \beta) + \mu_1 (\alpha - \gamma) + \nu_1 (\beta - \alpha) = E_{11} \Delta_2 - E_{12} \Delta_1 , \\ \lambda_2 (\gamma - \beta) + \mu_2 (\alpha - \gamma) + \nu_2 (\beta - \alpha) = E_{12} \Delta_2 - E_{22} \Delta_1 \end{cases}$$

$$(32)\qquad \begin{cases} (\lambda_2 E_{11} - \lambda_1 E_{12})(\beta - \gamma) + (\mu_2 E_{11} - \mu_1 E_{12})(\gamma - \alpha) \\ \qquad + (\nu_2 E_{11} - \nu_1 E_{12})(\alpha - \beta) = 4 F^2 . \Delta_1 , \\ (\lambda_1 E_{22} - \lambda_2 E_{12})(\gamma - \beta) + (\mu_1 E_{22} - \mu_2 E_{12})(\alpha - \gamma) \\ \qquad + (\nu_1 E_{22} - \nu_2 E_{12})(\beta - \alpha) = 4 F^2 . \Delta_2 , \end{cases}$$

$$(33)\qquad \begin{cases} \lambda_2 \Delta_1 - \lambda_1 \Delta_2 = \beta - \gamma , \\ \mu_2 \Delta_1 - \mu_1 \Delta_1 = \gamma - \alpha , \\ \nu_2 \Delta_1 - \nu_1 \Delta_2 = \alpha - \beta . \end{cases}$$

11. Die Größen S_{ik}, S_i und J. Weitere Identitäten. Als weitere Größen werden folgende Ausdrücke eingeführt:

$$(34)\qquad \begin{cases} m_1 r_1^2 - (2 m_0 + m_1)\, r_2^2 - m_1 r_{12}^2 = S_{11} , \\ (m_0 - m_1)\, r_1^2 + (m_0 + m_1)\, r_2^2 - (m_0 + m_1)\, r_{12}^2 = S_{12} , \\ (m_0 + m_2)\, r_1^2 + (m_0 - m_2)\, r_2^2 - (m_0 + m_2)\, r_{12}^2 = S_{21} , \\ -(2 m_0 + m_2)\, r_1^2 + m_2 r_2^2 - m_2 r_{12}^2 = S_{22} , \end{cases}$$

$$(35)\qquad \begin{cases} S_1 = S_{11} \delta_1 + S_{12} \delta_2 , \\ S_2 = S_{21} \delta_1 + S_{22} \delta_2 . \end{cases}$$

Es ist dann

$$(36)\qquad \begin{cases} (m_0 + m_1)\, S_{11} + m_1 S_{12} + 2 m_0 M E_{22} = 0 , \\ m_2 S_{11} + (m_0 + m_2)\, S_{12} - 2 m_0 M E_{12} = 0 , \\ m_2 S_{21} + (m_0 + m_2)\, S_{22} + 2 m_0 M E_{11} = 0 , \\ (m_0 + m_1)\, S_{21} + m_1 S_{22} - 2 m_0 M E_{12} = 0 , \end{cases}$$

und umgekehrt

$$(37)\qquad \begin{cases} m_1 E_{12} + (m_0 + m_2)\, E_{22} = -\tfrac{1}{2} S_{11} , \\ (m_0 + m_1)\, E_{12} + m_2 E_{22} = \tfrac{1}{2} S_{12} , \\ m_1 E_{11} + (m_0 + m_2)\, E_{12} = \tfrac{1}{2} S_{21} , \\ (m_0 + m_1)\, E_{11} + m_2 E_{12} = -\tfrac{1}{2} S_{22} . \end{cases}$$

Es gelten die Formeln

$$(38)\quad \begin{cases} E_{11}S_{11}^2 - E_{22}S_{21}^2 = 16F^2.\,[(m_0+m_2)^2E_{22} - m_1^2E_{11}], \\ S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = 16\,m_0MF^2, \\ E_{22}S_{22}^2 - E_{11}S_{12}^2 = 16F^2\,[(m_0+m_1)^2E_{11} - m_2^2E_{22}], \end{cases}$$

$$(39)\quad \begin{cases} E_{22}\varDelta_1 - E_{12}\varDelta_2 = \tfrac{1}{2}S_1\,.\sqrt{\dfrac{3}{m_0M}}, \\ E_{11}\varDelta_2 - E_{12}\varDelta_1 = \tfrac{1}{2}S_2\,.\sqrt{\dfrac{3}{m_0M}}. \end{cases}$$

Als besonders wichtig wird sich die Größe

$$(40)\quad J = m_0m_1r_1^2 + m_0m_2r_2^2 + m_1m_2r_{12}^2$$

erweisen. Wir werden sie als die *Lagrange — Jacobi'sche Funktion* bezeichnen. Wie man sofort sieht, ist

$$(41)\quad J = m_1(m_0+m_1)E_{11} + 2m_1m_2E_{12} + m_2(m_0+m_2)E_{22} = -\tfrac{1}{2}(m_1S_{22} + m_2S_{11}).$$

12. Die Größe $\varDelta$. Auch der Ausdruck

$$(41)_1\quad \varDelta^2 = r_2^2\delta_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 - r_{12}^2)\,\delta_1\delta_2 + r_1^2\delta_2^2 \qquad (\varDelta \geqq 0)$$

wird eine sehr wichtige Rolle spielen. Wie leicht festzustellen, ist $\varDelta^2$ im Falle $F>0$ eine positiv-definite quadratische Form der Größen δ_1 und δ_2. Liegen demnach alle drei Massen m_0, m_1, m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden, so verschwindet $\varDelta^2$ dann und nur dann, wenn die beiden Planeten sich in der Fundamentalebene befinden.

Die Größe $\varDelta^2$ steht übrigens im nahen Zusammenhange mit A^2 und F^2. Aus (19,1) folgt nämlich mit Rücksicht auf (29), (21) und (8)

$$(42)\quad A^2 = 3\,(4F^2 - \varDelta^2),$$

aus welcher Formel man die wichtige Tatsache, daß die Größe A sich durch die Größen $r_1, r_2, r_{12}, \delta_1, \delta_2$ ausdrücken läßt, ablesen kann.

Die Anwendung der Lagrange'schen Identität auf die Matrix

$$\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ 1, & 1, & 1 \end{matrix}$$

liefert in Verbindung mit (42) die wichtige Formel

$$(43)\quad (\alpha-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 = 3\varDelta^2.$$

Wir erwähnen noch folgende, für das Weitere nützliche, Identitäten:

$$(44)\quad \begin{cases} S_1^2 - 4m_0M\varDelta^2E_{22} + \tfrac{16}{3}m_0MF^2\varDelta_2^2 = 0, \\ S_1S_2 + 4m_0M\varDelta^2E_{12} - \tfrac{16}{3}m_0MF^2\varDelta_1\varDelta_2 = 0, \\ S_2^2 - 4m_0M\varDelta^2E_{11} + \tfrac{16}{3}m_0MF^2\varDelta_1^2 = 0. \end{cases}$$

13. Die Größen l, l_1, l_2. Identitäten. Wir setzen endlich

$$(45)\quad l = m_0ME_{11}E_{22} + 4m_1m_2F^2,$$

$$(46)\quad \begin{cases} l_1 = m_0ME_{12}E_{22} - 4m_1(m_0+m_1)F^2, \\ l_2 = m_0ME_{11}E_{12} - 4m_2(m_0+m_2)F^2. \end{cases}$$

Liegen die drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden, so ist offenbar

$$l > 0.$$

Man verifiziert leicht folgende Identitäten:

$$(47)\quad m_2(m_0+m_1)E_{11}S_{11}^2 - 2m_1m_2E_{12}S_{11}S_{22} + m_1(m_0+m_2)E_{22}S_{22}^2 = 4Jl$$

$$(48)\quad \begin{cases} [m_0ME_{12}E_{22} + 4m_1(m_0+m_1)F^2]\,J \\ \quad + [m_1(m_0+m_1)E_{11} - m_2(m_0+m_2)E_{22}]\,l_1 = m_1lS_{12}, \\ [m_0ME_{11}E_{12} + 4m_2(m_0+m_2)F^2]\,J \\ \quad + [m_2(m_0+m_2)E_{22} - m_1(m_0+m_1)E_{11}]\,l_2 = m_2lS_{21}. \end{cases}$$

14. Das erste Gleichungssystem. Wir setzen voraus, daß die Matrix (17) vom Range zwei ist, und betrachten das Gleichungssystem

$$
(49)\qquad \begin{cases} \lambda_1 f_1 + \mu_1 f_2 + \nu_1 f_3 = d_1 , \\ \lambda_2 f_1 + \mu_2 f_2 + \nu_2 f_3 = d_2 , \end{cases}
$$

wo f_1, f_2, f_3 Unbekannte und d_1, d_2 gegebene Größen bedeuten. Die Gleichungen (49) besitzen offenbar ∞^1 Lösungen und wir werden für die allgemeine Lösung die Formeln

$$
(50)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{4F^2} \left[(E_{22}\lambda_1 - E_{12}\lambda_2)\, d_1 + (E_{11}\lambda_2 - E_{12}\lambda_1)\, d_2 \right] + \alpha\tau , \\ f_2 = \dfrac{1}{4F^2} \left[(E_{22}\mu_1 - E_{12}\mu_2)\, d_1 + (E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)\, d_2 \right] + \beta\tau , \\ f_3 = \dfrac{1}{4F^2} \left[(E_{22}\nu_1 - E_{12}\nu_2)\, d_1 + (E_{11}\nu_2 - E_{12}\nu_1)\, d_2 \right] + \gamma\tau \end{cases}
$$

benutzen. Dabei bedeutet τ einen Parameter, der beliebige Werte annehmen kann.

