Sur les séries orthogonales

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

Ce Mémoire contient quatre chapitres ayant pour objet des problèmes différents. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\{\varphi_\nu(t)\}$ un système orthogonal et normé dans l'intervalle (0,1). Pour simplifier les énoncés nous allons introduire quelques notations.

On dit que le système $\{\varphi_\nu(t)\}$ jouit de la proprieté (c) si la convergence presque partout de la série

$$(0.1) \qquad \sum_\nu{}' a_\nu \varphi_\nu(t) \quad ^{1)}$$

entraîne

$$(0.2) \qquad a_\nu = o(1).$$

En remplaçant dans cette définition la convergence de la série (0.1) par sa convergence absolue p. p. et la condition (0.2) par

$$(0.3) \qquad \sum_\nu |a_\nu| < \infty,$$

on obtient la définition de la propriété (d).

Ces notations sont dues à M. W. Orlicz [2]).

Lorsque la condition

---

[1]) Le signe $\sum_\nu{}'$ désigne $\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'$.

[2]) W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Ac. Pol. (1927) p. 81—115; comparer aussi: S. Kaczmarz et H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Monografje Matematyczne, Warszawa-Lwów, 1935; spéc. p. 152—154.

$$(0.4) \qquad \sum_{\nu} a_{\nu}^2 < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour la convergence presque partout de la série (0.1), nous dirons que le système $\{\varphi_{\nu}(t)\}$ admet la propriété (H). En y remplaçant la convergence p. p. de la série (0.1) par sa convergence partout et (0.4) par

$$(0.5) \qquad \sum_{\nu} |a_{\nu}| < \infty,$$

nous obtenons la définition d'une propriété que nous appellerons (K).

Si la condition (0.5) est seulement nécessaire pour la convergence partout de la série (0.1), nous dirons que le système $\{\varphi_{\nu}(t)\}$ jouit de la propriété (k).

Enfin, la série (0.1) sera dite de classe m_p $(1 \leqslant p < \infty)$ s'il existe une fonction $f(t) \in L^p$ pour laquelle

$$(0.6) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big| f(t) - \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu} \varphi_{\nu}(t) \Big|^p dt = 0,$$

et de classe m_q' $(q \geqslant 2)$ (respectivement m_c) s'il existe une fonction $f \in L^q$ (respectivement continue) telle que

$$(0.7) \qquad \begin{aligned} a_{\nu} &= \int_0^1 f(t)\, \varphi_{\nu}(t)\, dt \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \\ \int_0^1 f^2 dt &= \sum_{\nu} a_{\nu}^2 . \end{aligned}$$

Le premier Chapitre contient le

Théorème 1. *Les propriétés (c) et (d) sont équivalentes à l'inégalité*

$$(0.8) \qquad \liminf_{\nu\to\infty} \int_0^1 |\varphi_{\nu}(t)|\, dt > 0.$$

Le premier théorème du deuxieme Chapitre est le

Théorème 2. *Les fonctions φ_{ν} étant bornées, il existe une suite partielle $\psi_{\nu} = \varphi_{n_{\nu}}$ telle que chaque série*

$$(0.9) \qquad \sum_{\nu} a_{\nu} \psi_{\nu}(t)$$

de classe m_q' $(q \geqslant 2)$ soit aussi de classe m_q et converge presque partout; de plus, en désignant par $S^*(t)$ le maximum des sommes partielles de la série (0.9), *on a*

$$(0.10) \qquad \int_0^1 |S^*(t)|^q dt \leqslant A_q \int_0^1 |f(t)|^q dt \text{ [3]}.$$

Sous les mêmes hypothèses on a le

Théorème 3. *Si la série* (0.9) *est de classe m_q $(q \geqslant 2)$, (les fonctions $\psi_{\nu} = \varphi_{n_{\nu}}$ étant choisies convenablement) la série*

$$\sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} a_{\nu} \psi_{\nu} \qquad (\varepsilon_{\nu} = \pm 1,\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

est de même classe quelle que soit la suite $\{\varepsilon_{\nu}\}$.

En supposant le système uniformément borné, on a le

Théorème 4. *Les fonctions $\varphi_{\nu}(t)$ étant uniformément bornées, on peut choisir la suite partielle $\psi_{\nu} = \varphi_{n_{\nu}}$ de sorte que toute série* (0.9) *de classe m_q' soit aussi de classe m_q pour chaque q fini et qu'on ait (la définition de S^* étant la même qu'auparavant)*

$$(0.11) \qquad \int_0^1 |S^*|^q dt \leqslant A_q \int_0^1 |f|^q dt \leqslant A_q' \Big(\sum_{\nu} a_{\nu}^2\Big)^{q/2}.$$

La première partie de cette proposition est connue, elle est due à M. Banach[4]).

Le dernier théorème du deuxième Chapitre est le

Théorème 5. *Les fonctions $\varphi_{\nu}(t)$ étant continues, on peut choisir la suite partielle $\psi_{\nu} = \varphi_{n_{\nu}}$ de sorte que toute série* (0.9) *de classe m_c' soit uniformément convergente.*

Le Chapitre III contient le

Théorème 6. *Pour que le système $\{\varphi_n(t)\}$ contienne une suite partielle $\psi_{\nu} = \varphi_{n_{\nu}}$ jouissant de la propriété (H), il faut et il suffit que l'on ait*

$$(0.12) \qquad \limsup_{\nu\to\infty} \int_0^1 |\varphi_{\nu}|\, dt > 0.$$

---

[3]) A, A', A_q, A_q' etc. désignent des constantes différentes dans les différents contextes.

[4]) S. Banach, Sur les séries lacunaires, Bull. Acad. Pol. (1933) p. 149—154.

Le théorème fondamental du Chapitre IV est le

Théorème 7. *L'inégalité* (0.12) *étant vérifiée et les fonctions* $\varphi_\nu(t)$ *continues, le système contient une suite partielle* $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ *jouissant de la propriété* (k).

Il est évident que chaque système uniformément borné satisfait à l'inégalité (0.12), d'où le

Théorème 8. *Chaque système* $\{\varphi_\nu\}$ *de fonctions uniformément bornées et continues contient une suite partielle jouissant de la proprieté* (K).

La proposition suivante complète le résultat du théorème 7:

Théorème 9. *Les hypothèses du théorème 7 étant vérifiées, on peut choisir la suite partielle* $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ *de sorte que pour toute suite* $\{a_\nu\}$ *telle que*

$$a_\nu = o(1), \quad \sum_\nu |a_\nu| = \infty$$

et chaque nombre s *il existe un point* x *dans lequel la série* (0.9) *converge vers* s.

En joignant les théorèmes 5 et 7 on obtient le

Théorème 10. *Sous les hypothèses du théorème 7 il existe une suite partielle* $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ *telle que toute série* (0.9) *de classe* m'_c *satisfait à la condition* (0.5).

Chapitre I.

1. Les propriétés (c) et (d) étant équivalentes il suffit de démontrer le théorème 1 pour la propriété (c). La démonstration est basée sur un lemme important dû à R. Paley et M. A. Zygmund [5]).

