STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIX. (1984)

Distribution des valeurs des fonctions analytiques multiformes

par

BERNARD AUPETIT* et ABDELWAHAB ZRAÏBI (Québec)

Abstract. In the first part of this paper we give more easy and more geometrical proofs of results concerning analytic multivalued functions previously obtained in [2] and [9]. In the second part we use these results in order to prove a principle of identity and a generalization of Picard's theorem for analytic multivalued functions.

Dans la première partie de ce travail nous montrons que toute fonction analytique multiforme peut être approximée par des fonctions analytiques multiformes ayant des bonnes sélections (théorème 1.1). A l'aide de cet argument géométrique, nous donnons des démonstrations beaucoup plus simples de résultats obtenus précédemment par B. Aupetit [2] et Z. Słodkowski [9], à l'aide de méthodes assez techniques. En particulier les démonstrations du calcul fonctionnel holomorphe (théorème 1.7) et du théorème de désintégration (théorème 1.8) deviennent particulièrement simples.

Nous appliquons tous ces résultats dans la deuxième partie. En particulier nous prouvons un principe d'identité pour les fonctions analytiques multiformes $\lambda \to K(\lambda)$, où $K(\lambda)$ est de capacité nulle. Ce théorème nous permet de généraliser la caractérisation locale du radical, obtenue dans [4], pour les algèbres de Banach réelles et complexes. Le théorème de Liouville peut aussi être étendu aux fonctions analytiques multiformes (théorème 2.4). Mais le résultat le plus intéressant concerne une généralisation du théorème de Picard (théorème 2.6). Si $\lambda \to f(\lambda)$ est une fonction analytique de C dans l'algèbre des matrices $M_n(C)$ alors $C \setminus \bigcup_{\lambda \in C} \operatorname{Sp} f(\lambda)$ a au plus $2n-1$ points. Ce résultat peut être étendu de la façon suivante: Si $\lambda \to K(\lambda)$ est analytique multiforme sur C, alors $C \setminus \bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda)^\wedge$ est un G_δ de capacité nulle, où $K(\lambda)^\wedge$ dénote l'enveloppe polynomialement convexe de $K(\lambda)$. Ce dernier résultat permet d'améliorer les résultats de [5] sous la forme du corollaire 2.7. Il est aussi en rapport avec certains résultats de M. Tsuji.

* Recherche subventionnée par le Conseil national de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (A 7668) et le Ministère de l'Education de la Province de Québec (subvention FCAC).

1. Quelques résultats sur les fonctions analytiques multiformes. Rappelons qu'une fonction multiforme $\lambda \to K(\lambda)$ définie sur un ouvert D de C à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de C est dite *analytique multiforme* si le complémentaire de son graphe $\Omega = \{(\lambda, z)\colon \lambda \in D,\ z \notin K(\lambda)\}$ est un ouvert pseudoconvexe de C^2.

Parmi les exemples les plus importants de fonctions analytiques multiformes il y a $\lambda \to \operatorname{Sp} f(\lambda)$ où $\operatorname{Sp} f(\lambda)$ dénote le spectre d'une fonction analytique $f(\lambda)$ d'éléments d'une algèbre de Banach et $\lambda \to g(f^{-1}(\lambda))$, où f, g sont deux éléments d'une algèbre uniforme A sur un compact X et où $f^{-1}(\lambda)$ dénote la fibre sur un élément $\lambda \in C \setminus f(X)$, c'est-à-dire $\{\chi \in \mathscr{M}(A)\colon \chi(f) = \lambda\}$ (pour plus de détails voir [2] et [9]).

L'objet de ce paragraphe est de rectifier certains énoncés de [2], d'en donner des démonstrations plus simples à l'aide des fonctions analytiques multiformes ayant des bonnes sélections.

DÉFINITION. On dit qu'une fonction multiforme $\lambda \to K(\lambda)$ définie et semi-continue supérieurement sur un ouvert D de C, à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de C, a des *bonnes sélections*, si quel que soit $\lambda_0 \in D$ et $z_0 \in \partial K(\lambda_0)$, ou bien il existe $r > 0$ et h holomorphe sur $B(\lambda_0, r)$ telle que $h(\lambda_0) = z_0$ et $h(\lambda) \in K(\lambda)$ pour $|\lambda - \lambda_0| < r$, ou bien il existe $s > 0$ et k holomorphe sur $B(z_0, s)$ telle que $k(z_0) = \lambda_0$ et $z \in K(k(z))$ pour $|z - z_0| < s$.

Remarque. Cette définition implique que k n'est pas constante au voisinage de z_0 car autrement z_0 serait intérieur à $K(\lambda_0)$.

Nous donnons plus de détails et quelques améliorations du théorème 3.7 de [2].