Obwohl wir die Formeln (50) in keinem uns bekannten Lehrbuche finden, erheben wir bei der Einfachheit des Gegenstandes keinen Anspruch auf Priorität.

15. Das zweite Gleichungssystem. Es seien

$$
\lambda,\ \mu,\ \nu
$$
$$
A,\ B,\ C
$$

beliebige, den Bedingungen

$$
\lambda + \mu + \nu \neq 0 ,
$$
$$
A\lambda + B\mu + C\nu = 0 ,
$$

genügende Zahlen.

Die Gleichungen

$$
(51)\qquad \begin{cases} \nu v - \mu w = A , \\ \lambda w - \nu u = B , \\ \mu u - \lambda v = C , \end{cases}
$$

wo mit u, v, w die Unbekannten bezeichnet wurden, besitzen in diesem Falle ∞^1 Lösungen. Für die allgemeine Lösung von (51) werden die Formeln

$$
(52)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{C - B}{\lambda + \mu + \nu} + \sigma\lambda , \\ v = \dfrac{A - C}{\lambda + \mu + \nu} + \sigma\mu , \\ w = \dfrac{B - A}{\lambda + \mu + \nu} + \sigma\nu \end{cases}
$$

benutzt. Dabei bedeutet σ einen Parameter, der beliebige Werte annehmen kann.

Auch die Formeln (52) sind vielleicht neu.

III. Lösung des linearen Problems. Transformation der Energiegleichung.

16. Lösung des linearen Systems. Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, beruht die von uns angewandte Methode auf der Bestimmung der allgemeinen Lösung des simultanen algebraischen Systems (15) und (16), in welchem die Größen u_k, v_k, w_k als Unbekannte aufzufassen sind. Dieser Aufgabe, welche in dieser ersten Mitteilung nur teilweise gelöst wird, ist dieses Kapitel gewidmet.

Wir beginnen mit der Auflösung des linearen Systems (15). Dabei wird vorausgesetzt, daß die Matrix (17) vom Range zwei ist. Wie man leicht einsieht, ist dann die Matrix der Koeffizienten der Gleichungen (15) vom Range drei, so daß die allgemeine Lösung von drei Parametern stetig abhängen wird.

Wir setzen zunächst voraus, daß

$$
(53)\qquad \Delta_1 \Delta_2 \neq 0
$$

gilt. Wir werden uns am Ende dieses Kapitels von dieser Voraussetzung befreien.

Nun schreiben wir die Gleichungen (15) in der nachstehenden Form:

$$
(54)\qquad \begin{cases} m_1(\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) - \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = - m_2(\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) + \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = f_1 , \\ m_1(\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) - \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = - m_2(\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) + \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = f_2 , \\ m_1(\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) - \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = - m_2(\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) + \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = f_3 . \end{cases}
$$

Genügen die sechs Größen

$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ u_2,\ v_2,\ w_2$$

den Gleichungen (15), so genügen sie auch den folgenden sechs Gleichungen:

$$(55)\quad \begin{cases} m_1(\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} + f_1, & m_2(\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} - f_1, \\ m_1(\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} + f_2, & m_2(\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} - f_2, \\ m_1(\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} + f_3, & m_2(\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} - f_3, \end{cases}$$

wo f_1, f_2, f_3 entsprechende Werte besitzen.

Umgekehrt: bedeuten f_1, f_2, f_3 derartige Zahlen, daß die Gleichungen (55) widerspruchslos sind, so ist jede Lösung von (55) zugleich eine Lösung von (54), also auch von (15).

Wir können also die allgemeine Lösung von (15) auf folgende Weise bekommen:

Man bestimmt die allgemeine Lösung von (55), unter der Voraussetzung, daß die f_k beliebige Größen bedeuten, wobei natürlich dem Umstand, daß die Gleichungen (55) widerspruchslos sein sollen, Rechnung getragen werden muss.

Nun ist aber unter der Voraussetzung (53) für die Lösbarkeit von (55) notwendig und hinreichend, daß

$$(56)\quad \begin{cases} \lambda_1 f_1 + \mu_1 f_2 + \nu_1 f_3 = -\dfrac{a\Delta_1}{2\sqrt{3}}, \\ \lambda_2 f_1 + \mu_2 f_2 + \nu_2 f_3 = \dfrac{a\Delta_2}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

gilt. Ist diese Bedingung erfüllt, so bekommt man, unter Anwendung der Resultate von N° 15 und der Formeln (52), für die allgemeine Lösung von (55) die Formeln

$$(57)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{f_3 - f_2}{m_1\Delta_1} + \sigma_1\lambda_1, & u_2 = -\dfrac{f_3 - f_2}{m_2\Delta_2} + \sigma_2\lambda_2, \\ v_1 = \dfrac{f_1 - f_3}{m_1\Delta_1} + \sigma_1\mu_1, & v_2 = -\dfrac{f_1 - f_3}{m_2\Delta_2} + \sigma_2\mu_2, \\ w_1 = \dfrac{f_2 - f_1}{m_1\Delta_1} + \sigma_1\nu_1, & w_2 = -\dfrac{f_2 - f_1}{m_2\Delta_2} + \sigma_2\nu_2. \end{cases}$$

Dabei bedeuten $\sigma_1, \sigma_2, f_1, f_2, f_3$ willkürliche Parameter, von welchen die f_k durch die Gleichungen (16) gebunden sind. Nun können aber diese f_k durch einen einzigen Parameter τ ersetzt werden. Zu diesem Zwecke genügt es die Formeln (56) als Gleichungen mit den Unbekannten f_k aufzufassen und die Resultate von N° 14 und die Formeln (50) anzuwenden. Wir finden

$$(58)\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{a}{8F^2\sqrt{3}}\,[(E_{11}\lambda_2 - E_{12}\lambda_1)\Delta_2 - (E_{22}\lambda_1 - E_{12}\lambda_2)\Delta_1] + \alpha\tau, \\ f_2 = \dfrac{a}{8F^2\sqrt{3}}\,[(E_{11}\mu_2 - E_{12}\mu_1)\Delta_2 - (E_{22}\mu_1 - E_{12}\mu_2)\Delta_1] + \beta\tau, \\ f_3 = \dfrac{a}{8F^2\sqrt{3}}\,[(E_{11}\nu_2 - E_{12}\nu_1)\Delta_2 - (E_{22}\nu_1 - E_{12}\nu_2)\Delta_1] + \gamma\tau. \end{cases}$$

Aus (57), (58), (30) und (30 bis) folgen jetzt unmittelbar die gewünschten Formeln für die allgemeine Lösung der Gleichungen (15):

$$(59)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{a}{8m_1F^2\Delta_1\sqrt{3}}\,[2\Delta_1\Delta_2\alpha - (\lambda_1\Delta_2 + \lambda_2\Delta_1)A] + \dfrac{\gamma - \beta}{m_1\Delta_1}\tau + \sigma_1\lambda_1, \\ u_2 = -\dfrac{a}{8m_2F^2\Delta_2\sqrt{3}}\,[2\Delta_1\Delta_2\alpha - (\lambda_1\Delta_2 + \lambda_2\Delta_1)A] - \dfrac{\gamma - \beta}{m_2\Delta_2}\tau + \sigma_2\lambda_2. \end{cases}$$

Entsprechende Formeln für v_1, v_2, w_1, w_2 bekommt man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben λ_i, μ_i, ν_i und α, β, γ.