Lemme 1. *En posant*

$$\int_a^b |f|\,dx \geqslant (b-a)\Delta B, \quad \int_a^b f^2 dx \leqslant (b-a)B^2, \tag{1.1}$$

$$E = \underset{x}{E}\left(\frac{\Delta}{4}B \leqslant |f(x)| \leqslant \frac{4}{\Delta}B\right), \tag{1.2}$$

[5]) R. Paley and A. Zygmund, On some series of functions III, Proc. Cambridge Phil. Soc. (1932) p. 190—205.

on a l'inégalité

$$|E| \geqslant \frac{\Delta^2}{8}(b-a). \tag{1.3}$$

Nous allons reproduire la démonstration. Posons

$$E_1 = \underset{x}{E}(|f(x)| < \lambda B), \quad E_2 = \underset{x}{E}(\lambda B \leqslant |f(x)| \leqslant \mu B),$$
$$E_3 = \underset{x}{E}(|f| > \mu B), \quad (0 < \lambda < \mu).$$

D'après (1.1) on obtient

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3} \geqslant \Delta B(b-a).$$

Or

$$\mu^2 B^2 |E_3| \leqslant \int_{E_3} f^2 dx \leqslant B^2(b-a),$$

d'où

$$|E_3| \leqslant \mu^{-2}(b-a).$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on trouve en vertu de la dernière formule

$$\int_{E_3} |f|\,dx \leqslant B\mu^{-1}(b-a).$$

D'autre part, d'une façon évidente

$$\int_{E_1} |f|\,dx \leqslant \lambda B(b-a),$$

on obtient donc

$$|E_2|\,\mu B \geqslant \int_{E_2} |f|\,dx \geqslant B(\Delta - \lambda - \mu^{-1})(b-a).$$

En y posant $\lambda = \mu^{-1} = \frac{\Delta}{4}$, on arrive à la formule (1.3).

2. L'inégalité (0.8) équivaut à l'existence d'un nombre positif Δ satisfaisant aux inégalités

$$\int_0^1 |\varphi_\nu(t)|\,dt \geqslant \Delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

En appliquant le lemme 1 avec $B=1$ on obtient

$$(1.5)\qquad |E_\nu| = |\underset{x}{E}\left(\frac{\Delta}{4} \leqslant |\varphi_\nu(x)| \leqslant \frac{4}{\Delta}\right)| \geqslant \frac{\Delta^2}{8}.$$

D'autre part, la série (0.1) étant presque partout convergente, il existe un ensemble E, $|E| > 1 - \Delta^2/16$ dans lequel la suite $\{a_\nu \varphi_\nu(t)\}$ tend uniformément vers zéro, donc aussi

$$|a_\nu| \int_E |\varphi_\nu|\, dt \to 0.$$

D'après (1.5) on obtient

$$|a_\nu| \int_E |\varphi_\nu|\, dt \geqslant |a_\nu| \int_{E.E_\nu} |\varphi_\nu|\, dt > |a_\nu| \frac{\Delta^2}{16} \cdot \frac{\Delta}{4}.$$

Il en résulte que $a_\nu \to 0$.

La suffisance de la condition (0.8) se trouve ainsi établie, la nécessité est banale. En effet, si l'hypothèse (0.8) tombe en défaut, on peut choisir la suite $\{n_\nu\}$ de sorte que l'on ait

$$\sum_\nu \int_0^1 |\varphi_{n_\nu}|\, dt < \infty.$$

La série

$$\sum_\nu \varphi_{n_\nu}(t)$$

converge alors presque partout sans que la suite de ses coefficients tende vers zéro.

Remarque. M. Orlicz a bien voulu m'informer que le théorème 1 lui était connu depuis longtemps. Notamment, on peut démontrer ce théorème directement, sans employer le lemme 1, de la manière suivante:

La nécessité de la condition (0.8) étant évidente, il s'agit seulement de démontrer qu'elle est suffisante. Or, l'inégalité de Schwarz donne pour tout ensemble E

$$\int_E |\varphi_n(t)|\, dt \leqslant |E|^{1/2},$$

par conséquent, si l'on choisit l'ensemble E de sorte que la suite $\{a_\nu \varphi_\nu(t)\}$ y tende uniformément vers zéro et que l'on ait

$$\int_E |\varphi_\nu(t)|\, dt \geqslant \Delta/2,$$

on aura $a_\nu \to 0$.

Chapitre II.

1. Nous désignons par $\{\omega_\nu(t)\}$ le système orthogonal de M. Walsh. Les résultats suivants sont dûs à R. Paley [6]).

Lemme 2. *Toute série*

$$(2.1)\qquad \sum_\nu a_\nu \omega_\nu(t)$$

constituant le développement d'une fonction $f \in L^p$ $(p>1)$ est de classe m_p.

Lemme 3. *La série* (2.1) *étant de classe m_p $(p>1)$ et $\{\lambda_\nu\}$ désignant une suite croissante de nombres naturels soumis aux inégalités*

$$\lambda_{\nu+1}/\lambda_\nu \geqslant q > 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

toute série

$$(2.2)\qquad \sum_\nu \varepsilon_\nu \sum_{k=\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}-1} a_k \omega_k(t) \qquad (\varepsilon_\nu = \pm 1),$$

est aussi de classe m_p.

Lemme 4. *Si la série* (2.1) *est de classe m_p $(p>1)$, alors en posant*

$$S^*(\lambda, t) = \sup_\nu \sum_{k=1}^{\lambda_\nu} a_k \omega_k(t), \quad f = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu(t),$$

on a

$$(2.3)\qquad \int_0^1 |S^*(\lambda, t)|^p dt \leqslant A_{p,q} \int_0^1 |f|^p dt.$$

2. Soit

$$(2.4)\qquad \varphi_\nu(t) = \sum_i a_{\nu,i}\, \omega_i(t)\,|, |\varphi_\nu| \leqslant M_\nu.$$

Il est évident que

$$(2.5)\qquad \lim_{\nu\to\infty} a_{\nu,i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte, d'après le lemme 2, qu'on peut choisir deux suites $\{n_\nu\}$ et $\{m_\nu\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

---

[6]) R. Paley, A remarkable system of orthogonal functions, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932) p. 241–279.

$$\psi_\nu = \varphi_{n_\nu} = \sum_{m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} a_{n_\nu, i}\, \omega_i + h_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{2.6}$$

$$\int_0^1 |h_\nu|^\nu dt \leqslant 2^{-\nu^2}, \tag{2.7}$$

$$m_{\nu+1}/m_\nu \geqslant q > 1. \tag{2.8}$$

Quelle que soit la suite $\{a_\nu\}$, $a_\nu = o(1)$, la série

$$\sum_\nu |a_\nu h_\nu|$$

converge presque partout et sa somme h appartient à L^q pour chaque q fini; cela résulte immédiatement de (2.7) en vertu de l'inégalité de Minkowski. Or, si la série (0.9) est de classe m_q' $(q \geqslant 2)$, la série

$$\sum_\nu a_\nu \left(\sum_{i=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} a_{n_\nu, i}\, \omega_i(t) \right)$$

l'est aussi, donc, d'après le lemme 2, cette dernière série est de classe m_q et le théorème 2 résulte du lemme 4. On déduit de même le théorème 3 du lemme 3. Le théorème 4 résulte du théorème 2 et du

Lemme 5. *Le système $\{\varphi_\nu\}$ étant uniformément borné, on peut choisir la suite partielle $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ de sorte que l'on ait*

$$\int_0^1 |f|^q dt \leqslant A_q \left(\sum_\nu a_\nu^2 \right)^{q/2},$$

où

$$f = \sum_\nu a_\nu \psi_\nu, \qquad \int_0^1 f^2 dt = \sum_\nu a_\nu^2.$$

Ce théorème est dû à M. Banach; on pourrait l'obtenir en utilisant le système orthogonal de M. Walsh, d'après les résultats de Paley, mais nous n'insisterons pas sur ce point.