THÉORÈME 1.1. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme sur un ouvert D de C. Il existe une famille croissante d'ouverts relativements compacts D_n de D tels que $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$ et des fonctions multiformes $\lambda \to K_n(\lambda)$, respectivement définies sur D_n ayant des bonnes sélections, telles que $K_{n+1}(\lambda) \subset K_n(\lambda)$ pour $\lambda \in D_n$ et $K(\lambda) = \lim K_n(\lambda)$ pour $\lambda \in D$.*

Démonstration. Comme D_n est relativement compact dans D, l'ensemble $C_n = \bigcup_{\lambda \in \bar{D}_n} K(\lambda)$ est compact, donc il existe une suite croissante d'ouverts bornés U_n contenant C_n. Soit $\Omega = \{(\lambda, z)\colon \lambda \in D,\ z \notin K(\lambda)\}$, d'après [11], section 12.10, il existe une fonction φ strictement plurisousharmonique sur Ω, de classe C^∞, telle que les $\Omega_k = \{(\lambda, z)\colon \varphi(\lambda, z) - k < 0\}$ soient relativement compacts et vérifient $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k$. Par récurrence on construit une suite croissante (Ω_{k_n}) telle que $\Omega_{k_n} \supset (D_n \times \partial U_n) \cup (\bar{D}_{n-1} \times (\bar{U}_n \setminus U_{n-1}))$ et on définit $K_n(\lambda)$ sur D_n par $K_n(\lambda) = \{z\colon z \in U_n,\ (\lambda, z) \notin \Omega_{k_n}\}$. D'après K. Oka [7] les fonctions multiformes K_n admettent des bonnes sélections. Le cas où $\operatorname{grad} \varphi(\lambda_0, z_0) \neq 0$ pour $(\lambda_0, z_0) \in \partial\Omega_k$ est assez facile. Si $\operatorname{grad} \varphi(\lambda_0, z_0) = 0$ alors K. Oka montre qu'il y a une sélection holomorphe de la forme $z = z_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0)$. Son raisonnement compliqué a été clarifié et simplifié par A. Zraïbi dans [13]. Le reste de la démonstration se vérifie facilement. ∎

L'important théorème qui suit a été démontré pour la première fois par Z. Słodkowski ([9], Theorem 3.2). Nous en donnons une démonstration à l'aide des bonnes sélections, qui finalement est une généralisation et une simplification du théorème de Yamaguchi [12].

THÉORÈME 1.2. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction multiforme définie et semi-continue supérieurement sur un ouvert D de C, à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de C. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$\lambda \to K(\lambda)$ est une fonction analytique multiforme sur D,*

(ii) *pour tout sous-ensemble ouvert D' de D et pour toute fonction φ plurisousharmonique dans un voisinage du graphe de la restriction de K à D' alors $\lambda \to \psi(\lambda) = \operatorname{Max}_{z \in K(\lambda)} \varphi(\lambda, z)$ est sous-harmonique dans D',*

(iii) *$(\lambda, z) \to -\operatorname{Log} \operatorname{dist}(z, K(\lambda))$ est plurisousharmonique sur Ω.*

Démonstration. Montrons d'abord que (i) implique (ii). Comme un ouvert est pseudoconvexe si et seulement si il est localement pseudoconvexe, $\lambda \to K(\lambda)$ est analytique multiforme sur D si et seulement si elle est analytique multiforme sur tout $D' \subset D$. Ainsi il suffit de montrer que ψ est sous-harmonique sur D. Il est facile de voir que ψ est semi-continue supérieurement. Supposons d'abord que $\lambda \to K(\lambda)$ a des bonnes sélections. Soit Δ un disque fermé inclus dans D et soit p un polynôme tel que $\psi(\lambda) \leqslant \operatorname{Re} p(\lambda)$ sur $\partial\Delta$. Pour montrer que ψ est sous-harmonique il suffit de prouver que l'inégalité précédente est vraie sur tout Δ. Supposons qu'il existe $\lambda \in \Delta$ tel que $\psi(\lambda) > \operatorname{Re} p(\lambda)$ et soit $\lambda_0 \in \Delta$ tel que

$$\psi(\lambda_0) - \operatorname{Re} p(\lambda_0) = \operatorname{Sup}(\psi(\lambda) - \operatorname{Re} p(\lambda)) \qquad \text{pour} \qquad \lambda \in \Delta.$$

Alors

$$E = \{\lambda \in \Delta\colon \psi(\lambda_0) - \operatorname{Re} p(\lambda_0) = \psi(\lambda) - \operatorname{Re} p(\lambda)\}$$