Setzt man noch in (59)

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{aA\Delta_2}{8m_1F^2\Delta_1\sqrt{3}} + \sigma_1', \\ \sigma_2 = -\dfrac{aA\Delta_1}{8m_2F^2\Delta_2\sqrt{3}} + \sigma_2' \\ \tau = \tau'\sqrt{m_1 m_2} \end{cases}$$

(erste Parametertransformation), und unterdrückt man nachträglich die Akzente bei σ_1', σ_2' und τ', so bekommt man für die allgemeine Lösung der Gleichungen (15) die Formeln:

$$(60)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{a}{8m_1F^2\sqrt{3}}\,(2\Delta_2\alpha - \lambda_2 A) + \dfrac{\gamma - \beta}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}\,\tau + \lambda_1\sigma_1, \\ u_2 = -\dfrac{a}{8m_2F^2\sqrt{3}}\,(2\Delta_1\alpha - \lambda_1 A) - \dfrac{\gamma - \beta}{\Delta_2}\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}\,\tau + \lambda_2\sigma_2. \end{cases}$$

17. Transformation der Energiegleichung. Setzt man die Werte (60) in die Energiegleichung (16) ein, so bekommt man eine Gleichung zweiten Grades

$$
\begin{aligned}
F(\sigma_1, \sigma_2, \tau) = C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2 + 2C_{13}\sigma_1\tau + 2C_{23}\sigma_2\tau \\
+ C_{33}\tau^2 + 2C_{14}\sigma_1 + 2C_{24}\sigma_2 + 2C_{34}\tau + C_{44} - W = 0,
\end{aligned}
\tag{61}
$$

die eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellt, daß die Formeln (60) die allgemeine Lösung des simultanen Systems (15) und (16) bilden.

Es ist

$$
\tag{62}
\left\{
\begin{aligned}
& C_{11} = m_1(m_0+m_2)E_{11}, \quad C_{12} = -m_1 m_2 E_{12}, \quad C_{22} = m_2(m_0+m_1)E_{22}, \\
& C_{13} = -\frac{3}{2}\frac{S_2\delta_2}{\Delta_1\Delta_2}\sqrt{m_1 m_2}, \quad C_{23} = -\frac{3}{2}\frac{S_1\delta_1}{\Delta_1\Delta_2}\sqrt{m_1 m_2}, \quad C_{33} = \frac{9P\Delta^2}{\Delta_1^2\Delta_2^2}, \\
& C_{14} = -\frac{aAS_{21}}{16F^2\sqrt{3}}, \quad C_{24} = \frac{aAS_{12}}{16F^2\sqrt{3}}, \\
& C_{34} = \frac{aA\sqrt{3}}{16F^2\Delta_1\Delta_2\sqrt{m_1 m_2}}(m_1\delta_1 S_2 - m_2\delta_2 S_1), \\
& C_{44} = \frac{a^2}{192\, m_1 m_2 F^4}(48F^2P + A^2J).
\end{aligned}
\right.
$$

Bei der Berechnung der Größen C_{11}, C_{12}, C_{22} benutze man die Formeln (27), bei C_{13} und C_{23} die Formeln (23), (31) und (39), bei C_{33} die Formeln (25) und (43), bei C_{14} und C_{24} die Formeln (27) und (37), bei C_{34} die Formeln (31), (23) und (39), bei C_{44} die Formeln (20), (25), (27) und (41).

18. Zweite Parametertransformation. Wir werden jetzt die Energiegleichung (61) einer zweiten linearen Parametertransformation unterziehen, die das Verschwinden der Koeffizienten C_{13}, C_{23}, C_{14}, C_{24} zur Folge haben wird. Zu diesem Zwecke wird

$$
\tag{63}
\left\{
\begin{aligned}
\sigma_1 &= a_1 + b_1\tau + \sigma_1', \\
\sigma_2 &= a_2 + b_2\tau + \sigma_2'
\end{aligned}
\right.
$$

gesetzt, wobei a_1, a_2, b_1, b_2 entsprechende, von σ_1', σ_2', τ unabhängige, Größen bedeuten, die nachträglich bestimmt werden.

Vermöge (63) transformiert sich die Gleichung (61) in eine ähnliche Gleichung

$$
\begin{aligned}
F'(\sigma_1', \sigma_2', \tau) = C_{11}'\sigma_1'^2 + 2C_{12}'\sigma_1'\sigma_2' + C_{22}'\sigma_2'^2 + 2C_{13}'\sigma_1'\tau + 2C_{23}'\sigma_2'\tau \\
+ C_{23}'\tau^2 + 2C_{14}'\sigma_1' + 2C_{24}'\sigma_2' + 2C_{34}'\tau + C_{44}' - W = 0,
\end{aligned}
\tag{64}
$$

wo die C_{ik}' durch folgende Formeln gegeben sind:

$$
\begin{aligned}
& C_{11}' = C_{11}, \qquad C_{12}' = C_{12}, \qquad C_{13}' = C_{13}, \\
& C_{13}' = C_{11}b_1 + C_{12}b_2 + C_{13}, \qquad C_{23}' = C_{12}b_1 + C_{22}b_2 + C_{23}, \\
& C_{33}' = C_{11}b_1^2 + 2C_{12}b_1b_2 + C_{22}b_2^2 + 2C_{13}b_1 + 2C_{23}b_2 + C_{33}, \\
& C_{14}' = C_{11}a_1 + C_{12}a_2 + C_{14}, \qquad C_{24}' = C_{21}a_1 + C_{22}a_2 + C_{24}, \\
& C_{34}' = C_{11}a_1b_1 + C_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + C_{22}a_2b_2 + C_{13}a_1 + C_{23}a_2 + C_{14}b_1 + C_{24}b_2 + C_{34}, \\
& C_{44}' = C_{11}a_1^2 + 2C_{12}a_1a_2 + C_{22}a_2^2 + 2C_{14}a_1 + 2C_{24}a_2 + C_{44}.
\end{aligned}
$$

Werden die Konstanten a_1, a_2, b_1, b_2 insbesondere so gewählt, daß

$$
\tag{65}
\left\{
\begin{aligned}
C_{11}a_1 + C_{12}a_2 + C_{14} &= 0, \\
C_{21}a_1 + C_{22}a_2 + C_{24} &= 0,
\end{aligned}
\right.
\qquad
\left\{
\begin{aligned}
C_{11}b_1 + C_{12}b_2 + C_{12} &= 0, \\
C_{21}b_1 + C_{22}b_2 + C_{23} &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

gilt, so ergeben sich für die C_{ik}' folgende einfachere Ausdrücke:

$$
\tag{66}
\left\{
\begin{aligned}
& C_{11}' = C_{11}, \quad C_{12}' = C_{12}, \quad C_{22}' = C_{22}, \quad C_{13}' = C_{23}' = C_{14}' = C_{24}' = 0, \\
& C_{33}' = C_{13}b_1 + C_{23}b_2 + C_{33}, \qquad C_{34}' = C_{13}a_1 + C_{23}a_2 + C_{34}, \\
& C_{44}' = C_{14}a_1 + C_{24}a_2 + C_{44}.
\end{aligned}
\right.
$$

19. Berechnung der Koeffizienten C_{ik}'. Die Determinante der beiden linearen Gleichungssysteme (65) ist gleich

$$
C_{11}C_{22} - C_{12}^2 = m_1 m_2(m_0+m_1)(m_0+m_2)E_{11}E_{22} - m_1^2 m_2^2 E_{12}^2 = m_1 m_2 l
$$

und ist demnach bei unseren Voraussetzungen gewiß von Null verschieden. Die Gleichungen (65) liefern nun in Verbindung mit den Formeln (62) folgende Werte für die Koeffizienten a_1, a_2:

$$(67)\quad \begin{cases} a_1 = -\dfrac{aA}{16\, m_1\, l F^2 \sqrt{3}}\, [m_1 E_{12} S_{12} - (m_0 + m_1) E_{22} S_{21}]\,, \\[2ex] a_2 = \dfrac{aA}{16\, m_2\, l F^2 \sqrt{3}}\, [m_2 E_{22} S_{21} - (m_0 + m_2) E_{11} S_{12}]. \end{cases}$$

Für die b_1, b_2 bekommt man zunächst die Formeln:

$$(67,1)\quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{3\, m_2}{2\, \Delta_1 \Delta_2\, l \sqrt{m_1 m_2}}\, [m_1 E_{12} S_1 \delta_1 + (m_0 + m_1) E_{22} S_2 \delta_2]\,, \\[2ex] b_2 = \dfrac{3\, m_1}{2\, \Delta_1 \Delta_2\, l \sqrt{m_1 m_2}}\, [m_2 E_{12} S_2 \delta_2 + (m_0 + m_2) E_{11} S_1 \delta_1]. \end{cases}$$

Nun ist aber auf Grund von (35), (36), (37)

$$\begin{aligned} m_1 E_{12} S_1 \delta_1 + (m_0 + m_1) E_{22} S_2 \delta_2 &: [m_1 \delta_1 - (m_0 + m_1)\delta_2] \\ &= E_{12} S_{11} \delta_1 - E_{22} S_{22} \delta_2\,, \\ m_2 E_{12} S_2 \delta_2 + (m_0 + m_2) E_{11} S_1 \delta_1 &: [m_2 \delta_2 - (m_0 + m_2)\delta_1] \\ &= E_{12} S_{22} \delta_2 - E_{11} S_{11} \delta_1\,. \end{aligned}$$

Aus (24) folgt dann unmittelbar

$$(67,2)\quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{m_2 \sqrt{3\, m_0 M}}{2\, \Delta_1\, l \sqrt{m_1 m_2}}\, (E_{12} S_{11} \delta_1 - E_{22} S_{22} \delta_2)\,, \\[2ex] b_2 = \dfrac{m_1 \sqrt{3\, m_0 M}}{2\, \Delta_2\, l \sqrt{m_1 m_2}}\, (E_{12} S_{22} \delta_2 - E_{11} S_{11} \delta_1)\,. \end{cases}$$

Um die transformierte Energiegleichung zu bestimmen, müssen wir noch die Koeffizienten C'_{33}, C'_{34}, C'_{44} berechnen.