3. Supposons les fonctions $\varphi_\nu(t)$ continues et posons

$$\Delta_{p,q} = (p/q,\ p+1/q);$$

il est facile de définir les suites $\{n_\nu\}$ et $\{m_\nu\}$ de façon que l'on ait

$$\max_{x \in \Delta_{i, m_\nu}} \left| \int_{\Delta_{i, m_\nu}} \{\varphi_{n_\mu}(t) - \varphi_{n_\mu}(x)\}\, dt \right| \leqslant 2^{-\nu} m_\nu^{-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, m_\nu;\ \mu = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{2.9}$$

$$\max_i \left| \int_{\Delta_{i, m_\mu}} \varphi_{n_{\nu+1}}(t)\, dt \right| \leqslant 2^{-\nu} m_\nu^{-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots;\ \mu = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{2.10}$$

4. Supposons qu'une série

$$\sum_\nu a_\nu \psi_\nu, \tag{2.11}$$

où les ψ_ν sont les fonctions définies dans le paragraphe précédent, soit de classe m_c'.

Nous allons démontrer qu'elle converge uniformément. En effet, soit

$$x \in \Delta_{i, m_k}.$$

La série (2.11) étant de classe m_c', on a

$$\int_{\Delta_{i, m_k}} f(t)\, dt = \int_{\Delta_{i, m_k}} \sum_{\nu=1}^k a_\nu \psi_\nu(t)\, dt + \sum_{\nu=k+1}^\infty a_\nu \int_{\Delta_{i, m_k}} \psi_\nu(t)\, dt,$$

et cette formule donne, d'après les inégalités (2.9) et (2.10),

$$\left| \int_{\Delta_{i, m_k}} \{f(t) - \sum_{\nu=1}^k a_\nu \psi_\nu(x)\}\, dt \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^k |a_\nu| . 2^{-k} m_k^{-1} + m_k^{-1} \sum_{\nu=k+1}^\infty |a_\nu| . 2^{-k} = o(m_k^{-1})$$

uniformément en x. Cela démontre le théorème 5.

Chapitre III.

1. La démonstration du théorème 6 est longue, elle est basée sur un certain nombre de lemmes dont le plus importants sont les lemmes 6 et 11.

Lemme 6. *Pour chaque nombre $A > 2$ on peut choisir une suite partielle $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ et un ensemble P, de sorte que l'on ait*

$$|P| > 1 - 2A^{-1} \tag{3.1}$$

et, pour chaque couple de points $a, b \in P$,

$$\limsup_{\nu \to \infty} \int_a^b |\varphi_\nu|^2 dt \leqslant A(b-a). \tag{3.2}$$

Démonstration. Désignons par M_1 l'ensemble des segments Δ pour lesquels

(3.3) $$\limsup_{\nu\to\infty}\int_{\Delta}\varphi_\nu^2 dt \geqslant A|\Delta|.$$

Supposons l'ensemble M_1 non vide et choisissons un segment Δ_1 quelconque de l'ensemble M_1 tel que

(3.4) $$|\Delta_1| > {}^1/_2 \operatorname*{borne\,sup}_{\Delta\in M_1} |\Delta|.$$

D'après l'inégalité (3.3) on obtient

$$1 \geqslant \limsup_{\nu\to\infty}\int_{\Delta_1}\varphi_\nu^2 dt \geqslant A|\Delta_1|,$$

donc

$$|\Delta_1| \leqslant A^{-1}.$$

Désignons maintenant par Δ_1^* le segment concentrique à Δ_1 de longueur $2|\Delta_1|$. Ce segment satisfait évidemment à l'inégalité

(3.5) $$|\Delta_1^*| > \operatorname*{b.\,sup}_{\Delta\in M_1}|\Delta|.$$

Choisissons la suite $\{\varphi_{n_\nu}\}$ de sorte que l'on ait

(3.6) $$\liminf_{\nu\to\infty}\int_{\Delta_1}\varphi_{n_\nu}^2 dt \geqslant A|\Delta_1|,$$

et désignons cette suite par $\{\varphi_{1,\nu}\}$.

Considérons maintenant l'ensemble M_2 des segments Δ disjoints avec Δ_1^* pour lesquels

$$\limsup_{\nu\to\infty}\int_{\Delta}\varphi_{1,\nu}^2\, dt \geqslant A|\Delta|.$$

En supposant M_2 non vide, nous pouvons choisir un segment Δ_2 et une suite partielle $\{\varphi_{2,\nu}\}$ de la suite $\{\varphi_{1,\nu}\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

(3.7) $$|\Delta_2| > {}^1/_2 \operatorname*{b.\,sup}_{\Delta\in M_2}|\Delta|,$$

(3.8) $$\liminf_{\nu\to\infty}\int_{\Delta_2}\varphi_{2,\nu}^2\, dt \geqslant A|\Delta_2|.$$

On voit facilement que

$$|\Delta_1| + |\Delta_2| \leqslant A^{-1}.$$

Désignons maintenant par Δ_2^* le segment concentrique à Δ_2 de longueur $2|\Delta_2|$. On aura

$$|\Delta_2^*| > \operatorname*{b.\,sup}_{\Delta\in M_2}|\Delta|.$$

En procédant de même nous définirons les ensembles M_3, $M_4, \ldots\ldots, M_k$, les segments $\Delta_3, \Delta_4, \ldots, \Delta_k$ et $\Delta_3^*, \Delta_4^*, \ldots, \Delta_k^*$ et les suites $\{\varphi_{3,\nu}\}, \{\varphi_{4,\nu}\}, \ldots, \{\varphi_{k,\nu}\}$.

Considérons l'ensemble M_{k+1} des segments Δ disjoints avec les segments $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_k^*$, pour lesquels

$$\limsup_{\nu\to\infty}\int_{\Delta}\varphi_{k,\nu}^2\, dt \geqslant A|\Delta|.$$

En supposant cet ensemble non vide nous pouvons choisir un segment Δ_{k+1} et une suite partielle $\{\varphi_{k+1,\nu}\}$ de la suite $\{\varphi_{k,\nu}\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$|\Delta_{k+1}| > {}^1/_2 \operatorname*{b.\,sup}_{\Delta\in M_{k+1}}|\Delta|,$$

$$\liminf_{\nu\to\infty}\int_{\Delta_{k+1}}\varphi_{k+1,\nu}^2\, dt \geqslant A|\Delta_{k+1}|.$$

Deux cas sont à distinguer: ou bien un des ensembles M_ν et vide, ou bien tous les ensembles M_ν sont non vides.