est compact donc on peut supposer que $\operatorname{dist}(E, \partial\Delta) = \operatorname{dist}(\lambda_0, \partial\Delta) = 2\varepsilon$. On a $\psi(\lambda_0) = \varphi(\lambda_0, z_0)$ pour un $z_0 \in \partial K(\lambda_0)$. Comme K a de bonnes sélections, dans le premier cas il existe r tel que $0 < r < \varepsilon$ et h holomorphe pour $|\lambda - \lambda_0| < r$ telle que $h(\lambda_0) = z_0$ et $h(\lambda) \in K(\lambda)$. Alors $u(\lambda) = \varphi(\lambda, h(\lambda)) - \operatorname{Re} p(\lambda) - \psi(\lambda_0) + \operatorname{Re} p(\lambda_0)$ est sous-harmonique pour $|\lambda - \lambda_0| < r$, de plus $u(\lambda_0) = 0$ et $u(\lambda) \leqslant 0$ pour $|\lambda - \lambda_0| < r$. D'après le principe du maximum $u(\lambda) = 0$ pour $|\lambda - \lambda_0| < r$ ce qui est absurde puisque $\operatorname{dist}(\lambda_0, \partial\Delta) = \operatorname{dist}(E, \partial\Delta)$. Dans le second cas il existe $s > 0$ et k holomorphe pour $|z - z_0| < s$ telle que $k(B(z_0, s)) \subset B(\lambda_0, \varepsilon)$, $k(z_0) = \lambda_0$ et $z \in K(k(z))$ pour $|z - z_0| < s$. Alors $v(z) = \varphi(k(z), z) - \operatorname{Re} p(k(z)) - \psi(\lambda_0) + \operatorname{Re} p(\lambda_0)$ est sous-harmonique pour $|z - z_0| < s$ et satisfait $v(z_0) = 0$ et $v(z) \leqslant 0$ pour $|z - z_0| < s$. D'après le principe du maximum $v(z) = 0$ pour $|z - z_0| < s$ ce qui est absurde car $k(B(z_0, s))$ contient un disque $B(\lambda_0, \alpha)$ avec $\alpha > 0$, puisque k est ouverte, donc dans $B(\lambda_0, \alpha)$ il existe un $k(z)$ tel que $v(z) < 0$. Ainsi on a $\psi(\lambda) \leqslant \operatorname{Re} p(\lambda)$ pour $\lambda \in \Delta$, donc ψ est sous-harmonique sur D. Etudions maintenant le cas général. Soit $\lambda_0 \in D$ et soit $r > 0$ tel que $\bar{B}(\lambda_0, r) \subset D$. Montrons que ψ est sous-harmonique sur $\Delta = B(\lambda_0, r)$. Il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$ on ait $\bar{\Delta} \subset D_n$ où les D_n sont définis par le théorème 1.1. Alors $K(\lambda) = \bigcap_{n \geqslant N_1} K_n(\lambda)$, pour $\lambda \in \bar{\Delta}$ et φ est définie au voisinage du graphe de K_n restreint à Δ, pour $n \geqslant N_2$ assez grand. D'après la première partie $\psi_n(\lambda) = \operatorname{Max}\{\varphi(\lambda, z): z \in K_n(\lambda)\}$ est sous-harmonique sur Δ pour $n \geqslant N_2$ et la suite (ψ_n) converge en décroissant vers ψ sur Δ, donc ψ est localement sous-harmonique sur D, donc sous-harmonique sur D.

Montrons maintenant que (ii) implique (iii).

Il faut montrer que

$$(\lambda, z) \to -\operatorname{Log} \operatorname{dist}(z, K(\lambda)) = \operatorname*{Max}_{\xi \in K(\lambda)} \operatorname{Log} \frac{1}{|z-\xi|}$$

est plurisousharmonique sur Ω. Soit $(\lambda_0, z_0) \in \Omega$. Si on se déplace sur la verticale $\{(\lambda_0, z): z \in \boldsymbol{C}\}$ avec $|z - z_0| < \eta$ assez petit, il est clair que la fonction $z \to -\operatorname{Log} \operatorname{dist}(z, K(\lambda_0))$ est sous-harmonique, car $\boldsymbol{C} \setminus K(\lambda_0)$ est pseudoconvexe dans $\boldsymbol{C}$. Si on se déplace sur une droite complexe $\{(\lambda, z_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0)): \lambda \in \boldsymbol{C}\}$ avec $|\lambda - \lambda_0| < \mu$ assez petit alors

$$\psi(\lambda) = -\operatorname{Log} \operatorname{dist}(z_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0), K(\lambda)) = \operatorname*{Max}_{\xi \in K(\lambda)} \operatorname{Log} \frac{1}{|z_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0) - \xi|}.$$

Mais comme $z_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0) \notin K(\lambda)$ pour $|\lambda - \lambda_0| < \mu$ assez petit on a $-\operatorname{Log}|z_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0) - \xi|$ plurisousharmonique au voisinage du graphe de K restreint à $B(\lambda_0, \mu)$ donc, d'après (ii), $\psi(\lambda)$ est sous-harmonique. Le théorème 3.1 de [2] prouve que (iii) implique (i). ■

En utilisant la même méthode on obtient le:

Théorème 1.3. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un ouvert D de $\boldsymbol{C}$ et soit φ une fonction plurisousharmonique dans un voisinage de $G = \{(\lambda, z_1, \ldots, z_n): \lambda \in D,\ z_i \in K(\lambda),\ i = 1, \ldots, n\} \subset \boldsymbol{C}^{n+1}$. Alors $\psi(\lambda) = \operatorname*{Max}_{\substack{z_i \in K(\lambda)\\ i=1,\ldots,n}} \varphi(\lambda, z_1, \ldots, z_n)$ est sous-harmonique dans D.*

Corollaire 1.4. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un ouvert D de $\boldsymbol{C}$ et soit φ une fonction plurisousharmonique au voisinage de $(\bigcup_{\lambda \in D} K(\lambda))^n \subset \boldsymbol{C}^n$ alors*

$$\lambda \to \psi(\lambda) = \operatorname*{Max}_{\substack{z_i \in K(\lambda)\\ i=1,\ldots,n}} \varphi(z_1, \ldots, z_n)$$

est sous-harmonique dans D.