Aus (66) folgt unter Berücksichtigung von (62) und (67,1)

$$\begin{aligned} C'_{33} = \frac{9}{4\, l\, \Delta_1^2 \Delta_2^2}\, \{&- m_1 S_1 \delta_1 [(m_0 + m_2) E_{11} S_1 \delta_1 + m_2 E_{12} S_2 \delta_2] \\ &- m_2 S_2 \delta_2 [m_1 E_{12} S_1 \delta_1 + (m_0 + m_1) E_{22} S_2 \delta_2]\} + \frac{9\, P \Delta^2}{\Delta_1^2 \Delta_2^2}\,. \end{aligned}$$

Die Formeln (38) liefern dann:

$$\begin{aligned} C'_{33} = &- \frac{9}{4\, l\, \Delta_1^2 \Delta_2^2}\, [m_1 (m_0 + m_2) E_{11} S_1^2 \delta_1^2 + 2\, m_1 m_2 E_{12} S_1 S_2 \delta_1 \delta_2 \\ &+ m_2 (m_0 + m_1) E_{22} S_2^{\,2} \delta_2^2] + \frac{9\, P \Delta^2}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \\ = &- \frac{9}{4\, l\, \Delta_1^2 \Delta_2^2}\, \{4\, m_0 M \Delta^2 [m_1 (m_0 + m_2) E_{11} E_{22} \delta_1^2 \\ &- 2\, m_1 m_2 E_{12}^2 \delta_1 \delta_2 + m_2 (m_0 + m_1) E_{11} E_{22} \delta_2^2] \\ &- \frac{16}{3}\, m_0 M F^2 [m_1 (m_0 + m_2) E_{11} \Delta_2^2 \delta_1^2 \\ &- 2\, m_1 m_2 E_{12} \Delta_1 \Delta_2 \delta_1 \delta_2 + m_2 (m_0 + m_1) E_{22} \Delta_1^2 \delta_2^2]\} + \frac{9\, P \Delta^2}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \\ = &- \frac{9\, m_0 M \Delta^2}{l\, \Delta_1^2 \Delta_2^2}\, (P E_{11} E_{22} + 8\, m_1 m_2 F^2 \delta_1 \delta_2) + \frac{9\, P \Delta^2}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \\ &+ \frac{12\, m_0 M F^2}{l\, \Delta_1^2 \Delta_2^2}\, [m_1 (m_0 + m_2) E_{11} \Delta_2^2 \delta_1^2 - 2\, m_1 m_2 E_{12} \Delta_1 \Delta_2 \delta_1 \delta_2 \\ &+ m_2 (m_0 + m_1) E_{22} \Delta_1^2 \delta_2^2]. \end{aligned}$$

Nach (45) ist weiter

$$\begin{aligned} C'_{33} = \frac{12\, F^2}{l\, \Delta_1^2 \Delta_2^2}\, \{&3\, m_1 m_2 P \Delta^2 - 6\, m_0 m_1 m_2 M \delta_1 \delta_2 \Delta^2 \\ &+ m_1 m_2 [m_1 (m_0 + m_2) E_{11} \Delta_2^2 \delta_1^2 - 2\, m_1 m_2 E_{12} \Delta_1 \Delta_2 \delta_1 \delta_2 \\ &+ m_2 (m_0 + m_1) E_{22} \Delta_1^2 \delta_2^2]\}. \end{aligned}$$

Nach (24) ist die geschweifte Klammer eine homogene Form vierten Grades inbezug auf die Größen δ_1 und δ_2. Eine längere elementare Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} C'_{33} = \frac{36\, F^2 J}{m_0 M\, l\, \Delta_1^2 \Delta_2^2}\, \{&m_1^2 (m_0 + m_2)^2 \delta_1^4 \\ &- 2\, m_1 (m_0 M + 2\, m_1 m_2)(m_0 + m_2)\, \delta_1^3 \delta_2 \\ &+ (m_0^2 M^2 + 6\, m_0 m_1 m_2 M + m_1^2 m_2^2)\, \delta_1^2 \delta_2^2 \\ &- 2\, m_2 (m_0 + m_1)(m_0 M + 2\, m_1 m_2)\, \delta_1 \delta_2^3 + m_2^2 (m_0 + m_1)^2 \delta_2^4\} \end{aligned}$$

$$= \frac{36F^2J}{m_0 M l \Delta_1^2 \Delta_2^2}[m_1\delta_1 - (m_0+m_1)\delta_2]^2[m_2\delta_2-(m_0+m_2)\delta_1]^2$$

$$= \frac{4m_0MF^2J}{l}.$$

Nach (66), (62) und (67,1) ist

$$C'_{34} = \frac{aA\sqrt{3}}{32F^2l\Delta_1\Delta_2\sqrt{m_1m_2}}\{m_2\delta_2S_2[m_1E_{12}S_{12}-(m_0+m_1)E_{22}S_{21}] - m_1\delta_1S_1[m_2E_{12}S_{21}-(m_0+m_2)E_{11}S_{12}]+2l(m_1S_2\delta_1-m_2S_1\delta_2)\},$$

oder, mit Rücksicht auf die Formeln (35)

$$\frac{32F^2l\Delta_1\Delta_2\sqrt{m_1m_2}}{aA\sqrt{3}}\cdot C'_{34} = \{-m_1S_{11}[m_2E_{12}S_{21}-(m_0+m_2)E_{11}S_{12}] + 2m_1lS_{21}\}\delta_1^2 + \{m_2S_{21}[m_1E_{12}S_{12}-(m_0+m_1)E_{22}S_{21}] - m_1S_{12}[m_2E_{12}S_{21}-(m_0+m_2)E_{11}S_{12}]+2l(m_1S_{22}-m_2S_{11})\}\delta_1\delta_2 + \{m_2S_{22}[m_1E_{12}S_{12}-(m_0+m_1)E_{22}S_{21}]-2m_2lS_{12}\}\delta_2^2 .$$

Mit Benutzung der Gleichungen (24), (29), (37) und (45) erhält man hieraus

$$C'_{34}=\frac{aAm_0M}{2l\sqrt{3m_1m_2}}[m_2(m_0+m_2)E_{22}-m_1(m_0+m_1)E_{11}].$$

Aus (66), (62) und (67) folgt

$$C'_{44}=\frac{a^2P}{4m_1m_2F^2}+\frac{a^2A^2}{768m_1m_2lF^4}[-m_1(m_0+m_2)E_{11}S_{12}^2+2m_1m_2E_{12}S_{12}S_{21}-m_2(m_0+m_1)E_{22}S_{21}^2+4Jl].$$

Die Anwendung von (47) ergibt

$$C'_{44}=\frac{a^2P}{4m_1m_2F^2}+\frac{a^2A^2}{768m_1m_2lF^4}[m_2(m_0+m_1)(E_{11}S_1^2-E_{22}S_{21}^2) - 2m_1m_2E_{12}(S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21})+m_1(m_0+m_2)(E_{22}S_{22}^2-E_{11}S_{12}^2)].$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (38)

$$C'_{44}=\frac{a^2P}{4m_1m_2F^2}+\frac{a^2A^2m_0M}{48m_1m_2lF^2}[m_1(m_0+m_1)E_{11}-2m_1m_2E_{12}+m_2(m_0+m_2)E_{22}].$$

20. Zusammenfassung der Ergebnisse nach der zweiten Parametertransformation. Indem wir die Substitution (63) auch in den Formeln (60) durchführen, gelangen wir zu einer neuen Darstellung der Lösung der Gleichungen (15) und (16). Wir stellen uns vor, daß wie diesen Schritt schon durchgeführt haben, und lassen dann die Akzente sowohl bei σ_1' und σ_2' wie auch bei C'_{ik} fort. Das Ergebnis lautet dann:

