Über lineare Gleichungen in separablen Räumen (II)

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

In dieser Arbeit werden die Untersuchungen einer früheren Note [1]) über allgemeine lineare Gleichungen vom Typus $y_0 = U(x)$, wo y_0 gegeben ist, fortgesetzt. Es zeigt sich, daß die Hauptrolle bei der Formulierung der Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung die Menge R der Werte der konjugierten Operation spielt [2]). Wir betrachten zunächst den Fall, daß die erste schwache Hülle $R_{(1)}$ von R schwachabgeschlossen ist. Wir erhalten dann ein ziemlich einfaches und allgemeines Resultat. Nachher verallgemeinern wir dieses Ergebnis auf den Fall, daß es eine schwache Hülle $R_{(i)}$ von endlicher Ordnung gibt, die schwachabgeschlossen ist. Die Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung im allgemeinen Fall ist analog und wurde schon in (I) bewiesen, aber hier geschieht es unter geringeren Voraussetzungen und in einer mehr präzisen Form. Zum Schluß folgen einige Beispiele aus der Theorie der Fourierreihen und der Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, an welchen die Methode illustriert wird.

§ 1.

Wir legen im folgenden einen separablen Raum E vom Typus (B) zugrunde, dessen Elemente mit x bezeichnet werden. Mit $U(x)$ werden wir immer eine in E erklärte lineare Operation

[1]) M. Eidelheit, Über lineare Gleichungen in separablen Räumen, Studia Math. 6 (1936) p. 117—138. Diese Arbeit wird im folgenden als (I) zitiert.

[2]) Was die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Begriffe anbetrifft, siehe: S. Banach, Théorie des opérations linéaires (Monografje matematyczne, Warszawa-Lwów 1932). Dieses Buch wird weiter als Opérations zitiert.

bezeichnen, deren Werte Elemente eines Raumes G vom Typus (B_0) sein mögen [3]). Diese Elemente werden wir mit y, — lineare in E bzw. G erklärte Funktionale mit $f(x)$ bzw. $Y(y)$ bezeichnen. Es wird noch $X(x) = Y[U(x)]$ gesetzt. Wenn wir $f_n \to f$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ schreiben, so meinen wir immer, daß die Folge linearer Funktionale $f_n(x)$ gegen $f(x)$ schwach konvergiert. Ist H eine Menge linearer Funktionale, so soll $H_{(1)}$ die schwache Hülle von H d. h. die Menge der linearen Funktionale bedeuten, welche Grenzwerte schwachkonvergenter Folgen aus H sind; allgemein setzen wir für irgendeine Ordnungszahl $\alpha : R_{(\alpha)} = S_{(1)}$, wo $S = R_{(\alpha-1)}$, wenn α eine vorangehende Zahl hat, und $R_{(\alpha)} = \sum\limits_{\xi<\alpha} R_{(\xi)}$ im anderen Fall. Endlich werden die Buchstaben i, k, l, m, n immer ganze positive Zahlen bedeuten.

Hilfssatz [4]). *Es sei H eine lineare Menge linearer Funktionale in E. Damit $H_{(1)}$ schwachabgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahl $A > 0$ gebe derart, daß jedes Funktional $f \in H_{(1)}$ mit $|f| \leqslant 1$ der Grenzwert einer schwachkonvergenten Folge $f_n \in H$ mit $|f_n| \leqslant A$ sei.*

Beweis. Notwendigkeit. Es bezeichne Z_k die Menge der Funktionale $f \in H_{(1)}$, für welche es eine Folge $f_n \in H$ mit $f_n \to f$, $|f_n| \leqslant k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gibt. Es ist dann nach dem „Resonanztheorem" [5]) $H_{(1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} Z_k$, und da $H_{(1)}$ abgeschlossen ist, so ist eine der Mengen Z_k, z. B. Z_{k_0}, von der zweiten Kategorie inbezug auf $H_{(1)}$. Nun sind die Mengen Z_k abgeschlossen. Denn ist $f_m \in Z_k$, $f_m \to f$, so gibt es für jedes m eine Folge $f_n^{(m)} \in H$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(m)} = f_m$, $|f_n^{(m)}| \leqslant k$. Aus der Doppelfolge $f_n^{(m)}$ läßt sich dann eine Folge herausgreifen, die in einer in E dichten Menge gegen f konvergiert; wegen der Beschränktheit der Normen der Funktionale ist sie überall konvergent [6]). Die Menge Z_{k_0} enthält demnach eine Kugel in $H_{(1)}$. Daraus folgt leicht die Behauptung.

[3]) Vgl. M. Eidelheit, Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, Studia Math. 6 (1936) p. 139—148.

[4]) Dieser Hilfssatz wurde mir von Herrn S. Banach mündlich mitgeteilt.

[5]) Opérations, p. 80, th. 5.

[6]) Opérations, p. 79, th. 3.

Hinlänglichkeit. Es sei $f_m \in H_{(1)}$, $f_m \to f$. Es gibt dann nach dem erwähnten „Resonanztheorem" eine Zahl $C > 0$ mit $|f_m| \leqslant C$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Nach der Voraussetzung gibt es für jedes m eine Folge $f_n^{(m)} \in H$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n^{(m)} = f_m$, $|f_n^{(m)}| \leqslant CA$. Aus dieser Doppelfolge läßt sich wie oben eine gegen f schwachkonvergente Teilfolge herausgreifen, d. h. $f \in H_{(1)}$ [7]).