En faisant comme dans [2] on obtient immédiatement:

Corollaire 1.5. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un ouvert D de $\boldsymbol{C}$ alors:*

(i) *$\lambda \to \operatorname{Log} \varrho(K(\lambda))$ est sous-harmonique sur D, où $\varrho(K(\lambda)) = \operatorname{Max}|z|$ pour $z \in K(\lambda)$,*

(ii) *$\lambda \to \operatorname{Log} \delta_n(K(\lambda))$ est sous-harmonique sur D, où $\delta_n(K(\lambda))$ dénote le n-ième diamètre de $K(\lambda)$,*

(iii) *$\lambda \to \operatorname{Log} c(K(\lambda))$ est sous-harmonique sur D, où $c(K(\lambda))$ dénote la capacité de $K(\lambda)$.*

Soit A une algèbre uniforme sur sa frontière de Chilov X et soit $\mathscr{M}(A)$ l'ensemble de ses caractères. Soit W une composante connexe de $\boldsymbol{C} \setminus f(X)$ alors, pour $f, g \in A$ donnés, on sait que

$$\lambda \to g(f^{-1}(\lambda)) = \{\chi(g): \chi \in \mathscr{M}(A),\ \chi(f) = \lambda\}$$

est analytique multiforme sur W (pour plus de détails voir [2]). Cela donne, avec le corollaire 1.5, une autre démonstration du:

Corollaire 1.6 (B. Cole [6]). *Si φ est sous-harmonique au voisinage de $\bigcup_{\lambda \in W} g(f^{-1}(\lambda))$ alors $\lambda \to \psi(\lambda) = \operatorname*{Max}_{z \in g(f^{-1}(\lambda))} \varphi(z)$ est sous-harmonique sur W.*

Le calcul fonctionnel holomorphe pour les fonctions analytiques multiformes et le théorème de désintégration (théorèmes 3.9 et 3.14 de [2]) peuvent être aussi démontrés plus simplement par la méthode géométrique.

Théorème 1.7 (Calcul fonctionnel holomorphe). *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur un ouvert D de $\boldsymbol{C}$ et soit $u(\lambda, z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage du graphe $G = \{(\lambda, z): \lambda \in D, z \in K(\lambda)\} \subset \boldsymbol{C}^2$ de K. Alors $\lambda \to L(\lambda) = \{u(\lambda, z): \lambda \in D, z \in K(\lambda)\}$ est analytique multiforme sur D.*

Démonstration. Il est facile de voir que $\lambda \to L(\lambda)$ est semi-continue supérieurement sur D. Soit D' un ouvert de D et soit φ plurisousharmonique dans $U \supset \{(\lambda, z): \lambda \in D',\ z \in L(\lambda)\}$. Alors $\psi(\lambda) = \operatorname*{Max}_{z \in K(\lambda)} \varphi(\lambda, u(\lambda, z))$. Comme $(\lambda, z) \to (\lambda, u(\lambda, z))$ est holomorphe et que φ est plurisousharmonique alors $(\lambda, z) \to \varphi(\lambda, u(\lambda, z))$ est plurisousharmonique au voisinage du graphe de K restreint à D'. Donc, d'après le théorème 1.2, $\lambda \to L(\lambda)$ est analytique multiforme sur D. ■

Théorème 1.8 (Désintégration des fonctions analytiques multiformes). *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme sur un ouvert D de $\boldsymbol{C}$. Supposons que $\lambda_0 \in D$ et que C est une partie non vide ouverte et fermée de $K(\lambda_0)$. Si U et V sont deux ouverts disjoints tels que $C \subset U$ et $K(\lambda_0) \setminus C \subset V$ il existe $r > 0$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < r$ implique $\lambda \in D$, $K(\lambda) \subset U \cup V$ et $K(\lambda) \cap U \neq \emptyset$. De plus $\lambda \to K(\lambda) \cap U$ est une fonction analytique multiforme sur $B(\lambda_0, r)$.*

Démonstration. Les deux ouverts $D \times U$ et $D \times V$ sont disjoints, donc la fonction φ définie par 1 sur $D \times U$ et 0 sur $D \times V$ est plurisousharmonique. Par la semi-continuité supérieure de K il existe $r>0$ tel que $|\lambda-\lambda_0|<r$ implique $K(\lambda)\subset U\cup V$. Alors $\psi(\lambda)=\operatorname{Max}\{\varphi(\lambda,z)\colon z\in K(\lambda)\}$ est sous-harmonique pour $|\lambda-\lambda_0|<r$. Si $K(\lambda_1)\cap U\neq\emptyset$ pour un λ_1 tel que $|\lambda_1-\lambda_0|<r$ alors $\psi(\lambda_1)=0$, $\psi(\lambda_0)=1$ et $\psi(\lambda)\leqslant 1$ pour $|\lambda-\lambda_0|<r$ ce qui est absurde d'après le principe du maximum. Donc $K(\lambda)\cap U\neq\emptyset$ pour $|\lambda-\lambda_0|<r$. Pour montrer que $\lambda\to L(\lambda)=K(\lambda)\cap U$ est analytique multiforme sur $B(\lambda_0,r)$, soit φ plurisousharmonique dans un voisinage $\mathscr{V}$ du graphe de $L(\lambda)$ restreint à une boule $B(\lambda_1,\varrho)\subset B(\lambda_0,r)$, il suffit de montrer que $\psi(\lambda)=\operatorname*{Max}_{z\in L(\lambda)}\varphi(\lambda,z)$ est sous-harmonique sur $B(\lambda_1,\varrho)$, d'après le théorème 1.2. Soient $\mathscr{V}_1$ et $\mathscr{V}_2$ deux ouverts disjoints tels que $\mathscr{V}_1\subset\mathscr{V}$, $\mathscr{V}_1$ contient le graphe de L sur $B(\lambda_1,\varrho)$ et $G\cap\big(B(\lambda_1,\varrho)\times V\big)\subset\mathscr{V}_2$ où G denote le graphe de K sur $B(\lambda_0,r)$. Si on définit $\Phi(z)=\varphi(z)$ sur $\mathscr{V}_1$ et $\Phi(z)=-\infty$ sur $\mathscr{V}_2$ alors Φ est plurisousharmonique au voisinage du graphe de K sur $B(\lambda_1,\varrho)$ donc $\psi(\lambda)=\operatorname*{Max}_{z\in L(\lambda)}\varphi(\lambda,z)=\operatorname*{Max}_{z\in K(\lambda)}\Phi(\lambda,z)$ est sous-harmonique sur $B(\lambda_1,\varrho)$. ■