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (15) und (16) drückt sich durch die Formeln

$$(68)\quad \begin{cases} u_1=\left[\dfrac{a}{8m_1F^2\sqrt{3}}(2\Delta_2\alpha-\lambda_2A)+\lambda_1a_1\right]+\left(\dfrac{\gamma-\beta}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}+\lambda_1b_1\right)\tau+\lambda_1\sigma_1, \\ u_2=\left[-\dfrac{a}{8m_2F^2\sqrt{3}}(2\Delta_1\alpha-\lambda_1A)+\lambda_2a_2\right]+\left(-\dfrac{\gamma-\beta}{\Delta_2}\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}+\lambda_2b_2\right)\tau+\lambda_2\sigma_2 \end{cases}$$

aus. Die Parameter σ_1, σ_2, τ genügen der transformierten Energiegleichung

$$(69)\quad F(\sigma_1,\sigma_2,\tau) = C_{11}\sigma_1^2+2C_{12}\sigma_1\sigma_2+C_{22}\sigma_2^2+C_{33}\tau^2+2C_{34}\tau+C_{44}-W=0.$$

Für die Koeffizienten C_{ik} gelten die Formeln

$$(70)\quad \begin{cases} C_{11}=m_1(m_0+m_2)E_{11}, \qquad C_{12}=-m_1m_2E_{12}, \\ C_{22}=m_2(m_0+m_1)E_{22}, \qquad C_{33}=\dfrac{4m_0MF^2J}{l}, \\ C_{34}=\dfrac{aAm_0M}{2l\sqrt{3m_1m_2}}[m_2(m_0+m_2)E_{22}-m_1(m_0+m_1)E_{11}], \\ C_{44}=\dfrac{a^2P}{4m_1m_2F^2}+\dfrac{a^2A^2m_0M}{48m_1m_2F^2l}[m_1(m_0+m_1)E_{11} - 2m_1m_2E_{12}+m_2(m_0+m_2)E_{22}]. \end{cases}$$

21. Dritte Parametertransformation. Um die Energiegleichung (69) noch weiter zu vereinfachen, wollen wir den Parameter τ vermittels einer geeigneten Substitution

$$\tau = \tau_0 + \tau' \tag{71}$$

derart durch einen anderen τ' ersetzen, daß der Koeffizient von τ' in der neuen Energiegleichung verschwindet. Zu diesem Zwecke genügt es

$$\tau_0 = -\frac{C_{34}}{C_{33}} \tag{72}$$

zu setzen. Die transformierte Energiegleichung nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$F'(\sigma_1, \sigma_2, \tau')$$
$$= C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2 + C_{33}\tau'^2 + (C_{34}\tau_0 + C_{44}) - W = 0.$$

Die Größe $C_{34}\tau_0 + C_{44}$ läßt sich leicht berechnen. Aus (70) und (72) folgt nämlich

$$C_{34}\tau_0 + C_{44} = \frac{C_{33}C_{44} - C_{34}^2}{C_{33}}$$

mit

$$C_{33}C_{44} - C_{34}^2 = \frac{a^2 m_0 M P J}{m_1 m_2 l} + \frac{a^2 A^2 m_0^2 M^2}{12 m_1 m_2 l}\{[m_1(m_0+m_1)E_{11}$$
$$- 2m_1 m_2 E_{12} + m_2(m_0+m_2)E_{22}].J - [m_1(m_0+m_1)E_{11}$$
$$- m_2(m_0+m_2)E_{22}]^2\} = \frac{a^2 m_0 M}{3 m_1 m_2 l}(3PJ + m_0 m_1 m_2 M A^2).$$

Hieraus folgt ohne weiteres

$$C_{34}\tau_0 + C_{44} = \frac{a^2}{12 m_1 m_2 F^2 J}(3PJ + m_0 m_1 m_2 M A^2).$$

Nach (42) ist dann

$$C_{34}\tau_0 + C_{44} - W$$
$$= \frac{a^2}{4 m_1 m_2 F^2 J}(PJ - m_0 m_1 m_2 M \Delta^2) + \frac{1}{J}(a^2 m_0 M - WJ)$$

und wegen

$$PJ - m_0 m_1 m_2 M \Delta^2 = m_1^2 E_{11}\delta_1^2 + 2m_1 m_2 E_{12}\delta_1\delta_2 + m_2^2 E_{22}\delta_2^2$$

ergibt sich schließlich

$$C_{34}\tau_0 + C_{44} - W = \frac{1}{J}(a^2 m_0 M - WJ)$$
$$+ \frac{a^2 m_0 M}{4 m_1 m_2 F^2 J}(m_1^2 E_{11}\delta_1^2 + 2m_1 m_2 E_{12}\delta_1\delta_2 + m_2^2 E_{22}\delta_2^2).$$

22. Neue Formeln für die Geschwindigkeitskomponenten. Wir müssen jetzt die durch (71) angedeutete Parametertransformation auch in den Formeln (68) durchführen. Dadurch werden wir zu gewissen Ausdrücken für die Geschwindigkeitskomponenten gelangen, die für die zweite Abhandlung von grundlegender Bedeutung sein werden. Diesen Formeln zufolge erscheinen die Größen $u_1 \dots w_2$ als lineare Funktionen dreier Variablen, die durch eine quadratische Gleichung gebunden sind.

Indem wir diese Rechnung ausführen und nachträglich den Akzent bei τ' weglassen, bekommen wir das folgende Resultat:

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (15) und (16) ist durch die Formeln

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \left[\frac{a}{8 m_1 F^2 \sqrt{3}}(2\Delta_2\alpha - \lambda_2 A) + \lambda_1 a_1\right] \\ &\quad + \left(\frac{\gamma-\beta}{\Delta_1}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1\right)\tau_0 + \left(\frac{\gamma-\beta}{\Delta_1}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1\right)\tau + \lambda_1\sigma_1, \\ u_2 &= \left[-\frac{a}{8 m_2 F^2 \sqrt{3}}(2\Delta_1\alpha - \lambda_1 A) + \lambda_2 a_2\right] \\ &\quad + \left(-\frac{\gamma-\beta}{\Delta_2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2\right)\tau_0 + \left(-\frac{\gamma-\beta}{\Delta_1}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2\right)\tau + \lambda_2\sigma_2 \end{aligned}\right. \tag{73}$$

dargestellt. Die Hilfsgrößen σ_1, σ_2, τ genügen der transformierten Energiegleichung

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \tau) = C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2 + C_{33}\tau^2 + C - W = 0, \tag{74}$$

wobei für die Koeffizienten C_{ik} und $C - W$ folgende Formeln gelten:

$$
(75)\quad \begin{cases} C_{11} = m_1 (m_0 + m_2) E_{11}, \qquad & C_{12} = -m_1 m_2 E_{12}, \\ C_{22} = m_2 (m_0 + m_1) E_{22}, \qquad & C_{33} = \dfrac{4 m_0 M F^2 J}{l}, \\ C - W = \dfrac{a^2 m_0 M}{4 m_1 m_2 F^2 J} (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2) & \\ \qquad + \dfrac{1}{J} (a^2 m_0 M - \dot{W} J). & \end{cases}
$$

Indem wir noch zur Abkürzung

$$
(76)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{8 m_1 F^2 \sqrt{3}} (2 \Delta_2 \alpha - \lambda_2 A) + \lambda_1 a_1 + \left(\dfrac{\gamma - \beta}{\Delta_1} \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1\right) \tau_0 = \overset{\circ}{u}_1 \\ - \dfrac{a}{8 m_2 F^2 \sqrt{3}} (2 \Delta_1 \alpha - \lambda_1 A) + \lambda_2 a_2 + \left(- \dfrac{\gamma - \beta}{\Delta_2} \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2\right) \tau_0 = \overset{\circ}{u}_2 \end{cases}
$$

und

$$
(77)\quad \begin{cases} \overset{*}{u}_1 = \dfrac{\gamma - \beta}{\Delta_1} \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}} + \lambda_1 b_1 \\ \overset{*}{u}_2 = - \dfrac{\gamma - \beta}{\Delta_2} \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}} + \lambda_2 b_2 \end{cases}
$$

setzen (und entsprechend auch für $\overset{\circ}{v}_k$, $\overset{\circ}{w}_k$, $\overset{*}{v}_k$, $\overset{*}{w}_k$, welche Formeln man durch zyklische Vertauschung der Buchstaben λ_k, μ_k, ν_k einerseits und der Buchstaben α, β, γ andrerseits, bekommt), können wir die Formeln für die $u_1, \ldots, w_2$ folgendermaßen schreiben:

$$
(78)\quad \begin{cases} u_1 = \overset{\circ}{u}_1 + \overset{*}{u}_1 \tau + \lambda_1 \sigma_1, \\ u_2 = \overset{\circ}{u}_2 + \overset{*}{u}_2 \tau + \lambda_2 \sigma_2. \end{cases}
$$

23. Berechnung der Größen $\overset{\circ}{u}_k$ und $\overset{*}{u}_k$. Die Größen $\overset{\circ}{u}_k$ und $\overset{*}{u}_k$ können leicht auf einfachere Gestalt gebracht werden.