S a t z 1. *Es bezeichne R die Menge der linearen Funktionale von der Form $X(x) = Y[U(x)]$, wo $Y(y) \in \bar{G}$ beliebig ist und es sei $R_{(1)}$ schwachabgeschlossen. Damit die Gleichung*

$$y_0 = U(x), \tag{1}$$

wo y_0 ein gegebenes Element aus G ist, eine Lösung besitze, ist notwendig und hinreichend, daß die Beziehung $X_n \to 0$ $(X_n = Y_n[U(x)])$ die Relation $Y_n(y_0) \to 0$ zur Folge habe.

B e w e i s. Notwendigkeit. Es sei $y_0 = U(x_0)$, $x_0 \in E$. Dann ist für $X_n \to 0$ auch $Y_n(y_0) = Y_n[U(x_0)] = X_n(x_0) \to 0$.

Hinlänglichkeit. Es sei $\{x_n\}$ eine in der Kugel $|x| \leqslant 1$ dichte Folge von Elementen aus E. Wir bemerken zunächst, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m = m(\varepsilon)$ und ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, derart daß die Beziehungen

$$|X| \leqslant 1, \ |X(x_k)| \leqslant \delta \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \quad (X(x) = Y[U(x)])$$

die Ungleichung $|Y(y_0)| < \varepsilon$ zur Folge haben.

Denn anderenfalls würde es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $\{Y_n(y)\}$ geben, so daß $X_n(x) = Y_n[U(x)]$ gesetzt,

$$|X_n| \leqslant 1, \ |X_n(x_k)| \leqslant \frac{1}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ und } |Y_n(y_0)| \geqslant \varepsilon_0 \tag{2}$$

wäre. Nach dem unter [6]) zitierten Satze ist $X_n \to 0$ und unsere Voraussetzung verlangt dann, daß $Y_n(y_0) \to 0$ sei, entgegen (2).

Ist nun $f \in R_{(1)}$ und $X_n \in R$, $X_n \to f$, so konvergiert nach dem Cauchy'schen Satze und mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung die entsprechende Folge $\{Y_n(y_0)\}$ und ihr Grenzwert ist offenbar unabhängig von der Wahl der speziellen gegen f konvergierenden Folge. Wir bezeichnen ihn mit $\Phi(f)$.

[7]) Vgl. zu diesem Beweis: Opérations, p. 213—214, Beweis des Theorems 2.

Wir wollen nun zeigen, daß dieses in $R_{(1)}$ erklärte additive und homogene Funktional schwachstetig ist. Es sei zu dem Zweck $\varepsilon > 0$ gegeben und es bezeichne A die nach dem Hilfssatz für R existierende Zahl, die man $\geqslant 1$ annehmen darf: wir behaupten, daß $|\Phi(f)| \leqslant \varepsilon$ ist, sobald

$$f \in R_{(1)}, \ |f| \leqslant 1, \ |f(x_k)| < \delta \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

wo $\delta = \delta(\varepsilon/A)$ und $m = m(\varepsilon/A)$ die nach dem Vorangehenden für ε/A existierenden Zahlen sind.

Da nämlich $R_{(1)}$ schwachabgeschlossen ist, so gibt es nach dem Hilfssatz für ein $f \in R_{(1)}$ mit $|f| \leqslant 1$ eine Folge $\{Y_n(y)\}$, derart daß

$$(X_n(x) = Y_n[U(x)]), \ X_n \to f, \ |X_n| \leqslant A \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ist. Für genügend große n wird dann $|X_n(x_k)| < \delta$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, also gemäß der Bedeutung von δ und m $|Y_n(y_0)/A| < \varepsilon/A$ und somit $|\Phi(f)| = |\lim_{n\to\infty} Y_n(y_0)| \leqslant \varepsilon$.

Aus dem Bewiesenen folgt sofort die Schwachstetigkeit des Funktionals $\Phi(f)$. Denn es sei $f_n \in R_{(1)}$, $f_n \to 0$. Es gibt dann nach dem „Resonanztheorem" eine Zahl $C > 1$, derart daß $|f_n| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist. Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, so wird für genügend große n $|f_n(x_k)| < \delta$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, wo $m = m(\varepsilon/A)$, $\delta = \delta(\varepsilon/A)$ ist, also $|\Phi(f_n)| \leqslant C\varepsilon$, d. h. $\Phi(f_n) \to 0$.

Nun gibt es nach einem Satze des Herrn S. Banach [8]) ein Element $x_0 \in E$, so daß $f(x_0) = \Phi(f)$ für $f \in R_{(1)}$. Insbesondere für $f \in R$, $f(x) = Y[U(x)]$ ergibt sich daraus $Y[U(x_0)] = Y(y_0)$. Da diese Gleichung für jedes $Y(y)$ besteht, so folgt $U(x_0) = y_0$, w. z. b. w.

K o r o l l a r. *Gibt es für die Elemente y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Lösung von (1) und gilt $Y(y_n - y_0) \to 0$ gleichmäßig in bezug auf die Menge der Funktionale $Y(y)$ mit $|X| \leqslant 1$ $(X(x) = Y[U(x)])$, so gibt es auch eine Lösung für y_0.*

B e w e i s. Es sei $X_n \to 0$ $(X_n = Y_n[U(x)])$. Es gibt dann ein $C > 0$, so daß $|X_n| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist. Daraus folgt

[8]) Opérations, p. 131, th. 8; dieses Theorem besteht offenbar auch dann, wenn man den ganzen Raum $\bar{E}$ durch irgendeine lineare schwachabgeschlossene Menge ersetzt.

$$|Y_n(y_0 - y_k)| \leqslant C \sup_{|X| \leq 1} |Y(y_0 - y_k)|,$$

also $|Y_n(y_0) - Y_n(y_k)| < \varepsilon_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$, wobei $\varepsilon_k \to 0$. Da nach Voraussetzung mit Rücksicht auf Satz 1 $\lim_{n \to \infty} Y_n(y_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist, so folgt daraus $Y_n(y_0) \to 0$, w. z. b. w.