2. Distribution des valeurs des fonctions analytiques multiformes. Le principe d'identité pour les fonctions analytiques multiformes n'est pas vrai. Par exemple prenons H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et définissons une fonction analytique de C dans $\mathscr{L}(H\oplus H)$ par $f(\lambda)=\lambda P+S$ où P est la projection orthogonale sur le premier espace et S l'opérateur de décalage sur le deuxième espace. On a $K(\lambda)=\operatorname{Sp}(\lambda P+S)=\Delta\cup\{\lambda\}$ où Δ est le disque unité fermé. Donc $K(\lambda)=K(0)$ pour $|\lambda|\leqslant 1$ mais $K(\lambda)\supsetneqq K(0)$ pour $|\lambda|>1$. Néanmoins il existe un principe d'identité pour les fonctions analytiques multiformes avec $K(\lambda)$ de capacité nulle, donc en particulier pour $K(\lambda)$ dénombrable.

LEMME 2.1. *Soit $\lambda\to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme sur un domaine D de C et soit $\lambda_0\in D$. Supposons que $K(\lambda)\subset K(\lambda_0)$ pour tout $\lambda\in D$ alors $\partial K(\lambda_0)\subset\partial K(\lambda)$ pour tout $\lambda\in D$. En particulier si $K(\lambda)^\wedge\subset K(\lambda_0)^\wedge$ pour tout $\lambda\in D$, où $K(\lambda)^\wedge$ dénote l'enveloppe polynomialement convexe de $K(\lambda)$, c'est-à-dire la réunion de $K(\lambda)$ avec ses trous, alors $K(\lambda)^\wedge=K(\lambda_0)^\wedge$ pour tout $\lambda\in D$.*

Démonstration. Elle se fait en reprenant mot pour mot la démonstration d'E. Vesentini dans le cas du spectre (voir par exemple [1], p. 12) et en utilisant le calcul fonctionnel holomorphe pour les fonctions analytiques multiformes et le corollaire 1.5 (i). ■

THÉORÈME 2.2. *Soit $\lambda\to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme sur un domaine D et C. Soit $\lambda_0\in D$ et $E\subset D$ avec E de capacité strictement positive. Si la capacité de $K(\lambda_0)$ est nulle et si $K(\lambda)=K(\lambda_0)$ pour $\lambda\in E$ alors $K(\lambda)=K(\lambda_0)$ pour $\lambda\in D$.*

Démonstration. D'après le théorème d'Evans (voir [10], p. 76) il existe une fonction φ sous-harmonique sur C telle que $K(\lambda_0)=\{\lambda\colon \varphi(\lambda)=-\infty\}$. D'après le corollaire 1.4, $\psi(\lambda)=\sup_{z\in K(\lambda)}\varphi(z)$ est sous-harmonique sur D et vaut $-\infty$ sur E, donc d'après le théorème de H. Cartan on a $\psi(\lambda)=-\infty$. Ainsi $K(\lambda)\subset K(\lambda_0)$ pour tout $\lambda\in D$. Ainsi $K(\lambda)$ est de capacité nulle donc sans points intérieurs. D'après le lemme 2.1 on a $K(\lambda_0)\subset\partial K(\lambda)=K(\lambda)$ d'où $K(\lambda)=K(\lambda_0)$ pour $\lambda\in D$. ■

A l'aide de ce principe d'identité on peut améliorer le résultat principal de [4] de la façon suivante:

THÉORÈME 2.3. *Soit A une algèbre de Banach réelle ou complexe et soit $a\in A$. Supposons que A contient un ouvert non vide U tel que:*

(i) $\operatorname{Sp}(a+x)=\operatorname{Sp}x$ pour tout $x\in U$,

(ii) U contient un élément b de capacité nulle.

Alors a est dans le radical de A.