Dans le premier cas nous poserons

$$\psi_\nu = \varphi_{k,\nu}, \quad P = (0,1) - \sum_1^k \Delta_\nu^*,$$

où k désigne le plus petit indice pour lequel l'ensemble M_{k+1} est vide. On a d'une façon évidente

$$\left|\sum_1^k \Delta_\nu^*\right| \leqslant 2\sum_1^k |\Delta_\nu| \leqslant 2A^{-1},$$

et la condition (3.1) se trouve vérifiée. Pour prouver que l'inégalité (3.2) est aussi satisfaite, supposons que $a, b \in P$ et que l'on ait

$$\limsup_{\nu\to\infty}\int_a^b \psi_\nu^2\, dt \geqslant A(b-a).$$

Cette hypothèse entraîne nécessairement (comme M_{k+1} est vide) que l'intervalle (a, b) admet des points intérieurs communs avec un des segments $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_k^*$.

Supposons que Δ_n^* soit le premier de ces segments pour lequel $|(a, b)\Delta_n^*| > 0$. Aucun des points intérieurs de Δ_n^* n'appartenant à P, il s'ensuit que l'intervalle (a, b) contient le segment Δ_n^* tout entier, ce qui donne

$$b - a \geqslant |\Delta_n^*| > \underset{\Delta \in M_n}{\text{b. sup}} |\Delta|. \tag{3.9}$$

D'autre part, l'intervalle (a, b) étant disjoint avec les segments $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_{n-1}^*$, on a, d'après la supposition faite, $(a, b) \in M_n$, c'est-à-dire

$$b - a \leqslant \underset{\Delta \in M_n}{\text{b. sup}} |\Delta|,$$

mais cela contredit l'inégalité (3.9).

Si aucun des ensembles M_ν n'est vide, nous poserons

$$\psi_\nu = \varphi_{\nu,\nu}, \quad P = (0,1) - \sum_\nu \Delta_\nu^*.$$

On a pour chaque n

$$1 \geqslant \limsup_{m \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Delta_\nu} \psi_m^2 \, dt \geqslant A \sum_1^n |\Delta_\nu|,$$

donc

$$\sum_1^n |\Delta_\nu| \leqslant A^{-1}.$$

En y posant $n = \infty$ on obtient

$$\sum_\nu |\Delta_\nu| \leqslant A^{-1},$$

donc aussi

$$\Big|\sum_\nu \Delta_\nu^*\Big| \leqslant \sum_\nu |\Delta_\nu^*| \leqslant 2 \sum_\nu |\Delta_\nu| \leqslant 2A^{-1},$$

et la condition (3.1) se trouve encore vérifiée. Il nous reste à démontrer pour chaque couple de nombres $a, b \in P$ l'inégalité

$$\limsup_{\nu \to \infty} \int_a^b \psi_\nu^2 \, dt \leqslant A(b - a).$$

Supposons l'inégalité contraire. Dans ce cas il est aisé de voir que l'intervalle (a, b) contient des points intérieurs d'un des segments Δ_ν^*. Supposons que Δ_n^* soit le premier pour lequel on ait $|\Delta_n^*(a, b)| > 0$, a, b appartenant à P; il en résulte $(a, b) \supset \Delta_n^*$, c'est-à-dire $|\Delta_n^*| \leqslant b - a$. D'autre part $(a, b) \in M_n$, donc

$$b - a \leqslant \sup_{\Delta \in M_k} |\Delta|,$$

contrairement à l'inégalité précédente.

Le lemme est donc entièrement établi.

2. Lemme 7. *Soit*

$$\int_0^1 |\varphi_\nu| \, dt \geqslant 2\omega > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Il existe alors une suite partielle $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ et un ensemble P de mesure positive tel que, pour chaque couple a, b de nombres appartenant à P, on ait

$$\liminf_{\nu \to \infty} \int_a^b |\psi_\nu| \, dt \geqslant \omega(b - a). \tag{3.10}$$

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme précédent. Désignons par M_1 l'ensemble des segments Δ pour lesquels

$$\liminf_{\nu \to \infty} \int_\Delta |\varphi_\nu| \, dt \leqslant \omega |\Delta|. \tag{3.11}$$

Choisissons ensuite (en supposant M_1 non vide) un segment Δ_1 et une suite $\varphi_{1,\nu} = \varphi_{n_\nu}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$(1 + \varepsilon)|\Delta_1| > \underset{\Delta \in M_1}{\text{b. sup}} |\Delta|,$$

$$\limsup \int_\Delta |\varphi_{1,\nu}| \, dt \leqslant \omega |\Delta|,$$

où ε désigne un nombre positif que nous préciserons plus loin. Désignons encore par Δ_1^* le segment concentrique à Δ_1 de longueur $(1 + \varepsilon)|\Delta_1|$.

Supposons $M_1, M_2, \ldots, M_n, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Delta_1^*, \Delta_2^*, \ldots, \Delta_n^*$ et les suites $\{\varphi_{1,\nu}\}, \{\varphi_{2,\nu}\}, \ldots, \{\varphi_{n,\nu}\}$ définies.

Considérons l'ensemble M_{n+1} des segments Δ disjoints avec les segments $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_n^*$ et satisfaisant à l'inégalité

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_{\Delta} |\varphi_{n,\nu}|\, dt \leqslant \omega\, |\Delta|.$$

En supposant M_{n+1} non vide nous pouvons choisir un segment Δ_{n+1} et une suite partielle $\{\varphi_{n+1,\nu}\}$ de la suite $\{\varphi_{n,\nu}\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$(1+\varepsilon)\,|\Delta_{n+1}| > \underset{\Delta\in M_{n+1}}{\text{b. sup}}\, |\Delta|, \qquad \limsup_{\nu\to\infty} \int_{\Delta_{n+1}} |\varphi_{n+1,\nu}|\, dt \leqslant \omega\, |\Delta_{n+1}|.$$

Nous désignerons par Δ_{n+1}^* le segment concentrique au segment Δ_{n+1} de longueur $(1+\varepsilon)\,|\Delta_{n+1}|$.

Deux cas peuvent se présenter: ou bien il y a seulement un nombre fini d'ensembles M_ν non vides ou bien il en existe un nombre infini.

Nous nous occuperons seulement du deuxième cas, en laissant aux lecteurs le premier.

Posons

$$\psi_\nu = \varphi_{\nu,\nu}; \qquad P = (0,1) - \sum_\nu \Delta_\nu^*.$$

Pour chaque n on a

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} |\psi_\nu|\, dt \leqslant \omega \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k| \leqslant \omega.$$

Il en résulte que

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_{C\sum_{k=1}^{n}\Delta_k} |\psi_\nu|\, dt \geqslant \omega.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz on en obtient

$$\Big|C\sum_{k=1}^{n}\Delta_k\Big| \geqslant \omega^2;$$

en y posant $n=\infty$ on en tire

$$\Big|C\sum_\nu \Delta_\nu\Big| \geqslant \omega^2,$$

c'est-à-dire

$$\Big|\sum_\nu \Delta_\nu\Big| \leqslant 1-\omega^2,$$

donc

$$\Big|\sum_\nu \Delta_\nu^*\Big| \leqslant \sum_\nu |\Delta_\nu^*| = (1+\varepsilon)\sum_\nu |\Delta_\nu| \leqslant (1+\varepsilon)(1-\omega^2).$$

Pour ε suffisamment petit il en résulte que

$$\Big|\sum_\nu \Delta_\nu^*\Big| < 1,$$

ou bien

$$\Big|C\sum_\nu \Delta_\nu^*\Big| > 0.$$

La démonstration de l'inégalité (3.10) est la même que celle de l'inégalité (3.2) du lemme précédent et nous ne croyons pas nécessaire de la reproduire.