§ 2.

1. Wir setzen nunmehr voraus, daß der Raum E nicht nur separabel ist, sondern auch eine ausgezeichnete Basis besitzt. Die Basis $\{e_n\}$ heißt dabei ausgezeichnet, wenn für beliebige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$

$$|\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} e_{n+1}| \geqslant |\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n|$$

ist [9]). Dagegen braucht sie nicht normierend zu sein, wie dies in (I) vorausgesetzt wurde. Setzt man

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) e_i,$$

so sind die $g_i(x)$ lineare Funktionale [10]). Setzt man ferner für ein beliebiges lineares Funktional $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) f(e_i)$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{k} g_i(x) f(e_i),$$

so ist [11])

$$|f| = \sup_{k=1,2,\ldots} |f^{(k)}| = \lim_{k \to \infty} |f^{(k)}|.$$

Eine weitere Bemerkung, die wir jetzt formulieren wollen, ist die folgende:

Es ist $f_n \to f$ dann und nur dann, wenn 1° eine Zahl $C > 0$ existiert, so daß $|f_n| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 2° $\lim_{n \to \infty} |f_n^{(k)} - f^{(k)}| = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist.

[9]) Diese Definition ist mit der in (I) p. 123 gegebenen offenbar äquivalent.
[10]) Opérations, p. 111.
[11]) (I) p. 123, Hilfssatz 3.

Beweis. Es sei $f_n \to f$. Es ist dann $\lim_{n \to \infty} f_n(e_i) = f(e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, mithin $\lim_{n \to \infty} |f_n^{(k)} - f^{(k)}| = \lim_{n \to \infty} \| \sum_{i=1}^{k} (f_n(e_i) - f(e_i)) g_i(x) \| = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Die Bedingung 1° ist bekannt.

Umgekehrt seien 1° und 2° erfüllt. Es ist dann, da die Funktionale $g_i(x)$ voneinander linear unabhängig sind, $\lim_{n \to \infty} f_n(e_i) = f(e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und da die Folge $\{e_i\}$ eine Basis bildet, so folgt wegen 1° sofort $f_n \to f$.

2. Wir kehren jetzt zur Gleichung (1) zurück und setzen voraus, daß es eine endliche Zahl i gibt, derart daß $R_{(i)}$ schwach-abgeschlossen ist. Es gilt dann der

Satz 2. *Besitzt die Gleichung* (1) *eine Lösung x_0 mit $|x_0| \leqslant M$, so gibt es für beliebige positive $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ solche $k_1, k_2, \ldots, k_i$, daß für jedes $Y(y)$ $(X(x) = Y[U(x)])$*

$$(3) \qquad |Y(y_0)| \leqslant \max_{m=0,1,\ldots,i} [\varepsilon_m \max_{k_m < k \leq k_{m+1}} |X^{(k)}|] \; (k_0 = 0, k_{i+1} = \infty, \varepsilon_0 = M + \eta)$$

gilt; dabei ist k_m $(m = 1, 2, \ldots, i)$ nur von $\eta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ abhängig. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so gibt es zu jedem $\eta > 0$ eine Lösung x_0 von (1) *mit $|x_0| < M + \eta$* [12]).

Beweis. Notwendigkeit. Es seien zunächst η und ε_1 gegeben. Wir werden zeigen, daß es ein k_1 gibt, so daß für jedes $f \neq 0$ die Ungleichung

$$|f(x_0)| < \max [(M + \eta) \max_{0 < k \leq k_1} |f^{(k)}|, \; \varepsilon_1 \sup_{k_1 < k} |f^{(k)}|]$$

besteht. Denn anderenfalls würde es Zahlen $\eta, \varepsilon_1 > 0$ und eine Folge $\{f_n\}$ mit $f_n \neq 0$,

$$|f_n(x_0)| \geqslant (M + \eta) |f_n^{(k)}| \text{ für } 0 < k \leqslant n, \quad |f_n(x_0)| \geqslant \varepsilon_1 |f_n^{(k)}| \text{ für } k > n$$

geben. Man darf hier, da beide Seiten der Ungleichungen homogen

[12]) Mehr kann im allgemeinen nicht behauptet werden. Dies zeigt schon die Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \xi_k = 1$, wo es ersichtlich für jedes $\eta > 0$ eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < 1 + \eta$, aber keine mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leqslant 1$ gibt.

in f sind, $f_n(x_0)=1$ annehmen und es kommt dann

$$|f_n| = \sup_{k>n} |f_n^{(k)}| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Nach einem bekannten Satze[13]) gibt es daher eine schwachkonvergente Teilfolge $f_{n_i}\to f$, die gegen ein Funktional f konvergiert. Für f hat man

$$f(x_0)=\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x_0)=1,\quad |f^{(k)}|=\lim_{i\to\infty}|f_{n_i}^{(k)}|\leqslant \frac{1}{M+\eta}\quad (k=1,2,\ldots),$$

also $|f|\leqslant \frac{1}{M+\eta} = \frac{f(x_0)}{M+\eta}$, was gegen $|x_0|\leqslant M$ verstößt.