Aus (77) und (67,2) folgt zunächst

$$
\overset{*}{u}_1 = \frac{1}{2 \Delta_1 l} \left[2 (\gamma - \beta) l + \sqrt{3 m_0 M} (E_{12} S_{11} \delta_1 - E_{22} S_{22} \delta_2) \lambda_1\right] \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.
$$

Nach (33) ist dann

$$
\overset{*}{u}_1 = \frac{1}{2 \Delta_1 l} \Big\{ -2 l \lambda_2 \Delta_1 + \lambda_1 [2 l \Delta_2 + \sqrt{3 m_0 M} (E_{12} S_{11} \delta_1 - E_{22} S_{22} \delta_2)] \Big\} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.
$$

Benutzt man jetzt die Formeln (23), so bekommt man

$$
2 \Delta_1 l \overset{*}{u}_1 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = -2 l \lambda_2 \Delta_1 + \Big\{ [(m_0 + m_1) E_{12} S_{11} + m_1 E_{22} S_{22}] \Delta_1 + [2 l - m_2 E_{12} S_{11} + (m_0 + m_2) E_{22} S_{22}] \Delta_2 + 2 l \Delta_2 \Big\} \lambda_1.
$$

Der Koeffizient von Δ_2 in der geschweiften Klammer der vorherigen Formel ist gleich Null, woraus

$$
\overset{*}{u}_1 = \frac{1}{2 l} \Big\{ -2 l \lambda_2 + \lambda_1 [-(m_0 + m_1) E_{12} S_{11} + m_1 E_{22} S_{22}] \Big\} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}
$$

folgt. Benutzt man jetzt die Formeln (37) und (46) und führt für $\overset{*}{u}_2$ ähnliche Rechnungen durch, so bekommt man schließlich

$$
(79)\quad \begin{cases} \overset{*}{u}_1 = \dfrac{1}{l} (l_1 \lambda_1 - l \lambda_2) \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}, \\ \overset{*}{u}_2 = \dfrac{1}{l} (l_2 \lambda_2 - l \lambda_1) \sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}}. \end{cases}
$$

Um jetzt einen geeigneten Ausdruck für die $\overset{\circ}{u}_k$ zu finden, bemerken wir zunächst, daß nach (76), (77), (79), (72) und (70)

$$
(80)\quad \begin{aligned} \overset{\circ}{u}_1 = {} & \frac{a \Delta_2}{4 m_1 F^2 \sqrt{3}} \alpha + \lambda_1 \Big\{ a_1 - \frac{a A}{8 m_1 l F^2 J \sqrt{3}} [m_2 (m_0 + m_2) E_{22} \\ & - m_1 (m_0 + m_1) E_{11}] l_1 \Big\} + \lambda_2 \Big\{ - \frac{a A}{8 m_1 F^2 \sqrt{3}} \\ & + \frac{a A}{8 m_1 F^2 J \sqrt{3}} [m_2 (m_0 + m_2) E_{22} - m_1 (m_0 + m_1) E_{11}] \Big\} \end{aligned}
$$

gilt. Der Koeffizient bei λ_1 in dieser Formel ist nach (67) gleich

$$- \frac{aA}{8m_1 l F^2 J\sqrt{3}} \left\{\tfrac{1}{2} J[m_1 E_{12} S_{12} - (m_0+m_1) E_{22} S_{21}] - l_1 [m_1 (m_0+m_1) E_{11} - m_2 (m_0+m_2) E_{22}]\right\},$$

oder, wegen (37), gleich

$$+ \frac{aA}{8m_1 l F^2 J\sqrt{3}} \left\{[m_0 M E_{12} E_{22} + 4 m_1 (m_0+m_1) F^2] J + [m_2 (m_0+m_2) E_{22} - m_1 (m_0+m_1) E_{11}] l_1\right\}.$$

Hieraus folgt unter Benutzung der ersten Identität (48), daß dieser Koeffizient gleich

$$\frac{aA}{8F^2 J\sqrt{3}} S_{12}$$

ist.

Der Koeffizient von λ_2 in der Formel (80) ist gleich

$$\frac{aA}{8m_1 F^2 J\sqrt{3}} [-J + m_2 (m_0+m_2) E_{22} - m_1 (m_0+m_1) E_{11}] = \frac{aA}{8F^2 J\sqrt{3}} S_{22}.$$

Führt man ähnliche Rechnungen für die Größe $\overset{\circ}{u}_2$ durch, so bekommt man die Formeln:

$$(81) \quad \begin{cases} \overset{\circ}{u}_1 = \dfrac{a\Delta_2}{4m_1 F^2\sqrt{3}}\,\alpha + \dfrac{aA}{8F^2 J\sqrt{3}} (S_{12}\lambda_1 + S_{22}\lambda_2), \\ \overset{\circ}{u}_2 = -\dfrac{a\Delta_1}{4m_2 F^2\sqrt{3}}\,\alpha - \dfrac{aA}{8F^2 J\sqrt{3}} (S_{11}\lambda_1 + S_{21}\lambda_2). \end{cases}$$

24. Der Fall $\Delta_1\Delta_2 = 0$. Wir wollen jetzt beweisen, daß das Formelsystem (78), (79), (81) und (74), (75) die allgemeine Lösung des simultanen algebraischen Systems (15) und (16) auch im Falle $\Delta_1\Delta_2 = 0$ darstellt. Dagegen ist, wie schon öfters betont wurde, die Bedingung $F^2 > 0$ als eine wesentliche Voraussetzung zu betrachten.

Wir bemerken zunächst, daß die Matrix (17) auch in diesem Falle den Rang drei besitzt, daß also die allgemeine Lösung des linearen Systems (16) auch jetzt ∞^3 partikuläre Lösungen enthalten wird. Ferner genügen die Größen (78) auch im Falle $\Delta_1\Delta_2 = 0$ den Gleichungen (17) und (18), vorausgesetzt natürlich, daß die Gleichung (74) erfüllt ist. Davon überzeugt man sich am einfachsten durch die Substitution der Größen (78) in (15) und (16).

Es bleibt also noch zu beweisen, daß die Formeln (78) die allgemeine Lösung von (15) bilden. Dazu genügt es wieder zu zeigen, daß die Formeln

$$\begin{cases} u_1 = \overset{*}{u}_1 \tau + \lambda_1 \sigma_1, & u_2 = \overset{*}{u}_2 \tau + \lambda_2 \sigma_2, \\ v_1 = \overset{*}{v}_1 \tau + \mu_1 \sigma_1, & v_2 = \overset{*}{v}_2 \tau + \mu_2 \sigma_2, \\ w_1 = \overset{*}{w}_1 \tau + \nu_1 \sigma_1, & w_2 = \overset{*}{w}_2 \tau + \nu_2 \sigma_2 \end{cases}$$

die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\begin{cases} m_1(\nu_1 v_1 - \mu_1 w_1) + m_2(\nu_2 v_2 - \mu_2 w_2) = 0, \\ m_1(\lambda_1 w_1 - \nu_1 u_1) + m_2(\lambda_2 w_2 - \nu_2 u_2) = 0, \\ m_1(\mu_1 u_1 - \lambda_1 v_1) + m_2(\mu_2 u_2 - \lambda_2 v_2) = 0 \end{cases}$$

darstellen. Dies geschieht am einfachsten durch die Berechnung des Ranges der Matrix

$$\begin{matrix} \overset{*}{u}_1, & \overset{*}{v}_1, & \overset{*}{w}_1, & \overset{*}{u}_2, & \overset{*}{v}_2, & \overset{*}{w}_2 \\ \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 . \end{matrix}$$

Bezeichnet man mit (i, j, k) die aus der i-ten, j-ten und k-ten Kolonne dieser Matrix gebildete dreireihige Determinante, so ist

$$(1, 2, 4)^2 + (1, 2, 5)^2 + (1, 2, 6)^2 = (\overset{*}{u}_1 \mu_1 - \overset{*}{v}_1 \nu_1)^2 . E_{22}$$

$$(2, 3, 4)^2 + (2, 3, 5)^2 + (2, 3, 6)^2 = (\overset{*}{v}_1 \nu_1 - \overset{*}{w}_1 \mu_1)^2 . E_{22}$$

$$(3, 1, 4)^2 + (3, 1, 5)^2 + (3, 1, 6)^2 = (\overset{*}{w}_1 \lambda_1 - \overset{*}{u}_1 \nu_1)^2 . E_{22} .$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen überzeugt man sich sofort, daß die Quadratsumme der entsprechenden Determinanten gleich

(82) $$[(\overset{*}{u}_1^2+\overset{*}{v}_1^2+\overset{*}{w}_1^2)(\lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2)-(\overset{*}{u}_1\lambda_1+\overset{*}{v}_1\mu_1+\overset{*}{w}_1\nu_1)^2]\,E_{22}$$

ist. Nach (79) ist der Ausdruck (82) gleich

$$\left[\frac{m_2}{m_1 l^2}(E_{11}l_1^2-2E_{12}l_1 l+E_{22}l^2)E_{11}-\frac{m_2}{m_1 l^2}(l_1E_{11}-lE_{12})^2\right]E_{22}$$

$$=\frac{m_2}{m_1 l^2}(E_{11}E_{22}-E_{12}^2)\,l^2E_{22}=\frac{4m_2F^2E_{22}}{m_1}.$$

Der erhaltene Ausdruck ist gewiß positiv und so stellen die Formeln (78) die allgemeine Lösung von (15) auch im Falle $\Delta_1\Delta_2=0$ dar.