3. En joignant les lemmes 6 et 7 on obtient le

Lemme 8. *Sous l'hypothèse* (0.12) *il existe une suite partielle* $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ *et un ensemble* P, $|P| > 0$, *tel que,* a, b *étant des points arbitraires de* P, *on ait*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \int_a^b \psi_\nu^2\, dt \leqslant A^2(b-a), \tag{3.12}$$

$$\liminf_{\nu\to\infty} \int_a^b |\psi_\nu|\, dt \geqslant \omega(b-a), \tag{3.13}$$

où A et ω désignent deux constantes positives.

4. Lemme 9. *Si la série*

$$\sum_\nu a_\nu \psi_\nu$$

est convergente dans un sous-ensemble positif de P *(les fonctions* ψ_ν *et l'ensemble* P *étant les mêmes que dans le lemme 8), la suite* $\{a_\nu\}$ *tend vers zéro.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème 1 et nous allons indiquer seulement son idée directrice. Il existe un ensemble positif contenu dans P dans lequel la suite $\{a_\nu \psi_\nu\}$ tend uniformément vers zéro; en désignant cet ensemble par R on aura

$$|a_\nu| \cdot \int_R |\psi_\nu|\, dt \to 0. \tag{3.14}$$

Nous pouvons aussi admettre que R est contenu dans un intervalle (a, b), $a, b \in P$ et que l'on a

$$|(a,b) \,.\, R| \geqslant \left(1 - \frac{\omega^2}{16\, A^2}\right)(b-a).$$

Posons

$$E_\nu = \underset{x}{E}\{x \in (a,b)\} \quad \left(\frac{\omega}{4} \leqslant |\psi_\nu| \leqslant \frac{4}{\omega} A^2\right).$$

En appliquant le lemme 1 avec $\Delta = \omega/A$ et $B = A$ on démontre l'inégalité

$$|E_\nu| \geqslant (b-a)\, \frac{\omega^2}{8\, A^2}\,.$$

Il suffit maintenant de procéder comme dans la démonstration du théorème 1 pour obtenir

$$\int_R |\psi_\nu|\, dt \geqslant \int_{RE_\nu} |\psi_\nu|\, dt \geqslant (b-a)\, \frac{\omega^2}{16\, A^2} \cdot \frac{\omega}{4} = (b-a)\left(\frac{\omega}{4A}\right)^3 A\,.$$

En comparant ce résultat avec (3.14) on déduit le lemme.

En passant, nous avons obtenu la proposition suivante:

R étant un sous-ensemble positif quelconque de P on a

(3.15) $$\lim_{\nu\to\infty} \inf \int_R |\psi_\nu|\, dt > 0\,.$$

5. Lemme 10. *Il existe une suite de fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_\nu, \ldots$ satisfaisant aux conditions* (3.12), (3.13) *et* (3.15) (*non nécessairement avec les mêmes constantes*), *telles que pour chaque ν l'intervalle* (0,1) *se décompose en un nombre fini de segments dans lesquels la fonction g_ν reste constante, et satisfaisant encore à l'hypothèse suivante:*

Si la série

$$\sum_\nu a_\nu\, \psi_\nu$$

converge presque partout, il en est de même de la série

$$\sum_\nu a_\nu\, g_\nu\,.$$

Pour le prouver il suffit de choisir des fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_\nu, \ldots$ de la forme demandée de sorte que l'on ait

$$\sum_\nu \left\{\int_0^1 (\psi_\nu - g_\nu)^2 dt\right\}^{1/2} < \infty\,.$$

En effet, cette inégalité entraîne (3.12), (3.13) et (3.15); d'autre part, si $a_\nu = o(1)$, on a

$$\sum_\nu \int_0^1 |a_\nu (\psi_\nu - g_\nu)|\, dt < \infty\,.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_\nu |a_\nu (\psi_\nu - g_\nu)|$$

converge presque partout. Remarquons encore que pour chaque fonction $f \in L^2$

(3.16) $$\lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 f g_\nu\, dt = 0\,.$$

6. Nous appellerons les suites $\{\lambda_\nu(t)\}$ et $\{\mu_\nu(t)\}$ équivalentes dans un ensemble E, lorsque la convergence presque partout de la série

$$\sum_\nu a_\nu\, \lambda_\nu(t)\,,$$

où $a_\nu = o(1)$, entraîne presque partout celle de la série

$$\sum_\nu a_\nu\, \mu_\nu(t)\,,$$

et réciproquement.

Lemme 11. *La suite $\{g_\nu\}$ définie dans le paragraphe précédent contient une suite partielle $\{g_{n_\nu}\}$ équivalente dans P à une autre suite $\{h_\nu\}$ jouissant de la propriété suivante: les fonctions*

$$l_{\mu,\nu} = h_\mu h_\nu \qquad (2 \leqslant \mu < \nu)$$

forment un système orthogonal et normé dans P.

Démonstration. Soient

$$a = \text{b.inf}\, P, \quad b = \text{b.sup}\, P.$$

Nous pouvons admettre que $a, b \in P$.

Choisissons (cela est possible d'après (3.16)) un n_1 assez grand pour que l'on ait

$$\Big|\int_P g_{n_1}\,dt\Big| \leqslant 2^{-1}|P|,$$

$$\int_a^b g_{n_1}^2\,dt \leqslant 2A^2(b-a).$$

Posons pour $t\in P$

$$h_1(t) = g_{\nu_1} - |P|^{-1}\int_P g_{\nu_1}dt.$$

En tenant compte de la forme de la fonction g_{n_1} on voit qu'il existe un système fini de segments $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{r_1}$ tels que la fonction h_1 soit constante dans chaque ensemble $P\Delta_i$; de plus, la fonction h_1 n'étant définie que dans P, nous pouvons admettre que $|P\Delta_i|>0$ $(1\leqslant i\leqslant r_1)$.

En supposant les fonctions $h_1, h_2, \dots, h_k$ et les segments $\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}$ définis, nous allons définir la fonction h_{k+1} et les segments

$$\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{k+1}} \quad (1\leqslant \nu_i\leqslant r_i;\ i=1,2,\dots,k+1).$$

Considérons un segment arbitraire $\Delta_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\dots,\nu_k}=\Delta$. En appliquant un théorème bien connu de Vitali nous pouvons choisir un système fini de segments disjoints $\Delta^{(i)}=\Delta^{(i)}_{\nu_1,\dots,\nu_k}$, avec des extrémités appartenant à P, et satisfaisant aux inégalités

$$|\Delta^{(i)}P| \geqslant 1/2\,|\Delta^{(i)}|, \tag{3.17}$$

$$|F(\Delta-\textstyle\sum\Delta^{(i)})| \leqslant |\Delta P|^2.\,2^{-(k+1)}, \tag{3.18}$$

$$\max|\Delta^{(i)}P| \leqslant 2^{-(k+1)}|\Delta P|^2. \tag{3.19}$$

Maintenant, nous pouvons choisir un $n_{k+1}>n_k$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$\Big|\int_{P\Delta^{(i)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}} g_{n_{k+1}}dt\Big| \leqslant 2^{-(k+1)}|P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}| \quad (1\leqslant\nu_s\leqslant r_s, s=1,2,\dots,k), \tag{3.20}$$

$$\int_{\Delta^{(i)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}} g^2_{n_{k+1}}dt \leqslant 2A^2|\Delta^{(i)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}| \quad (1\leqslant\nu_s\leqslant r_s,\ s=1,2,\dots,k). \tag{3.21}$$

Désignons par h^*_{k+1} la fonction égale à $g_{n_{k+1}}$ dans les ensembles $P\Delta^{(i)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}$ et s'annulant aux autres points de P. Posons pour

$$t\in P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k} \quad h'_{k+1}=h^*_{k+1}-|P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}|^{-1}\int_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}} h^*_{k+1}dt.$$

En vertu de (3.21) et (3.18) on obtient

$$\int_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}} h'^2_{k+1}dt \leqslant \int_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}} h^{*2}_{k+1}dt$$

$$=\sum\int_{P\Delta^{(i)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}} g^2_{n_{k+1}}dt \leqslant 2A^2\sum|\Delta^{(i)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}| \leqslant 4A^2|P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}|.$$

Considérons la fonction $\Delta_\varepsilon(t)$ égale à $\varepsilon|\Delta^{(2)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}P|$ dans $P\Delta^{(1)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n}$, à $-\varepsilon|\Delta^{(1)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}P|$ dans $P\Delta^{(2)}_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}$ et s'annulant aux autres points de $P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}$. Il est évident que l'intégrale

$$\int_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}} |h'_{k+1}+\Delta_\varepsilon(t)|^2dt$$

ne surpasse pas $4A^2|P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}|$ pour $\varepsilon=0$ et tend vers l'infini avec ε. Il en résulte qu'il existe un ε' pour lequel elle est égale à $4A^2|P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}|$. Nous poserons

$$\Delta_{k+1}(t)=\Delta_{\varepsilon'}(t),\quad t\in P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k},$$
$$h_{k+1}=h'_{k+1}+\Delta_{k+1}.$$

La fonction h_{k+1} étant ainsi définie, il nous reste à définir les segments $\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{k+1}}$. Nous les choisissons de sorte que la fonction h_{k+1} soit constante dans chaque ensemble $P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{k+1}}$, et que l'on ait

$$\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}\supset\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k,i} \quad (1\leqslant i\leqslant r_{k+1}),\quad |P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_{k+1}}|>0,$$

$$|P(\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k}-\sum_{i=1}^{r_{k+1}}\Delta_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_k,i})|=0. \tag{3.22}$$

Les fonctions h_ν ainsi définies jouissent des propriétés suivantes:

a) la fonction h_k est constante dans chaque ensemble

$$P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_p} \qquad (p \geq k),$$

b)
$$\int\limits_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k}} h_p\,dt = 0 \qquad (p > k),$$

c)
$$\int\limits_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k}} h_p^2\,dt = 4A^2\,|P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k}| \qquad (p > k,\ p \geq 2),$$

d)
$$\int\limits_P |h_\nu - g_{n_\nu}|\,dt \leq B\,2^{-\nu/2}.$$

Il suffit de démontrer la propriété d). Considérons un segment $\Delta = \Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_{k-1}}$ quelconque, en désignant par $\Delta^{(i)}$ les segments $\Delta^{(i)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{k-1}}$. On a

$$\int\limits_{P\Delta} |g_{n_k} - h_k^*|\,dt = \int\limits_{P(\Delta-\Sigma\Delta^{(i)})} |g_{n_k}|\,dt \leq 2\,|P(\Delta - \Sigma\Delta^{(i)})|^{1/2}$$ [7]),

donc d'après (3.18)

$$\int\limits_{\Delta P} |g_{n_k} - h_k^*|\,dt \leq |\Delta P|\,.\,2^{-k/2}.$$

En faisant la somme pour tous les Δ on obtient

(3.23)
$$\int\limits_P |g_{n_k} - h_k^*|\,dt \leq 2^{-k/2};$$

d'autre part, d'après (3.20),

(3.24)
$$\int\limits_P |h_k^* - h_k'|\,dt \leq 2^{-k}.$$

Considérons enfin un segment $\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{k-1}}$. On a

$$\int\limits_{P\Delta^{(1)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{k-1}}} \Delta_k^2\,dt + \int\limits_{P\Delta^{(1)}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{k-1}}} \Delta_k^2\,dt \leq 4A^2,$$

[7]) Nous supposons que $\int\limits_0 g_\nu^2\,dt \leq 2$.

d'où, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\int\limits_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{k-1}}} |\Delta_k|\,dt \leq 2A\,|(\Delta^{(1)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{k-1}} + \Delta^{(2)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{k-1}})P|^{1/2}.$$

En tenant compte de l'inégalité (3.19) on en obtient

(3.25)
$$\int\limits_{P\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_{k-1}}} |\Delta_k|\,dt \leq 2A\,.\,2\,|\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{k-1}}P|\,2^{-k/2}.$$

Les formules (3.23), (3.24) et (3.25) donnent l'inégalité d). Il en résulte que les suites $\{h_\nu\}$ et $\{g_{n_\nu}\}$ sont équivalentes dans l'ensemble P.

Posons maintenant

$$l_{\mu,\nu} = h_\mu h_\nu \qquad (2 \leq \mu < \nu).$$

On a

$$\int\limits_P l_{\mu,\nu}^2\,dt = \sum \int\limits_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\mu}} h_\mu^2 h_\nu^2\,dt \qquad (2 \leq \mu < \nu).$$

Or, la fonction h_μ est constante dans chaque ensemble $P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\mu}$; en désignant ses valeurs par $\alpha_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\mu}$ on en obtient, d'après l'égalité c),

$$\int\limits_P l_{\mu,\nu}^2\,dt = \sum 4A^2\,|P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\mu}|\,.\,\alpha^2_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\mu}$$

(3.26)
$$= 4A^2 \int\limits_P g_\mu^2 = 4A^2 \sum \int\limits_{\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_{\mu-1}}} g_\mu^2\,dt$$

$$= 4A^2\,.\,4A^2 \sum |\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_{\mu-1}}P| = (4A^2)^2\,|P|.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int\limits_P l_{\mu,\nu}\, l_{\mu',\nu'}\,dt \qquad (\mu,\nu) \neq (\mu',\nu');$$

deux cas sont possibles: ou bien $\nu \neq \nu'$, ou bien $\nu = \nu'$.