Démonstration. On peut supposer A semi-simple. Pour $u\in A$ fixé soit la fonction analytique $f(\lambda)=a+e^{\lambda u}be^{-\lambda u}$ définie pour $\lambda\in C$ à valeurs dans la complexification A_C de A. On a $\operatorname{Sp}f(\lambda)=\operatorname{Sp}(e^{\lambda u}be^{-\lambda u})=\operatorname{Sp}b$ pour λ réel et petit donc d'après le théorème 2.2 appliqué à un intervalle $[-\varepsilon,\varepsilon]$, qui n'est pas de capacité nulle, on obtient que $\operatorname{Sp}f(\lambda)=\operatorname{Sp}b$ pour tout $\lambda\in C$. Ainsi $\sup_{u\in A}\varrho(a+e^u be^{-u})=\varrho(b)<+\infty$. Pour μ réel et voisin de 1 on a $\operatorname{Sp}(\mu a+b)=\operatorname{Sp}b$ donc, d'après le principe d'identité, $\operatorname{Sp}(\mu a+b)=\operatorname{Sp}b$ pour tout $\mu\in C$ soit $\operatorname{Sp}(a+\lambda b)=\lambda\operatorname{Sp}b$ pour tout $\lambda\in C$, $\lambda\neq 0$. Comme $\lambda\to\varrho(a+\lambda b)$ est sous-harmonique on obtient que $\varrho(a)=\overline{\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\neq 0}}}\,\varrho(a+\lambda b)=0$. D'après le lemme 3 et le corollaire 3 de [4] il existe deux idéaux bilatères fermés J_1 et J_2 dans A tels que $J_1\cap J_2=\{0\}$, $a\in J_1$, $bx-xb\in J_2$ pour tout $x\in A$. Soit $v\in J_1$ avec $\varrho(v)=0$. Comme $bv-vb\in J_1\cap J_2$ on a $bv=vb$ donc $\operatorname{Sp}(b+v)=\operatorname{Sp}b$. Pour λ réel et petit on a $\operatorname{Sp}(a+b+\lambda v)=\operatorname{Sp}(b+\lambda v)=\operatorname{Sp}b$ donc, d'après le principe d'identité, $\operatorname{Sp}(a+b+\lambda v)=\operatorname{Sp}b$ pour $\lambda\in C$, $v\in J_1$, $\varrho(v)=0$. En particulier $\operatorname{Sp}(a+\lambda v)\subset\operatorname{Sp}(a+b+\lambda v)-\operatorname{Sp}b=\operatorname{Sp}b-\operatorname{Sp}b$ car $a+b+\lambda v$ et b commutent. Donc $\varrho(a+\lambda v)\leqslant 2\varrho(b)$ pour $\lambda\in C$. D'après le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques on obtient que $\varrho(a+\lambda v)=\varrho(a)$, pour $\lambda\in C$. Donc $\varrho(a+v)=\varrho(a)=0$ si $v\in J_1$; $\varrho(v)=0$. D'après la caractérisation du radical donnée par J. Zemánek (voir par exemple [1], p. 23) on a $a\in\operatorname{Rad}J_1=J_1\cap\operatorname{Rad}A=\{0\}$. ■

Le théorème de Liouville pour les fonctions entières peut être aussi généralisé aux fonctions analytiques multiformes.

THÉORÈME 2.4. *Soit $\lambda\to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme définie sur C et soit $F=\overline{\bigcup_{\lambda\in C}K(\lambda)}$, alors $\partial F\subset\partial K(\lambda)$ quel que soit $\lambda\in C$. En particulier si F est borné alors $K(\lambda)^\wedge$ est constant.*

Démonstration. Si $F=C$ c'est évident. Supposons que $z_0\notin F$, alors il existe $r>0$ tel que $B(z_0,r)\cap F=\emptyset$. D'après le théorème 1.2, $\lambda\to-\operatorname{Log}\operatorname{dist}(z_0,K(\lambda))$ est sous-harmonique dans C et bornée par $-\operatorname{Log}r$ donc, d'après le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques, $\operatorname{Log}\operatorname{dist}(z_0,K(\lambda))$ est constant. Soit $z_1\in\partial F$ tel que $z_1\notin\partial K(\lambda_1)$, alors

$z_1 \notin K(\lambda_1)$, car $z_1 \in K(\lambda_1)$ implique que z_1 est intérieur à $K(\lambda_1)$, qui est inclus dans F, donc intérieur à F, ce qui est absurde. Il existe $s > 0$ tel que $B(z_1, s) \cap K(\lambda_1) = \emptyset$. Soit $z_0 \in B(z_1, s/4) \setminus F$ et λ_0 tel que $B(z_1, s/4) \cap K(\lambda_0) \neq \emptyset$, ce qui est possible car sinon z_1 est intérieur à F. Alors $\operatorname{dist}(z_0, K(\lambda_0)) \leqslant s/2$ et $\operatorname{dist}(z_0, K(\lambda_1)) \leqslant 3s/4$, ce qui contredit la première partie. Ainsi $\partial F \subset \partial K(\lambda)$ pour tout $\lambda \in C$. Si F est borné on a $\partial F \subset K(\lambda)$ donc $F^\wedge \subset K(\lambda)^\wedge$ mais $K(\mu)^\wedge \subset F^\wedge \subset K(\lambda)^\wedge$ pour λ, $\mu \in C$ donc $K(\lambda)^\wedge$ est constant. ■

Avec les mêmes hypothèses il se peut que $K(\lambda)$ ne soit pas constant, il suffit de prendre l'exemple page 18 de [1] pour voir que $\operatorname{Sp}(a+\lambda b) = \partial\Delta$, si $\lambda \neq 0$, et $\operatorname{Sp} a = \Delta$.

Si f est une fonction entière non constante de C dans C on sait que $C \setminus f(C)$ a au plus un point. Ce résultat peut être généralisé, en utilisant un théorème de Borel et en améliorant une méthode due à Rémoundos [8], au cas des fonctions analytiques multiformes $\lambda \to K(\lambda)$ sur C, avec $K(\lambda)$ fini. Dans ce cas on sait qu'il existe un plus petit entier n tel que $\# K(\lambda) \leqslant n$ pour tout $\lambda \in C$ et alors $\# (C \setminus \bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda)) \leqslant 2n-1$. Ce nombre $2n-1$ est le meilleur possible car il existe des fonctions analytiques multiformes de degré n évitant $2n-1$ valeurs prescrites (voir [13]). En général on peut déjà prouver le lemme suivant qui sera amélioré par le théorème 2.6.