IV. Die Ungleichung $C-W\leqq 0$.

25. Die fundamentale Ungleichung $C-W\leqq 0$. Aus (75) folgt unmittelbar

$$C_{11}C_{22}-C_{12}^2=m_1m_2l>0,\quad C_{33}>0.$$

Demnach ist die quadratische Form

$$C_{11}\sigma_1^2+2C_{12}\sigma_1\sigma_2+C_{22}\sigma_2^2+C_{33}\tau^2$$

positiv-definit. Aus (74) folgt dann, daß, solange die Bewegung reell ist und solange sich die drei Massen m_0, m_1, m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden befinden, die Ungleichung

(83) $$C-W\leqq 0$$

bestehen muß. Natürlich sind auch Zusammenstöße ausgeschlossen.

Die Gleichung

(84) $$C-W=0$$

stellt eine Hyperfläche (H) im sechsdimensionalen Raume der Variablen

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2,$$

dar. Die Hyperfläche (H) teilt diesen Raum in zwei oder mehrere Bereiche, in welchen stets

$$C-W<0\quad\text{oder}\quad C-W>0$$

gilt. Bezeichnet man mit $(\mathfrak{B})$ die Gesamtheit derjenigen Punkte, für welche die Ungleichung $C-W\leqq 0$ stattfindet, so gelangt

man zu der wichtigen Folgerung, daß die beiden Planeten m_1 und m_2 stets derartige Koordinaten besitzen müssen, daß der entsprechende Punkt des sechsdimensionalen Raumes der Menge $(\mathfrak{B})$ angehört.

Wir können also die Hyperfläche (H) als ein Gegenstück zu der im restringierten Dreikörperproblem betrachteten Fläche der relativen Nullgeschwindigkeit des unendlich kleinen Körpers auffassen. *Somit stellt die Ungleichung* (83) *in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der auf dem Jacobischen Integral basierten Ungleichung im restringierten Dreikörperproblem dar.* Daher besteht, zumindest theoretisch, die Möglichkeit, gewisse, für das restringierte Dreikörperproblem sehr wichtige, Untersuchungen auf das allgemeine Problem zu übertragen. Auf eine nähere Diskussion der Hyperfläche (84) werden wir in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Die Ungleichung (83) ist ziemlich kompliziert. Beachtet man, daß der Ausdruck

$$m_1^2E_{11}\delta_1^2+2m_1m_2E_{12}\delta_1\delta_2+m_2^2E_{22}\delta_2^2$$

eine im Falle $F^2>0$ positiv-definite quadratische Form ist, so kann man (83) durch die folgende, etwas schärfer formulierte Ungleichung ersetzen:

(85) $$0\leqq a^2(m_1^2E_{11}\delta_1^2+2m_1m_2E_{12}\delta_1\delta_2+m_2^2E_{22}\delta_2^2)$$
$$\leqq\frac{4m_1m_2F^2}{m_0M}(WJ-a^2m_0M).$$

26. Der Zusammenstoß von zwei Körpern. In diesem Absatz setzen wir vor allem voraus, daß die durch (3) erklärte und für das Wirkungsgesetz maßgebende Funktion der Bedingung

(86) $$\lim_{u\to 0}u^2\Phi(u)=0$$

genügt. Diese Bedingung ist im Falle des klassischen Gravitationsgesetzes offenbar erfüllt.

Wir bezeichnen ferner mit t_0 irgendeinen Zeitpunkt und setzen weiter voraus, daß es eine positive Zahl t' gibt, so daß für alle der Ungleichheit

$$t_0 - t' < t \leqslant t_0$$

genügende Zeitpunkte t, die drei Massen m_0, m_1, m_2 nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir zwei Sätze über den Zusammenstoß von zwei (und nur zwei) Körpern beweisen.

1°. Der Zusammenstoß der Planeten m_1 und m_2. Es gilt der Satz:

Nähern sich für $t \to t_0$ und $t < t_0$ die beiden Massen m_1 und m_2 einem wohlbestimmten und von der Lage der Sonne verschiedenen Punkte, so liegt dieser in der Laplace'schen invariablen Ebene, falls noch $a \neq 0$ gilt.

Mit anderen Worten:

Unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen ist der Zusammenstoß der zwei Planeten nur in der Laplace'schen invariablen Ebene möglich.

Beweis. Den Voraussetzungen unseres Satzes zufolge postulieren wir die Existenz der Grenzwerte von r_1, r_2, r_{12}, δ_1, δ_2 für $t \to t_0$ und $t < t_0$, wobei noch

$$(87) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{t \to t_0 - 0} r_1 = \lim_{t \to t_0 - 0} r_2 = \mathring{r} \neq 0, \\ &\lim_{t \to t_0 - 0} r_{12} = 0, \\ &\lim_{t \to t_0 - 0} \delta_1 = \lim_{t \to t_0 - 0} \delta_2 = \mathring{\delta} \end{aligned} \right.$$

sein soll.

Es ist dann zunächst

$$(88) \qquad \lim_{t \to t_0 - 0} (m_1^2 E_{11} \delta_1^2 + 2 m_1 m_2 E_{12} \delta_1 \delta_2 + m_2^2 E_{22} \delta_2^2) = \frac{m_0}{M} (m_1 + m_2)^2 \mathring{r}^2 \mathring{\delta}_1^2 .$$

Aus

$$F \leqslant \tfrac{1}{2} r_1 r_{12}$$

und (4), (14), (40) folgt weiter

$$(89) \qquad F^2 (WJ - a^2 m_0 M) \leqslant \tfrac{1}{4} m_0 r_1^2 r_{12}^2 \{ 2 [m_0 m_1 \Phi(r_1) + m_0 m_2 \Phi(r_2) + m_1 m_2 \Phi(r_2) + h] [m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r^2 + m_1 m_2 r_{12}^2] - a^2 M \} .$$

Aus (87), (86) und (89) folgt also

$$(90) \qquad \lim_{t \to t_0 - 0} F^2 (WJ - a^2 m_0 M) = 0 .$$

Aus (85), (88), (90) und $a \neq 0$ schließt man dann, daß $\mathring{r}^2 \mathring{\delta}^2 = 0$ gilt. Nun ist aber nach (87) $\mathring{r} \neq 0$, so daß $\mathring{\delta} = 0$ sein muß.

Wir sehen also zunächst, daß der Punkt, in welchem es zu einem Zusammenstoße der beiden Planeten kommt, notwendig in der fundamentalen Ebene der relativen Bewegung liegen muß. Nun aber stimmt diese Ebene im Augenblicke des Zusammenstoßes mit der Laplace'schen invariablen Ebene überein, und zwar aus folgendem Grunde:

Liegen alle drei Massen m_0, m_1, m_2 in der Fundamentalebene der relativen Bewegung, so trifft dasselbe auch für ihren Massenmittelpunkt zu. Da nun der Massenmittelpunkt zugleich in der invariablen Ebene liegt, und da die Fundamentalebene stets der invariablen Ebene parallel bleibt, so müssen die beiden Ebenen in diesem Zeitpunkte zusammenfallen.

Bemerkung 1. Es ist aus dem Beweise leicht ersichtlich, daß man für die Gültigkeit der Behauptung das Vorhandensein der Grenzwerte der Koordinaten der beiden materiellen Punkte m_1 und m_2 keineswegs zu postulieren braucht. Es genügt vielmehr vorauszusetzen, daß für $t \to t_0$ die Größen r_1 und r_2 zwischen endlichen und von Null verschiedenen Grenzen variieren, und daß $\lim_{t \to t_0} r_{12} = 0$ gilt. Wegen $|\delta_1| \leqslant r_1$, $|\delta_2| \leqslant r_2$ bleibt dann unserer Satz auch unter dieser allgemeineren Voraussetzung richtig.

Bemerkung 2. Der Zeitpunkt t_0 kann auch unendlich groß sein.

2°. Der Fall eines Planeten auf die Sonne.

Kommt es für $t \to t_0$ und $t < t_0$ zu einem Fall eines der Planeten auf die Sonne, also zu einem Zusammenstoße z. B. der Masse m_1 mit der Masse m_0, und strebt inzwischen der zweite Planet m_2 einer wohlbestimmten Lage Π zu, so liegt der Punkt Π in der Laplace'schen invariablen Ebene.

Der Beweis ist dem vorstehenden ähnlich und soll dem Leser überlassen werden. Auch auf die naheliegenden Verallgemeinerungen wird hier verzichtet.

27. Die Ungleichung $JW - a^2 m_0 M \geq 0$. Gleichzeitiger Zusammenstoß der drei Massen. Ein Sundmanscher Satz. Wir wenden uns jetzt der bekannten Frage des gleichzeitigen Zusammenstoßes aller drei Massen zu. In dieser Richtung verdankt man SUNDMAN zwei elegante Sätze, die der berühmte Verfasser unter Zugrundelegung des Newtonschen Gravitationsgesetzes bewiesen hat.

Der erste Sundmansche Satz:

Kommt es in einem bestimmten Zeitpunkte zu einem Zusammenstoß aller drei materiellen Punkte, so streben diese entweder einer Konfiguration zu, die sich von der Konfiguration des gleichseitigen Dreieckes nur um unendliche Größen höherer Ordnung unterscheidet, oder aber streben sie Grenzlagen zu, welche auf einer Geraden sich befinden, jedoch derart, daß die Verhältnisse der gegenseitigen Abstände gegen endliche und von Null verschiedene Grenzwerte konvergieren.

Der zweite Sundmansche Satz:

Kommt es in einem bestimmten Zeitpunkte zu einem Zusammenstoß aller drei materiellen Punkte, so sind die der Bewegung entsprechenden Flächenkonstanten gleich Null.

Mit anderen Worten: sind die drei Flächenkonstanten nicht alle gleich Null, so ist der gleichzeitige Zusammenstoß aller drei Massen ausgeschlossen.

SUNDMAN hat seinem zweiten Satze eine noch genauere Fassung gegeben, auf die wir hier jedoch nicht einzugehen brauchen. Es sei noch bemerkt, daß, wie es SUNDMAN selbst in einer Fußnote seiner preisgekrönten Arbeit hervorhebt, der zweite Satz schon WEIERSTRASS bekannt gewesen sein sollte. WEIERSTRASS hat jedoch seinen Beweis nicht veröffentlicht.

Wir wollen jetzt den zweiten Sundmanschen Satz als Folgerung aus einer unseren Untersuchungen entspringenden Ungleichung beweisen. Dabei werden wir uns allerdings im Falle des Newtonschen Gravitationsgesetzes des ersten Sundmanschen Satzes bedienen müssen. Andererseits aber werden wir eine Klasse von Wirkungsgesetzen $\varphi(u)$ bestimmen, für welche der zweite Sundmansche Satz als eine unmittelbare Folgerung aus einer unserer Ungleichungen erscheint, ohne daß man sich dabei auf den ersten Satz zu stützen braucht.

Einfachheitshalber werden wir uns dabei auf die Funktionen

(91) $$\varphi(u) = C u^k$$

beschränken, wo C und k beliebige reelle Zahlen bedeuten. Den trivialen Fall $C = 0$ werden wir nicht berücksichtigen. Die Verallgemeinerung auf Funktionen $\varphi(u)$, die von allgemeinerer Natur sind, bietet keine Schwierigkeiten.

Aus (3) folgt

$$\Phi(u) = \frac{1}{k+2} u^{k+2} + C' \quad \text{für } k \neq -2,$$

$$\Phi(u) = \log u + C' \quad \text{für } k = -2.$$

Im Einklang mit N° 1 wählen wir für C' den Wert Null. Es ist dann

$$\Phi(u) = 2 m_0 \left\{ \frac{C}{k+2} (m_0 m_1 r_1^{k+2} + m_0 m_2 r_2^{k+2} + m_1 m_2 r_{12}^{k+2}) + h \right\}$$

für $k \neq -2$ und

$$\Phi(u) = 2 m_0 \left\{ C [m_0 m_1 \log r_1 + m_0 m_2 \log r_2 + m_1 m_2 \log r_{12}] + h \right\}$$

im Falle $k = -2$.

Die Ungleichheit (7) liefert dann

$$\frac{C}{k+2} (m_0 m_1 r_1^{k+2} + m_0 m_2 r_2^{k+2} + m_1 m_2 r_{12}^{k+2}) + h > 0$$

im ersten, und

$$C (m_0 m_1 \log r_1 + m_0 m_2 \log r_2 + m_1 m_2 \log r_{12}) + h > 0$$

im zweiten Falle.

Hieraus folgen zunächst notwendige Bedingungen für die Möglichkeit eines gleichzeitigen Zusammenstoßes aller drei Massen. Und zwar es muß

1° $h > 0$ im Falle $k + 2 > 0$,

2° $C < 0$ im Falle $k + 2 \leq 0$ sein.

Wir sehen also, daß im Falle $k + 2 \leq 0$ und $C > 0$ (Abstoßungskraft) es überhaupt zu einem gleichzeitigen Zusammenstoße aller Massen nicht kommen kann.

Und nun die Ungleichung, auf die wir uns stützen wollen. Sie folgt aus (85) und lautet:

$$JW - a^2 m_0 M \geqslant 0\,,$$

oder ausführlicher:

(92) $$2(U+h)J - a^2 M \geqslant 0\,.$$

Es ist also für die Gravitationsgesetze von der Gestalt (91)

1° im Falle $k+2 \neq 0$:

(93) $$(m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r_2^2 + m_1 m_2 r_{12}^2)\Big[\frac{C}{k+2}(m_0 m_1 r_1^{k+2} + m_0 m_2 r_2^{k+2} + m_1 m_2 r_{12}^{k+2}) + h\Big] \geqslant \frac{a^2 M}{2}$$

2° im Falle $k+2=0$:

(94) $$(m_0 m_1 r_1^2 + m_0 m_2 r_2^2 + m_1 m_2 r_{12}^2)\Big[C(m_0 m_1 \log r_1 + m_0 m_2 \log r_2 + m_1 m_2 \log r_{12}) + h\Big] \geqslant \frac{a^2 M}{2}\,.$$

Wir setzen jetzt voraus, daß für $t \to t_0$ $(t < t_0)$ alle drei Massen nicht gleichzeitig auf einer Geraden liegen und daß es für $t = t_0$ zu einem gleichzeitigen Zusammenstoße aller drei Massen kommt. Wir werden drei Fälle unterscheiden.

Fall 1. $k+2>0$. In diesem Falle ist, wie gesagt, $h>0$. Weiter sieht man aus (93), daß die linke Seite dieser Ungleichung in diesem Falle gegen Null konvergiert. Hieraus folgt notwendig $a=0$.

Nun aber stellt $a/\sqrt{3}$ den gemeinsamen Wert aller Flächenkonstanten dar, so daß also der zweite Sundmansche Satz tatsächlich gilt.

Fall 2. $-2 \geqslant k > -4$. Wir machen die zusätzliche Voraussetzung, daß sich zwei positive Konstanten α und β angeben lassen, so daß für $t \to t_0$ die Ungleichungen

$$\alpha < \frac{r_1}{r_2}\,,\quad \frac{r_1}{r_{12}}\,,\quad \frac{r_2}{r_{12}} < \beta$$

stattfinden. Wie wir früher bemerkt haben, ist diese Bedingung im Falle des Newtonschen Gravitationsgesetzes ($k=-3$) nach dem ersten Sundmanschen Satze stets erfüllt. Es ist möglich, daß sich der Beweis des ersten Sundmanschen Satzes auf alle der Bedingung $k>-4$ genügende Exponenten übertragen läßt. Doch

haben wir diese Sache nicht näher geprüft. Anderseits sei hier ausdrücklich hervorgehoben, daß wir unter der Voraussetzung des Erfülltseins der angegebenen Bedingungen auch den unendlich fernen Zeitpunkt in Betracht zu ziehen imstande sind.

Ist die zusätzliche Bedingung erfüllt, so konvergieren sowohl

$$r_1^{k+4}\,,\quad r_2^{k+4}\,,\quad r_{12}^{k+4}\,,$$

wie auch

$$r_1^2\, r_2^{k+2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 r_2^{k+4}\,, \ldots\ldots$$

gegen Null. Aus (93) bzw. (94) folgt dann wieder $a=0$.

Fall 3. $k<-4$. Unsere Schlußweise kann nicht angewandt werden und die Frage, ob der Satz auch dann richtig bleibt, soll offen bleiben.

(Reçu par la Rédaction le 12. 2. 1938).