Dans le premier cas nous pouvons admettre que $\nu < \nu'$ et $\mu' < \nu$. On a

$$\int\limits_P l_{\mu,\nu}\, l_{\mu',\nu'}\,dt = \sum \int\limits_{P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_\nu}} h_\mu h_\nu h_{\mu'} h_{\nu'}\,.$$

Or, le produit $h_\mu h_\nu h_{\mu'}$ est constant dans chaque ensemble $P\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_\nu}$; il en résulte d'après b) que chaque terme de la somme dans la dernière égalité s'annule.

Considérons maintenant le cas où $\nu=\nu'$. Supposons que $\mu<\mu'$. On a évidemment

$$\int_P l_{\mu,\nu}\, l_{\mu',\nu'}\, dt = \sum_{P\Delta_{\nu_1,\ldots,\nu_{\mu'}}} \int h_\mu\, h_{\mu'}\, h_\nu^2\, dt\,.$$

Le produit $h_\mu h_{\mu'}$ reste constant dans les ensembles $P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\mu'}}$; en désignant ses valeurs par $\alpha_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\mu'}}$ on obtient d'après c)

$$\int_P l_{\mu,\nu}\, l_{\mu',\nu'}\, dt = 4A^2 \sum \alpha_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\mu'}} |P\Delta_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\mu'}}| = 4A^2 \int_P h_\mu\, h_{\mu'}\, dt = 0\,.$$

Il est évident que la suite

$$\left\{\frac{h_\nu}{2A}\right\} \qquad (\nu \geqslant 2)$$

vérifie les thèses du lemme. En tenant compte de l'inégalité d) on conclut que cette suite vérifie aussi l'inégalité (3.15).

7. Lemme 12. *Si la série*

$$\sum_\nu a_\nu h_\nu$$

converge dans un ensemble de mesure positive contenu dans P (les fonctions h_ν et l'ensemble P étant les mêmes que dans le lemme précédent), on a

$$\sum_\nu a_\nu^2 < \infty\,.$$

En effet, supposons que la dite série converge dans un sous-ensemble positif de P. Nous pouvons alors trouver un ensemble $R\subset P$ dans lequel la convergence est uniforme. On a (la constante M étant choisie convenablement)

$$\begin{aligned} M^2 &\geqslant \int_R \Big(\sum_{\nu=2}^n a_\nu h_\nu\Big)^2 dt \\ &\geqslant \sum_{\nu=1}^n a_\nu^2 \int_R h_\nu^2 - 2\sum_{2\leq\mu<\nu} \Big| a_\mu a_\nu \int_R h_\mu h_\nu\, dt \Big| = A_n - B_n\,. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Supposons que

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2 \to \infty\,.$$

En tenant compte de la formule (3.15) on voit que pour un n assez grand

$$\int_R h_n^2\, dt \geqslant \alpha > 0\,, \text{ donc } A_n > \frac{\alpha}{2}\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2\,. \tag{3.28}$$

D'autre part, en appliquant les inégalités de Schwarz et de Bessel on obtient

$$B_n = o\Big(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^2\Big). \tag{3.29}$$

Les inégalités (3.28) et (3.29) s'opposent à l'inégalité (3.27). Le lemme se trouve ainsi démontré. Le raisonnement de ce paragraphe est bien connu, il est dû à M. Zygmund [8]).

8. Maintenant, nous pouvons démontrer le théorème 6. En effet, d'après les lemmes 8, 9, 10 et 11, nous pouvons choisir une suite $\{\varphi_{n_\nu}\}$ telle que la convergence presque partout de la série

$$\sum_\nu a_\nu \varphi_{n_\nu}$$

entraîne

$$a_\nu = o(1)$$

et par cela la convergence presque partout dans P de la série

$$\sum_\nu a_\nu h_\nu\,,$$

où les fonctions h_ν sont définies dans le lemme 11. Il en résulte, d'après le lemme 12, que

$$\sum_\nu a_\nu^2 < \infty\,.$$

D'autre part, d'après un théorème connu [9]), chaque système orthogonal et normé $\{\varphi_\nu\}$ contient une suite partielle $\{\varphi_{n_\nu}\}$ telle que chaque série

---

[8]) A. Zygmund, On the convergence of lacunary trigonometrical series, Fund. Math. 16 (1930) p. 89—107.

[9]) J. Marcinkiewicz, Sur la convergence des séries orthogonales, Studia Math. 6 (1936) p. 39—45. Ajouté pendant la correction des épreuves (1. 3. 1938): Cette partie du théorème se trouve aussi démontrée dans le travail récent de M. Menchoff, Sur la convergence et la sommation des séries de fonctions orthogonales, Bull. Soc. Math. de France 64 (1936) p. 1—**24**.

$$\sum_\nu a_\nu \varphi_{n_\nu}$$

converge presque partout dès que

$$\sum_\nu a_\nu^2 < \infty.$$

Le théorème est donc entièrement établi.

Chapitre IV.

1. Lemme 13. *Les conditions du théorème 7 étant vérifiées, nous pouvons choisir une suite $\psi_\nu = \varphi_{n_\nu}$ jouissant de la propriété suivante: pour chaque suite $\{\varepsilon_\nu\}$, $\varepsilon_\nu = \pm 1$, il y a un point x tel que*

$$\varepsilon_\nu = \operatorname{sign} \psi_\nu(x), \quad 0 < C \leqslant |\psi_\nu(x)| \leqslant D, \tag{4.1}$$

où C et D désignent deux constantes absolues.

Démonstration. En vertu du lemme 8 nous pouvons supposer que les fonctions φ_ν vérifient dans un ensemble P, $|P| > 0$, les conditions (3.12) et (3.13). Posons

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{16A}\right)^2$$

et choisissons deux points $a, b \in P$ de sorte que

$$|(a,b)P| > (1-\lambda)(b-a). \tag{4.2}$$

Soit n_1 un nombre naturel satisfaisant aux conditions

$$\begin{gathered}\left|\int_a^b \varphi_{n_1} dt\right| \leqslant \frac{1}{4}\,\omega(b-a), \quad \int_a^b |\varphi_{n_1}|\, dt \geqslant \frac{3}{4}\,\omega(b-a), \\ \int_a^b \varphi_{n_1}^2\, dt \leqslant 2A^2(b-a).\end{gathered} \tag{4.3}$$

Posons pour tout ν

$$\begin{gathered} E_\nu^+ = \underset{x}{E}(\varphi_\nu(x) > 0), \quad E_\nu^{-1} = \underset{x}{E}(\varphi_\nu(x) < 0) \\ \bar{E}_\nu^+ = \underset{x}{E}\left(\frac{\omega}{16} < \varphi_\nu(x) < \frac{16A^2}{\omega}\right), \quad \bar{E}_\nu^- = \underset{x}{E}\left(\frac{\omega}{16} < -\varphi_\nu(x) < \frac{16A^2}{\omega}\right). \end{gathered} \tag{4.4}$$

D'après les inégalités (4.3) on conclut facilement que

$$\int_{(a,b)E_{n_1}^+} \varphi_{n_1} dt \geqslant \frac{1}{4}\,\omega(b-a), \quad -\int_{(a,b)E_{n_1}^-} \varphi_{n_1} dt \geqslant \frac{1}{4}\,\omega(b-a).$$

En appliquant le lemme 1 on en tire

$$|(a,b)\bar{E}_{n_1}^+| \geqslant 2\lambda(b-a), \quad |(a,b)\bar{E}_{n_1}^-| \geqslant 2\lambda(b-a).$$

En comparant ces inégalités avec (4.2) on obtient

$$|(a,b)\bar{E}_{n_1}^+ P| > 0, \quad |(a,b)\bar{E}_{n_1}^- P| > 0.$$

Il est maintenant évident qu'on peut choisir deux segments Δ_1 et Δ_{-1} avec les extremités appartenant à P de manière à satisfaire aux inégalités

$$\begin{gathered} |\Delta_1 P| > (1-\lambda)|\Delta_1|, \quad |\Delta_{-1} P| > (1-\lambda)|\Delta_{-1}|, \\ \frac{\omega}{16} < \varphi_{n_1}(x) < \frac{16A^2}{\omega} \quad \text{pour } x \in \Delta_1, \\ \frac{\omega}{16} < -\varphi_{n_1}(x) < \frac{16A^2}{\omega} \quad \text{pour } x \in \Delta_{-1}. \end{gathered}$$

Nous poserons $\psi_1 = \varphi_{n_1}$.

En répétant cet argument on définit une suite $\{\psi_\nu\}$ de fonctions et les segments $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu}$ $(\varepsilon_k = \pm 1,\ \nu = 1, 2 \ldots)$ de sorte que l'on ait

$$\begin{gathered} \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu} \supset \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\nu+1}}, \\ \frac{\omega}{16} < \psi_\nu(x) < \frac{16A^2}{\omega} \quad \text{pour } x \in \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\nu+1}}, \\ \frac{\omega}{16} < -\psi_\nu(x) < \frac{16A^2}{\omega} \quad \text{pour } x \in \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\nu-1}}. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Nous allons démontrer que la suite $\{\psi_\nu\}$ vérifie la thèse du lemme.

En effet, soit $\{\varepsilon_\nu\}$ $(\varepsilon_\nu = \pm 1)$ une suite quelconque. Posons

$$x = \prod_\nu \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu}.$$

Les inégalités (4.5) donnent le lemme avec $C = \omega/16$ et $D = 16A^2/\omega$.

2. Le théorème 7 résulte immédiatement du lemme précédent. Supposons la série

$$\sum_{\nu} a_\nu \psi_\nu(t)$$

partout convergente et posons

$$x = \prod_{\nu} \Delta_{\operatorname{sign} a_1, \operatorname{sign} a_2, \ldots, \operatorname{sign} a_\nu}.$$

En tenant compte des inégalités (4.5) on en conclut que

$$\sum_{\nu} |a_\nu| < \infty.$$

3. Soient $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots$ et $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu}, \ldots$ les fonctions et les segments définis dans le lemme 13. Désignons par $C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu}$ le centre du segment $\Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu}$. En modifiant un peu l'argument du lemme 13 nous pouvons admettre que

$$\max_{x \in \Delta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k}} |\psi_\nu(C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k}) - \psi_\nu(x)| \leqslant 2^{-k}. \tag{4.6}$$

4. Nous allons démontrer le théorème 9 en supposant que les fonctions ψ_ν soient définies dans le lemme 13 de manière à satisfaire (4.6).

Nous nous bornerons au cas où s est fini et positif. Posons $\varepsilon_\nu = \operatorname{sign} a_\nu$. Désignons par λ_1 le premier indice pour lequel

$$d_1 = \sum_{\nu=1}^{\lambda_1} a_\nu \psi_\nu(C_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\lambda_1}}) \geqslant s.$$

Soit encore $\eta_\nu = \varepsilon_\nu$ $(1 \leqslant \nu \leqslant \lambda_1)$.

Les nombres $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \ldots < \lambda_k$ et η_ν $(\eta_\nu = \pm 1, 1 \leqslant \nu \leqslant \lambda_k)$ étant supposés définis, considérons l'expression

$$d_k = \sum_{\nu=1}^{\lambda_k} a_\nu \psi_\nu(C_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\lambda_k}}).$$

Si $d_k \geqslant s$, nous désignerons par λ_{k+1} le premier indice $> \lambda_k$ pour lequel

$$d_k + \sum_{\nu=\lambda_k+1}^{\lambda_{k+1}} a_\nu \psi_\nu(C_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\lambda_k}, -\varepsilon_{\lambda_k+1}, -\varepsilon_{\lambda_k+2}, \ldots, -\varepsilon_{\lambda_{k+1}}}) < s;$$

si, au contraire, $d_k < s$, nous désignerons par λ_{k+1} le premier indice $> \lambda_k$ pour lequel

$$d_k + \sum_{\nu=\lambda_k+1}^{\lambda_{k+1}} a_\nu \psi_\nu(C_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\lambda_k}, \varepsilon_{\lambda_k+1}, \ldots, \varepsilon_{\lambda_{k+1}}}) \geqslant s.$$

Soit

$$\eta_\nu = \pm \varepsilon_\nu \qquad (\lambda_k < \nu \leqslant \lambda_{k+1}),$$

où l'on prend le signe supérieur pour $d_k < s$ et inférieur dans le cas contraire. La suite $\{\eta_\nu\}$ se trouve ainsi entièrement définie.

Posons

$$x = \prod_{\nu} \Delta_{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_\nu}.$$

Nous allons démontrer que la série

$$\sum_{\nu} a_\nu \psi_\nu(x)$$

converge vers s.

Nous prouverons d'abord que $d_k \to s$. En effet, on a tantôt $d_{k-1} \geqslant s$, tantôt l'inégalité opposée. Supposons par exemple que $d_{k-1} \geqslant s$. En tenant compte de la définition des nombres λ_k on obtient

$$d_{k-1} + \sum_{\nu=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k - 1} a_\nu \psi_\nu(C_{\lambda_k}) < s,$$
$$d_{k-1} + \sum_{\nu=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k - 1} a_\nu \psi_\nu(C_{\lambda_k - 1}) \geqslant s \qquad (C_n = C_{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n}).$$

D'autre part, les inégalités (4.6) donnent

$$d_{k-1} = \sum_{\nu=1}^{\lambda_{k-1}} a_\nu \psi_\nu(C_{\lambda_k}) + o(1), \quad \sum_{\nu=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k - 1} a_\nu \psi_\nu(C_{\lambda_k - 1}) = \sum_{\nu=\lambda_{k-1}+1}^{\lambda_k - 1} a_\nu \psi_\nu(C_{\lambda_k}) + o(1),$$

d'où l'on conclut que $d_k \to s$.

D'après (4.6) on a pour $\lambda_k \leqslant n \leqslant \lambda_{k+1}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \psi_\nu(x) - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \psi_\nu(C_n) = o(1),$$
$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \psi_\nu(C_n) = d_k + \sum_{\nu=\lambda_k+1}^{n} a_\nu \psi_\nu(C_n) + o(1).$$

Or, comme

$$\Big|\sum_{\nu=\lambda_k+1}^{n} a_\nu \psi_\nu(C_n)\Big| \leqslant |s - d_k| + \max_{\nu \geq \lambda_k} D\,|a_\nu|,$$

le théorème se trouve démontré.

(Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1936).