LEMME 2.5. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme non bornée sur C alors $\bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda)^\wedge$ est dense dans C.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $z_0 \in C$ et $r > 0$ tels que $B(z_0, r) \cap K(\lambda)^\wedge = \emptyset$ pour tout $\lambda \in C$. La fonction $u(z) = 1/(z-z_0)$ est holomorphe au voisinage du graphe de $\lambda \to K(\lambda)^\wedge$ donc, d'après le théorème 1.7, $\lambda \to L(\lambda) = \{u(z)\colon z \in K(\lambda)^\wedge\}$ est analytique multiforme sur C. Mais $\bigcup_{\lambda \in C} L(\lambda) \subset B(0, 1/r)$ donc, d'après le théorème 2.4, $L(\lambda)^\wedge = L(0)^\wedge$ quel que soit $\lambda \in C$. Si F est un compact sans trou de $C \setminus B(z_0, r)$ il est facile de voir que $u(F)$ est aussi sans trou. Donc $u(K(\lambda)^\wedge)^\wedge = u(K(\lambda)^\wedge) = u(K(0)^\wedge)$. Mais u est injective pour $z \neq z_0$ donc $K(\lambda)^\wedge = K(0)^\wedge$, ce qui est absurde car $K(\lambda)$ est non bornée. ■

THÉORÈME 2.6. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme sur C. Alors ou bien $K(\lambda)^\wedge$ est constant ou bien $E = C \setminus \bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda)^\wedge$ est un ensemble G_δ de capacité nulle.*

Démonstration. Comme $\bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda)^\wedge = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{|\lambda| \leqslant n} K(\lambda)^\wedge$ et que $\bigcup_{|\lambda| \leqslant n} K(\lambda)^\wedge$ est compact, l'ensemble E est un G_δ. D'après le théorème de Choquet, E est capacitable donc sa capacité est égale à sa capacité intérieure. Soit K un compact de E, montrons que $c(K) = 0$. Soit W la composante connexe non bornée de $C \setminus K$ et considérons la fonction multiforme $L(\lambda) = K(\lambda)^\wedge \cap W$.

Soit $F = \{\lambda\colon \lambda \in C,\ L(\lambda) \neq \emptyset\}$. Si F est vide alors $K(\lambda)^\wedge \subset K^\wedge$ donc, d'après le théorème 2.4, $K(\lambda)^\wedge$ est constant. Supposons donc $F \neq \emptyset$. C'est un ouvert, d'après la semi-continuité supérieure de $\lambda \to K(\lambda)$, de plus F est fermé, car supposons $\lambda_n \in F$ avec (λ_n) convergeant vers λ_0, si $\lambda_0 \notin F$ alors $K(\lambda_0)^\wedge$ est contenu dans la réunion des composantes bornées de K, d'où c'est aussi vrai pour $K(\lambda_n)$, pour n assez grand, ce qui est absurde. Aussi $L(\lambda) \neq \emptyset$ pour tout $\lambda \in C$. D'après le théorème 1.8, $\lambda \to L(\lambda)$ est une fonction analytique multiforme, non bornée. Si $c(K) > 0$ d'après le théorème de Frostman ([10], p. 60) on a $u(z) \geqslant V(K)$ pour tout $z \in C$, où

$$u(z) = \int_K \operatorname{Log}|z-\xi|\, d\mu(\xi)$$

est le conducteur potentiel de K et

$$V(K) = \iint_{K \times K} \operatorname{Log}|z-\xi|\, d\mu(z)\, d\mu(\xi) > -\infty.$$

Il est clair que u est harmonique au voisinage de $\bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda)^\wedge$. Donc, d'après le théorème 1.2, $\psi(\lambda) = \operatorname{Max}_{z \in L(\lambda)} [-u(z)]$ est sous-harmonique sur C. Mais $\psi(\lambda) \leqslant -V(K) < +\infty$ donc, d'après le théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques, $\psi(\lambda)$ est constante. Donc il existe une constante M telle que $\operatorname{Inf}\{u(z)\colon z \in K(\lambda)^\wedge \cap W\} = M$ pour $\lambda \in C$. Soit $\lambda \in W$, d'après le lemme 2.5, il existe deux suites (λ_n), (α_n) telles que (λ_n) converge vers λ, $\lambda_n \in W$, $\lambda_n \in K(\alpha_n)^\wedge$. Mais $u(\lambda_n) \geqslant \operatorname{Inf}\{u(z)\colon z \in K(\alpha_n)^\wedge \cap W\} = M$, donc par continuité de u sur W on a $u(\lambda) \geqslant M$ pour $\lambda \in W$. Si $\lambda_0 \in W$ il existe $z_1 \in K(\lambda_0)^\wedge \cap W$ tel que $u(z_1) = M$, autrement dit la fonction u harmonique sur W atteint son minimum en un point intérieur, donc elle est constante sur W, ce qui est absurde car $u(z) \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. ■

Remarque. Il est faux en général que $C \setminus \bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda)$ soit de capacité nulle. Il suffit de prendre comme exemple la fonction multiforme définie par $K(\lambda) = \{z\colon |z| = 1\}$ pour $|\lambda| \leqslant 1$ et par $K(\lambda) = \{z\colon |z| = 1\} \cup \{\lambda\}$ autrement. La fonction K a des bonnes sélections donc, d'après la démonstration du théorème 1.2. $\lambda \to K(\lambda)$ est analytique multiforme, de plus $C \setminus \bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda) = \{z\colon |z| < 1\}$.