Wir zeigen nun: wählt man noch $\varepsilon_2>0$ beliebig, so gibt es ein k_2, derart daß für jedes $f\neq 0$

$$|f(x_0)| < \max\big((M+\eta)\max_{0<k\leqslant k_1}|f^{(k)}|,\ \varepsilon_1 \max_{k_1<k\leqslant k_2}|f^{(k)}|,\ \varepsilon_2\sup_{k_2<k}|f^{(k)}|\big)$$

gilt. Anderenfalls würde es nämlich ein $\varepsilon_2>0$ und eine Folge $\{f_n\}$ mit $f_n\neq 0$ geben, so daß $|f_n(x_0)|\geqslant (M+\eta)|f_n^{(k)}|$ für $0<k\leqslant k_1$, $|f_n(x_0)|\geqslant \varepsilon_1|f_n^{(k)}|$ für $k_1<k\leqslant k_1+n$, $|f_n(x_0)|\geqslant\varepsilon_2|f_n^{(k)}|$ für $k_1+n<k$ wäre. Man darf wieder $f_n(x_0)=1$ annehmen und erhält dann $|f_n|\leqslant 1/\varepsilon_2$ $(n=1,2,\ldots)$. Es gibt demnach eine schwachkonvergente Teilfolge $f_{n_i}\to f$ und es ist

$$f(x_0)=1,\quad |f(x_0)|\geqslant (M+\eta)|f^{(k)}| \text{ für } 0<k\leqslant k_1,$$
$$|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_1|f^{(k)}| \text{ für } k_1<k,$$

was mit dem schon Bewiesenen in Widerspruch steht.

So fortfahrend gelangt man zu dem Ergebnis: sind beliebige positive Zahlen $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ gegeben, so gibt es solche $k_1, k_2, \ldots, k_i$, daß für jedes $f\neq 0$ die Ungleichung

$$|f(x_0)| < \max_{m=0,1,\ldots,i}\Big[\varepsilon_m \max_{k_m<k\leqslant k_{m+1}}|f^{(k)}|\Big]$$

besteht; dabei ist k_m nur von $\eta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ abhängig $(m=1,2,\ldots)$. Aus dieser Ungleichung folgt sofort (3).

[13]) Opérations, p. 123, th. 3.

Hinlänglichkeit. Wir bemerken zunächst, daß $Y_n(y_0)\to 0$ ist, wenn $X_n\to 0$ $(X_n=Y_n[U(x)])$. Es gibt nämlich eine Zahl $C>0$, so daß $|X_n|\leqslant C$ $(n=1,2,\ldots)$ ist. Ist nun $\varepsilon>0$ beliebig gegeben, so setzen wir $\eta=1$, $\varepsilon_m=\varepsilon/C$ $(m=1,2,\ldots,i)$ und bestimmen demgemäß $k_1, k_2, \ldots, k_i$. Für genügend große n hat man dann $|X_n^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{M+1}$ für $0<k\leqslant k_1$, also nach (3) $|Y_n(y_0)|\leqslant\varepsilon$.

Demnach kann man, ähnlich wie im Beweise des Satzes 1, das Funktional $\Phi(f)$ für $f\in R_{(1)}$ definieren. Wir werden nun zeigen, daß für $R_{(1)}$ eine analoge Bedingung wie für R, aber mit $\Phi(f)$ statt $Y(y_0)$, f statt X und $i-1$ statt i besteht. Es seien positive $\eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}$ gegeben. Wir bestimmen die entsprechenden $k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}$ für R. Es sei nun $f\in R_{(1)}$, $\Phi(f)\neq 0$. Es gibt dann eine Folge $\{Y_n(y)\}$ und eine Zahl $C>0$, derart daß $(X_n(x)=Y_n[U(x)])$

$$X_n\to f,\quad |X_n|\leqslant C,\quad |Y_n(y_0)|>\frac{1}{2}|\Phi(f)|\quad (n=1,2,\ldots)$$

ist. Jetzt setzen wir $\varepsilon_i=|\Phi(f)|/2C$ und bestimmen das entsprechende k_i. Es ist dann $|Y_n(y_0)|\leqslant \max\limits_{m=0,1,\ldots,i}\big[\varepsilon_m \max\limits_{k_m<k\leqslant k_{m+1}}|X_n^{(k)}|\big]$ $(k_{i+1}=\infty)$. Hier ist aber

$$\varepsilon_i \sup_{k_i<k}|X_n^{(k)}|\leqslant\varepsilon_i|X_n|\leqslant\frac{1}{2}|\Phi(f)|<|Y_n(y_0)|\quad (n=1,2,\ldots),$$

mithin

$$|Y_n(y_0)|\leqslant \max_{m=0,1,\ldots,i-1}\Big[\varepsilon_m\cdot \max_{k_m<k\leqslant k_{m+1}}|X_n^{(k)}|\Big]\quad (n=1,2,\ldots).$$

Für $n\to\infty$ ergibt sich daraus

$$|\Phi(f)|\leqslant \max_{m=0,1,\ldots,i-1}\Big[\varepsilon_m \max_{k_m<k\leqslant k_{m+1}}|f^{(k)}|\Big]$$

und man kann hier k_i durch ∞ ersetzen.

Auf Grund dieser Ungleichung kann man ähnlich wie früher das Funktional $\Phi(f)$ wieder auf $R_{(2)}$ erweitern und eine analoge Bedingung mit $i-2$ statt $i-1$ beweisen. So fortfahrend gelangt man bis zu $R_{(i-1)}$ und es ergibt sich ein dort erklärtes additives und homogenes Funktional $\Phi(f)$, das eine Erweiterung des in

$R_{(1)}$ erklärten bildet, von der Beschaffenheit, daß zu beliebigen $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ es ein k_ε gibt, derart daß für jedes $f \in R_{(i-1)}$

$$|\Phi(f)| \leqslant \max\,[(M+\eta) \max_{0<k\leq k_\varepsilon} |f^{(k)}|\,,\ \ \varepsilon |f|]$$

gilt. Dieses Funktional kann man noch einmal auf $R_{(i)}$ erweitern und es erweist sich ähnlich wie im Beweise des Satzes 1, da ja $R_{(i)}$ schwachabgeschlossen ist, als schwachstetig. Darüber hinaus ergibt sich durch eine der oben durchgeführten analoge Überlegung, daß für $f \in R_{(i)}$ und beliebiges $\eta > 0$ $|\Phi(f)| \leqslant (M+\eta)|f|$ ist. Man kann hier für $f \neq 0$ das Gleichheitszeichen ausschließen, da η beliebig war.

Es sei nun $\bar{R}$ die Menge der Funktionale $f \in R_{(i)}$, für welche $\Phi(f) = 0$ gilt und $f_0 \in R_i$ derart, daß $\Phi(f_0) = 1$. (Ein solches f_0 gibt es, wenn nur $y_0 \neq 0$, was wir annehmen dürfen). $\bar{R}$ ist schwachabgeschlossen und man hat für $f \in \bar{R}$ und beliebiges $\eta > 0$

$$1 = |\Phi(f - f_0)| < (M+\eta)|f - f_0|\,.$$

Nach einem Satze des Herrn S. Banach[14]) gibt es dann ein Element x_0 mit $|x_0| < M+\eta$, derart daß $f_0(x_0) = 1$, $f(x_0) = 0$ für $f \in \bar{R}$. Daraus folgt leicht, daß $\Phi(f) = f(x_0)$ für $f \in R_{(i)}$ ist, da jedes $f \in R_{(i)}$ sich eindeutig in der Form $f = \alpha f_0 + g$ darstellen läßt, wo α eine Zahl ist und $g \in \bar{R}$. Insbesondere für $f \in R$, $f = Y[U(x)]$, erhält man $\Phi(f) = Y(y_0) = Y[U(x_0)]$ und, da $Y(y)$ beliebig war, $y_0 = U(x_0)$, w. z. b. w.

3. Wir gehen jetzt zum allgemeinen Fall über und machen keine Voraussetzungen über die Menge R. Wir haben dann den

Satz 3. *Besitzt die Gleichung* (1) *eine Lösung* x_0 *mit* $|x_0| \leqslant M$, *so gibt es für jedes* $\eta > 0$ *und jede Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, *eine Folge* $\{k_n\}$, *so daß für jedes* $Y(y)$

$$(4)\quad |Y(y_0)| \leqslant \sup_{m=0,1,2,\ldots} [\varepsilon_m \max_{k_m<k\leq k_{m+1}} |X^{(k)}|]\ (k_0 = 0,\ \varepsilon_0 = M+\eta,\ X(x) = Y[U(x)])$$

gilt; dabei ist k_m *nur von* η, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ *abhängig* $(m = 1, 2, \ldots)$. *Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt für irgend eine Folge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $0 < \varepsilon_n \leqslant M$, $\varepsilon_n \to 0$ *und beliebiges* $\eta > 0$, *so gibt es für jedes* $\eta > 0$ *eine Lösung* x_0 *von* (1) *mit* $|x_0| < M + \eta$.

[14]) Opérations, p. 125, th. 6.

Der Beweis ist dem des Satzes 2 völlig analog; man muß nur bei dem Beweis der Notwendigkeit das dort angezeigte Verfahren unendlich viele Male wiederholen. Man beweist sodann leicht die Ungleichung (4). Der Beweis der Hinlänglichkeit ist noch leichter, denn aus (4) folgt sofort eine analoge Ungleichung für $R_{(1)}$

$$|\Phi(f)| \leqslant \sup_{m=0,1,\ldots} [\varepsilon_m \max_{k_m<k\leq k_{m+1}} |f^{(k)}|]$$

und diese überträgt sich für jede Ordnungszahl α auf $R_{(\alpha)}$ und gilt daher in der kleinsten schwachabgeschlossenen Hülle von R.

Bemerkung. In den Anwendungen wird sich manchmal die folgende, derjenigen des Satzes 3 äquivalente, Bedingung als mehr brauchbar erweisen:

Besitzt die Gleichung (1) *eine Lösung, so gibt es für jedes* $\varepsilon > 0$ *und jede Zahlenfolge* $\{A_n\}$, $A_n > 0$, *eine Zahl* $\delta > 0$ *und eine Folge* $\{l_i\}$, *derart daß für jedes* $Y(y)$ *die Beziehungen*

$$X(x) = Y[U(x)],\quad |X^{(k)}| \leqslant \delta \text{ für } 0 < k \leqslant l_1,$$
$$|X^{(k)}| \leqslant A_i \text{ für } l_i < k \leqslant l_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

die Ungleichung $|Y(y_0)| < \varepsilon$ *zur Folge haben;* δ *ist dabei nur von* ε *und* l_i *nur von* ε, $A_1, A_2, \ldots, A_i$ *abhängig* $(i = 1, 2, \ldots)$. *Ist umgekehrt diese Bedingung für irgend ein* $\varepsilon > 0$ *und irgend eine Folge* $\{A_n\}$ *mit* $A_n > 0$, $A_n \to \infty$ *erfüllt, so ist die Gleichung* (1) *lösbar. (In analoger Weise läßt sich auch Satz* 2 *formulieren; nur muß beidesmal verlangt werden, daß die* A_i *beliebig sein sollen).*

Beweis. Notwendigkeit. Wir wählen $\eta = 1$, $\varepsilon_i = \varepsilon / A_i$, und bestimmen $k_1, k_2, \ldots$. Offenbar kann man dann $l_i = k_i$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M+\eta}$ setzen.

Hinlänglichkeit. Wir bestimmen zu ε und $\{A_n\}$ das entsprechende $\delta = \delta(\varepsilon)$ und $\{l_i\}$, und setzen $M = \varepsilon / \delta(\varepsilon)$. Es sei nun $\eta > 0$ beliebig gegeben. Wir setzen $\varepsilon_i = \varepsilon / A_i$ und $k_i = l_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Es ist dann $\varepsilon_i \to 0$ und für jedes $Y(y)$ gilt

$$|Y(y_0)| \leqslant \sup_{m=0,1,\ldots} [\varepsilon_m \max_{k_m<k\leq k_{m+1}} |X^{(k)}|]\ (k_0 = 0,\ \varepsilon_0 = M+\eta,\ X(x) = Y[U(x)]).$$

Denn ist für ein $Y(y)$

$$|Y(y_0)| > \sup_{m=0,1,\ldots} [\varepsilon_m \max_{k_m<k\leq k_{m+1}} |X^{(k)}|],$$

so darf man wegen der Homogenität beider Seiten in $Y(y)$ $Y(y_0)=\varepsilon$ annehmen und es ergibt sich dann

$$|X^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{M+\eta}<\frac{\varepsilon}{M}=\delta(\varepsilon) \text{ für } 0<k\leqslant l_1, \quad |X^{(k)}|<\frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}=A_m \text{ für } l_m<k\leqslant l_{m+1}.$$

Es sollte also $|Y(y_0)|<\varepsilon$ sein, entgegen der Annahme.

§ 3.

Wir wollen nun einige Anwendungen unserer Sätze mitteilen [15]).

1. Fourierreihen.

Satz 4. *Damit* $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$ *eine Fourierreihe sei, ist hinreichend, daß die Reihe*

$$\lambda_0 a_0+\lambda_1 a_1+\mu_1 b_1+\ldots+\lambda_n a_n+\mu_n b_n+\ldots$$

inbezug auf alle endliche Folgen $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, *die der Ungleichung*

$$|\lambda_0+\lambda_1\cos t+\mu_1\sin t+\ldots+\lambda_n\cos nt+\mu_n\sin nt+\ldots|\leqslant 1$$

für $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ *genügen, gleichmäßig konvergiere.*

(Eine ähnliche Bedingung gilt für den Fall der Fourierreihe einer stetigen Funktion).

Beweis. Wir betrachten das System der Gleichungen

$$\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\,dt=a_n, \quad \int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\,dt=b_n \quad (n=0,1,\ldots),$$

wo die a_n, b_n gegeben sind und die unbekannte Funktion $x(t)$ in $(0,2\pi)$ integrierbar sein soll. Ordnen wir jedem $x=x(t)$ die Folge $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ zu, wo

$$\alpha_n=\int_0^{2\pi}x(t)\cos nt\,dt, \quad \beta_n=\int_0^{2\pi}x(t)\sin nt\,dt \quad (n=0,1,\ldots)$$

und setzen $y=\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n, \ldots\}$, so bekommen wir offenbar eine lineare Operation $y=U(x)$, die den Raum L auf einen Teil des Raumes (s) abbildet. Der Raum (s) ist vom Typus (B_0) [16]) und jedes lineare Funktional $Y(y)$ in (s) ist von der Form

$$Y(y)=\lambda_0\alpha_0+\lambda_1\alpha_1+\mu_1\beta_1+\ldots+\lambda_n\alpha_n+\mu_n\beta_n.$$

Die Menge R besteht aus den Funktionalen von der Form

$$X(x)=Y[U(x)]=\int_0^{2\pi}x(t)\,[\lambda_0+\lambda_1\cos t+\mu_1\sin t+\ldots+\lambda_n\cos nt+\mu_n\sin t]\,dt. \tag{5}$$

Wir bemerken nun, daß $R_{(1)}$ mit dem Raum aller linearen Funktionale in L identisch ist. Denn ist $f(x)=\int_0^{2\pi}x(t)\,g(t)\,dt$ ein beliebiges lineares Funktional in L, also $g(t)$ meßbar und beschränkt in $(0,2\pi)$, so sei $\sigma_n(t)$ das n-te zu $g(t)$ gehörige Fejérsche Polynom. Es ist dann $|\sigma_n(t)|\leqslant K$, wo $K>0$ von n und t unabhängig ist, und $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(t)=g(t)$ fast überall [17]), mithin

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}x(t)\,\sigma_n(t)\,dt=\int_0^{2\pi}x(t)\,g(t)\,dt \text{ für jedes } x\in L.$$

Setzen wir noch $y_0=(a_0, a_1, b_1, \ldots)$, $y_n=(a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, 0, 0, \ldots)$, so sind die Voraussetzungen des Korollars zu Satz 1 erfüllt und wir erhalten den Satz 4 indem wir bemerken, daß die Norm des Funktionals (5)

$$|X|=\max_{0\leq t\leq 2\pi}|\lambda_0+\lambda_1\cos t+\mu_1\sin t+\ldots+\lambda_n\cos nt+\mu_n\sin nt|$$

ist.

2. Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Es sei das System

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k=b_i \quad (i=1,2,\ldots). \tag{6}$$

vorgelegt, wobei

[15]) Vgl. zu diesem § Opérations, p. 65—67.

[16]) Loc. cit. [3]).

[17]) A. Zygmund, Trigonometrical series (Monografje matematyczne, Warszawa-Lwów 1935), p. 46, 3.22 und p. 49, 3.31.

$$a_{ik} = 0 \text{ für } k < i, \quad a_{ii} \neq 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty$$

angenommen wird. Wir setzen ferner voraus, daß es für jedes l eine Folge von linearen Kombinationen der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{\mu_1^{(n)} a_{1k} + \mu_2^{(n)} a_{2k} + \ldots + \mu_{m_n}^{(n)} a_{m_n k}\}$$

gibt, derart daß $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_1^{(n)} a_{1k} + \ldots + \mu_{m_n}^{(n)} a_{m_n k}|$ unter einer von n und l unabhängigen Schranke bleibt und daß

$$\lim_{n \to \infty} (\mu_1^{(n)} a_{1k} + \ldots + \mu_{m_n}^{(n)} a_{m_n k}) = 0 \text{ für } k \neq l, \; = 1 \text{ für } k = l$$

ist. Es gilt dann der

Satz 5. *Ist die Reihe $\sum \lambda_n b_n$ inbezug auf alle endliche Folgen $\{\lambda_n\}$, die der Ungleichung $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots| \leqslant 1$ genügen, gleichmäßig konvergent, so besitzt das System* (6) *eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\xi_k \to 0$.*

Beweis. Setzen wir für eine beliebige Folge $\{\xi_k\}$ mit $\xi_k \to 0$

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad x = \{\xi_k\}, \quad y = \{\eta_i\},$$

so bekommen wir eine lineare Operation $y = U(x)$, die den Raum (c_0) auf einen Teil des Raumes (s) abbildet. Ist $Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \eta_n$ ein beliebiges lineares Funktional in (s), so wird

$$X(x) = Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_n a_{nk}) \xi_k \tag{7}$$

und die Menge dieser Funktionale bildet den Raum R. $R_{(1)}$ ist wieder mit dem Raum aller linearen Funktionale in (c_0) identisch. Dies folgt aus unserer Voraussetzung nach dem unter [7]) zitierten Satze des Herrn S. Banach oder auch leicht direkt. Setzt man nun $y_0 = \{b_i\}$, $y_n = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots\}$ und bemerkt, daß für y_n das System (6) eine Lösung besitzt, so ergibt sich, da die Norm des Funktionals (7) $|X| = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_1 a_{1k} + \ldots + \lambda_n a_{nk}|$ ist, der Satz aus dem Korollar zu Satz 1.

Es sei nun das System

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

vorgelegt, wobei $a_{ik} = 0$ für $k < i$, $a_{ii} \neq 0$ und die Folgen $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$ als beschränkt angenommen sind. Ist m fest, so gibt es für jedes k Zahlen $c_1^{m,k}, c_2^{m,k}, \ldots, c_m^{m,k}$ derart, daß

$$a_{ik} = \sum_{n=1}^{m} c_n^{m,k} a_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Wir setzen nun voraus, daß es eine Konstante $B > 0$ gibt, so daß

$$\sum_{n=1}^{m} |c_n^{m,k}| \leqslant B \qquad (m, k = 1, 2, \ldots)$$

ist. Es gilt dann der

Satz 6. *Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, derart daß die Beziehungen $n \geqslant m > n_0$, $|\lambda_m a_{mk} + \lambda_{m+1} a_{m+1,k} + \ldots + \lambda_n a_{nk}| \leqslant 1$ $(k = m, m+1, \ldots, n)$ die Ungleichung $|\lambda_m b_m + \lambda_{m+1} b_{m+1} + \ldots + \lambda_n b_n| < \varepsilon$ zur Folge haben, so besitzt das System* (8) *eine Lösung $\{\xi_k\}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty$.*

Beweis. Setzt man für eine beliebige Folge $\{\xi_k\}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty, \quad x = \{\xi_k\}, \quad \eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad y = \{\eta_i\},$$

so bekommt man eine lineare Operation $y = U(x)$, die den Raum (l) auf einen Teil des Raumes (s) abbildet. Ist

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \ldots + \lambda_n \eta_n,$$

so wird

$$X(x) = Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_{1k} + \ldots + \lambda_n a_{nk}) \xi_k,$$

$$X^{(k)}(x) = \sum_{m=1}^{k} (\lambda_1 a_{1m} + \ldots + \lambda_n a_{nm}) \xi_m,$$

$$|X^{(k)}| = \max_{1 \leq m \leq k} |\lambda_1 a_{1m} + \ldots + \lambda_n a_{nm}|.$$

Bezeichnet man noch die Folge $\{b_i\}$ mit y_0, so ist unseres System (8) mit der Gleichung $y_0 = U(x)$ äquivalent. Wir wollen nun auf diese Gleichung die Bemerkung zu Satz 3 anwenden.

Wir bemerken zu dem Zweck zunächst, daß es eine Zahl $M>0$ gibt, so daß für beliebige $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$(9)\qquad |\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\dots+\lambda_n b_n| \leqslant M \max_{1\leq k\leq n} |\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_n a_{nk}|$$

ist. Nach der Voraussetzung gibt es nämlich ein n_0 derart, daß $|\lambda_{n_0+1}b_{n_0+1}+\dots+\lambda_n b_n|\leqslant 1$ wird, sobald die Ungleichungen

$$n>n_0, \quad |\lambda_{n_0+1}a_{n_0+1,k}+\dots+\lambda_n a_{nk}|\leqslant 1 \quad (k=n_0+1,\dots,n)$$

bestehen. Es gibt ferner offenbar eine Zahl $M'>0$, so daß die Ungleichungen $|\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_{n_0}a_{n_0k}|\leqslant 1$ $(k=1,2,\dots,n_0)$ die Ungleichung $|\lambda_i|\leqslant M'$ $(i=1,2,\dots,n_0)$ zur Folge haben. Ist nun

$$n>n_0, \quad |\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_n a_{nk}|\leqslant 1 \quad (k=1,2,\dots,n),$$

so folgt daraus zunächst

$$|\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_{n_0}a_{n_0k}|\leqslant 1 \qquad (k=1,2,\dots,n_0),$$

dann für $n_0+1\leqslant k\leqslant n$

$$\begin{aligned}|\lambda_{n_0+1}a_{n_0+1,k}+\dots+\lambda_n a_{nk}| &\leqslant |\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_n a_{nk}| \\ &\quad + |\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_{n_0}a_{n_0k}| \\ &\leqslant 1+\Big|\sum_{l=1}^{n_0} c_l^{n_0,k}(\lambda_1 a_{1l}+\lambda_2 a_{2l}+\dots+\lambda_{n_0}a_{n_0 l})\Big| \\ &\leqslant 1+\sum_{l=1}^{n_0}|c_l^{n_0,k}|\leqslant 1+B.\end{aligned}$$

Demnach hat man

$$\begin{aligned}|\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_n b_n| &\leqslant |\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_{n_0}b_{n_0}|+|\lambda_{n_0+1}b_{n_0+1}+\dots+\lambda_n b_n| \\ &\leqslant M'(|b_1|+\dots+|b_{n_0}|)+1+B=M.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich leicht (9) wegen der Homogenität beider Seiten in $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Es seien nun positive $\varepsilon, A_1, A_2,\dots,A_n,\dots$ gegeben. Man darf annehmen, daß $\varepsilon<2MA_1$, $A_1<A_2<\dots$ ist. Wir setzen

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2M}, \quad \varepsilon_i=\frac{\varepsilon}{2^{i+1}(A_i+BA_{i-1})} \quad (i=1,2,\dots;\ A_0=\delta)$$

und bestimmen k_i, $k_i<k_{i+1}$, so daß für $n\geqslant m>k_i$ und beliebige $\lambda_m,\lambda_{m+1},\dots,\lambda_n$, die den Ungleichungen

$$|\lambda_m a_{mk}+\dots+\lambda_n a_{nk}|\leqslant 1 \quad (k=m,m+1,\dots,n)$$

genügen,

$$|\lambda_m b_m+\lambda_{m+1}b_{m+1}+\dots+\lambda_n b_n|<\varepsilon_i$$

sei.

Es sei nun

$$(10)\qquad \begin{aligned}&|\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_n a_{nk}|\leqslant\delta \quad \text{für } 0<k\leqslant k_1,\\ &|\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_n a_{nk}|\leqslant A_i \quad \text{für } k_i<k\leqslant k_{i+1}.\end{aligned}$$

Wir bestimmen zuerst i_0 so, daß $k_{i_0}<n\leqslant k_{i_0+1}$ sein soll. Aus (10) folgt für $0<k\leqslant k_1$

$$(11)\qquad |\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_{k_1}a_{k_1k}|\leqslant\delta,$$

also für $k>k_1$

$$|\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_{k_1}a_{k_1k}|=\Big|\sum_{l=1}^{k_1}c_l^{k_1k}(\lambda_1 a_{1l}+\dots+\lambda_{k_1}a_{k_1})\Big|\leqslant B\delta;$$

mithin ist für $k_1<k\leqslant k_2$

$$\begin{aligned}|\lambda_{k_1+1}a_{k_1+1,k}+\dots+\lambda_{k_2}a_{k_2k}| &= |\lambda_{k_1+1}a_{k_1+1,k}+\dots+\lambda_n a_{nk}| \\ &\leqslant |\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_n a_{nk}|+|\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_{k_1}a_{k_1k}|\leqslant A_1+B\delta.\end{aligned}$$

In analoger Weise zeigt man, daß für $k_2<k\leqslant k_3$ die Ungleichung

$$|\lambda_{k_2+1}a_{k_2+1,k}+\dots+\lambda_{k_3}a_{k_3k}|\leqslant A_2+BA_1$$

gilt, indem man bemerkt, daß für $k\leqslant k_2$ $|\lambda_1 a_{1k}+\dots+\lambda_{k_2}a_{k_2k}|\leqslant A_1$ ist, u. s. w. Es ist demnach

$$\begin{aligned}|\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_n b_n| &\leqslant |\lambda_1 b_1+\dots+\lambda_{k_1}b_{k_1}|+|\lambda_{k_1+1}b_{k_1+1}+\dots+\lambda_{k_2}b_{k_2}| \\ &\quad +\dots+|\lambda_{k_{i_0}+1}b_{k_{i_0}+1}+\dots+\lambda_n b_n|\leqslant M\delta+\varepsilon_1(A_1+B\delta)+\dots \\ &\quad +\varepsilon_{i_0}(A_{i_0}+BA_{i_0-1})=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\dots+\frac{\varepsilon}{2^{i_0+1}}<\varepsilon, \text{ w. z. b. w.}\end{aligned}$$

(Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1938).