En reprenant la démonstration du théorème 2.6 on voit qu'en général $C \setminus \bigcup_{\lambda \in C} K(\lambda) = E \cup U$, où E est de capacité nulle et où U est une réunion finie ou dénombrable d'ouverts U_i tels que les U_i soient des trous de $K(\lambda)$, pour tout $\lambda \in C$.

Dans [3], B. Aupetit a obtenu une démonstration géométrique beaucoup plus simple du théorème 2.6 qui a en plus l'avantage de généraliser un théorème de Tsuji sur la distribution des valeurs exceptionnelles des zéros des fonctions entières de deux variables (voir [2], Theorem 2.15, ou [10], pp. 329–331).

Le théorème 2.6 permet d'améliorer les résultats de [5] de la façon suivante:

Corollaire 2.7. *Soit $\lambda \to K(\lambda)$ une fonction analytique multiforme sur C. Supposons que pour tout $\lambda \in C$, $K(\lambda)$ ait au plus 0 comme point limite (resp. $K(\lambda)$ soit fini ou dénombrable). Alors ou bien $K(\lambda)$ est constant ou bien il existe un ensemble fermé F de capacité nulle tel que pour $z \notin F$ l'ensemble des λ tels que $z \in K(\lambda)$ soit discret (resp. dénombrable) et non vide.*

Bibliographie

[1] B. Aupetit, *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*, Lecture Notes in Math. 735, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[2] — *Analytic multivalued functions in Banach algebras and uniform algebras*, Adv. in Math. 44 (1982), 18–60.

[3] — *Geometry of pseudoconvex open sets and distribution of values of analytic multivalued functions*, Proceedings Rickart Conference, Yale University, 1984, à paraître.

[4] B. Aupetit and J. Zemánek, *Local characterizations of the radical in Banach algebras*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 25–30.

[5] —, — *On zeros of analytic multivalued functions*, Acta Sci. Math. (Szeged), à paraître.

[6] I. Glicksberg, *An application of Wermer's subharmonicity theorem*, Pacific J. Math. 94 (1981), 315–326.

[7] K. Oka, *Domaines pseudoconvexes*, Tôhoku Math. J. 49 (1942), 15–52.

[8] G. Rémoundos, *Extension aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations*, Gauthier-Villars, Paris 1927.

[9] Z. Słodkowski, *Analytic set-valued functions and spectra*, Math. Ann. 256 (1981), 363–386.

[10] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Maruzen, Tokyo 1959, Second edition corrected, Chelsea, New York 1975.

[11] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1966.

[12] H. Yamaguchi, *Sur une uniformité des surfaces constantes d'une fonction entière de deux variables complexes*, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 417–433.

[13] A. Zraïbi, *Sur les fonctions analytiques multiformes*, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec 1983.

Received April 19, 1983 (1882)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIX. (1984)

Computing norms and critical exponents of some operators in L^p-spaces

by

T. FIGIEL (Gdańsk), T. IWANIEC (Warszawa) and A. PEŁCZYŃSKI (Warszawa)

Abstract. Among other results we prove the following:

1° Let $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ be a sequence in L^p such that $\|f_j\|_p = 1$ for $j = 1, 2, \ldots, n$ and

$$\|\sum c_j f_j\|_p = \|\sum c_j \cdot \alpha_j f_{\pi(j)}\|_p$$

for every sequence of scalars (c_j), for every sequence of unimodular scalars (α_j), and for every permutation π of the indices. Then

$$\|\sum_{j=1}^{n} c_j f_j\|_p^p \geqslant n^{-1} \|\sum_{j=1}^{n} f_j\|_p^p \sum_{j=1}^{n} |c_j|^p \quad \text{for} \quad 1 < p < 2,$$

$$\|\sum_{j=1}^{n} c_j f_j\|_p^p \leqslant n^{-1} \|\sum_{j=1}^{n} f_j\|_p^p \sum_{j=1}^{n} |c_j|^p \quad \text{for} \quad 2 < p < \infty.$$

2° Let E be a finite dimensional subspace of L^∞. Let P denote either P_E — the orthogonal projection onto E or P^E — the orthogonal projection onto the orthogonal complement of E. Then $\sup\{p: \|P\|^{\infty,p} = 1\} > 2$ where $\|P\|^{\infty,p}$ denotes the norm of P regarded as an operator from L^∞ into L^p.

In particular, if $E = \operatorname{span}\{1, e^{it}\}$, then $\sup\{p: \|P_E\|^{\infty,p} = 1\} = 4$.

Introduction. Evaluation of norms of linear operators in Banach spaces requires various techniques like the Lagrange multipliers, variational methods, combinatorial calculations, etc. It is often related to finding the best constants in classical inequalities.

The present paper consists of three loosely connected parts.

The first one has a general character. Roughly speaking, we consider there the following problem: Given an operator acting between real L^p-spaces. Under what condition the complexification of the operator has the same norm as the original operator? The norms are the same in the case where the operator acts from L^p-space into L^q-space for $p \leqslant q$. Our general result is stated in terms of "mixed norms". For $p = q$ this fact has been established by F. W. Levi [5].

A consequence of the main result of Section 2 is the following inequality: