STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIX. (1984)

Les B_0-algèbres à idéaux premiers totalement ordonnés par inclusion sont de Fréchet

par

S. H. BOULOUSSA (Talence)

Abstract. We prove that every commutative unital B_0-algebra in which the set of prime ideals is a chain is a Fréchet algebra. It follows that every infinite-dimensional B_0-algebra which is a valuation ring is a Fréchet algebra of formal power series.

Introduction. Le but de cet article est de montrer que toute B_0-algèbre commutative unitaire, dont l'ensemble des idéaux premiers est totalement ordonné par inclusion, est une algèbre de Fréchet. Les algèbres de Fréchet de ce type sont étudiées dans [1]. On sait qu'une algèbre de Fréchet de dimension infinie qui est un anneau de valuation (voir définition plus loin) est une algèbre de séries formelles [1] et on voit donc que toute B_0-algèbre de dimension infinie qui est un anneau de valuation est une algèbre de Fréchet de séries formelles.

Ce résultat concernant les anneaux de valuation est assez curieux si on compare les différentes classes d'algèbres localement convexes métrisables et complètes. En effet la seule algèbre de Banach qui est un anneau de valuation est le corps des complexes [2], mais il existe des algèbres de Fréchet de dimension infinie qui sont des anneaux de valuation [1]. Par contre les seuls anneaux de valuation appartenant à la classe à priori beaucoup plus vaste des B_0-algèbres sont de Fréchet.

Je remercie Jean Esterle avec qui j'ai eu plusieurs conversations fructueuses pendant la rédaction de ce travail.

Je remercie également le Professeur W. Żelazko qui a suggéré une démonstration beaucoup plus simple du théorème 2.

DÉFINITION 1. Une *B_0-algèbre* est une algèbre localement convexe métrisable et complète.

Si A est une B_0-algèbre, la multiplication est continue sur A et la topologie de A peut être définie par une suite croissante $(\|\cdot\|_n)_{n\in N}$ de semi-normes vérifiant $\|xy\|_n \leqslant \|x\|_{n+1}\cdot\|y\|_{n+1}$ pour tout $x, y\in A$, $n = 1, 2, \ldots$, [3], p. 29.

DÉFINITION 2. Une *algèbre de Fréchet* est une B_0-algèbre localement multiplicative.

Ceci signifie qu'il existe un système fondamental de voisinages de l'origine stable par multiplication et la topologie d'une telle algèbre peut être définie par une suite croissante de semi-normes sous multiplicatives:

$$\|xy\|_n \leqslant \|x\|_n\cdot\|y\|_n \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \ldots$$

La classe des B_0-algèbres est évidemment beaucoup plus vaste que celle des algèbres de Fréchet. Par exemple il est bien connu [3], p. 34, que l'application $x\to x^{-1}$ est continue sur le groupe des éléments inversibles d'une algèbre de Fréchet, alors que ce résultat est en général faux pour les B_0-algèbres [3], p. 40. De même une algèbre de Fréchet commutative et unitaire possède des caractères continus [3], p. 33, ce qui n'est pas toujours la cas pour les B_0-algèbres.

Nous utiliserons le résultat classique suivant:

THÉORÈME 1 (Żelazko [3], p. 47). *Soit A une B_0-algèbre commutative; alors A est une algèbre de Fréchet si et seulement si pour toute fonction entière $\varphi(\lambda) = \sum_{n\geqslant 0} a_n\lambda^n$, et pour tout $x\in A$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge dans A.*

Remarque. Soit A une algèbre locale. Si $\mathrm{Sp}_A(x)\neq\emptyset$ pour tout $x\in A$, alors l'unique idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A est le noyau d'un caractère de A.

Démonstration. Soit α un élément de l'algèbre quotient $A/\mathfrak{M}$, on a $\alpha = \pi(x)$, où π est la surjection canonique de A sur $A/\mathfrak{M}$. Comme $\mathrm{Sp}_A(x)\neq\emptyset$, il existe $\lambda\in C$ tel que $x-\lambda e$ n'est pas inversible dans A et $\pi(x)-\lambda\pi(e) = 0$, $\alpha = \lambda\pi(e)$.

THÉORÈME 2. *Soit A une B_0-algèbre commutative, unitaire qui est un anneau local. Si l'application $x\to x^{-1}$ est continue sur le groupe G des éléments inversibles de A, alors A est une algèbre de Fréchet.*

Démonstration. L'application $x\to x^{-1}$ étant continue sur G, il est facile de voir en appliquant le théorème de Liouville à la résolvante de x que $\mathrm{Sp}_A(x)\neq\emptyset$ pour tout $x\in A$, et l'unique idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A est le noyau d'un caractère χ de A d'après la remarque précédente.

Soit $x\in\mathfrak{M}$, alors $e-\lambda x\in G$ pour tout $\lambda\in C$. On a

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{(e-\lambda x)^{-1}-(e-\lambda_0 x)^{-1}}{\lambda-\lambda_0} = x(e-\lambda_0 x)^{-2},$$

et l'application $g\colon \lambda\to(e-\lambda x)^{-1}$ est une application analytique de C dans A.

On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0}(\lambda x)^n$ converge dans A et que $(e-\lambda x)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}(\lambda x)^n$ pour tout $\lambda\in C$. Il en résulte que pour toute semi-norme p continue sur A on a $\lim_{n\to+\infty} p(x^n)^{1/n} = 0$, en particulier il existe une constante positive c_p telle que $p(x^n)\leqslant c_p^n$ pour tout $n\in N$.

Soit $y \in A$, alors $y = x + \alpha e$, $x \in \mathfrak{M}$, $\alpha = \chi(y)$. On a

$$p(y^n) = p\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} x^k\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\alpha|^{n-k} p(x^k),$$

donc

$$p(y^n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\alpha|^{n-k} c_p^k = (|\alpha| + c_p)^n.$$

Pour toute fonction entière $\varphi(z) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n z^n$ et pour tout $x \in A$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n x^n$ est convergente dans A puisque

$$\sum_{n \geqslant 0} |\alpha_n| \, p(x^n) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} |\alpha_n| (|\alpha| + c_p)^n.$$

Il résulte donc du théorème 1 que A est une algèbre de Fréchet. Comme toute algèbre de Fréchet possède au moins un idéal maximal fermé [3], alors cet idéal coïncide avec l'unique idéal maximal de A et χ est continu.

LEMME *Soit A une B_0-algèbre commutative et unitaire. Si l'ensemble des idéaux premiers de A forme une chaîne, alors l'application $x \to x^{-1}$ est continue sur G.*

Démonstration. Soit A une B_0-algèbre telle que l'application $x \to x^{-1}$ est discontinue sur G. Si A n'est pas un anneau local, l'ensemble des idéaux premiers de A ne forme pas une chaîne. Si A est un anneau local, soit $\mathfrak{M}$ son unique idéal maximal.

Soit $x \in A$. Si $x \notin G$, $x \notin \mathfrak{M}$ et $e \notin \mathfrak{M}$, $x + \lambda e \in G$ pour tout $\lambda \in C - \{0\}$. On a alors $x = \lim_{n \to \infty} ((1/n) e + x)$, $x \in \bar{G}$ et G est dense dans A. Comme l'application $x \to x^{-1}$ est discontinue sur G, elle est discontinue en e. Il existe donc une suite $(x_n)_{n \in N}$ d'éléments de G telle que $\lim_{n \to \infty} x_n = e$ et $x_n^{-1} \not\to e$. L'ensemble $\{x_n^{-1}: n = 1, 2, \ldots\}$ est non borné. Ceci résulte de l'inégalité

$$\|x_n^{-1} - e\|_p \leqslant \|x_n^{-1}\|_{p+1} \|x_n - e\|_{p+1}, \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

où $(\|\cdot\|_n)_{n \in N}$ est une suite convenable de semi-normes qui engendrent la topologie de A. Soit d une distance qui définit la topologie de A.

Quitte à tronquer la suite de semi-normes définissant la topologie de A, on peut supposer que $\liminf_{n \to \infty} \|x_n^{-1}\|_1 = +\infty$.

Posons pour $p, n = N$:

$$U_{p,n} = \{(x, y) \in A \times A: \exists z \in A \text{ tel que } d(xz, x) < 1/n \text{ et } \|y^p z\|_2 > n\}.$$

L'ensemble $U_{p,n}$ est un ouvert de $A \times A$ muni de la distance $d_1((x, y); (a, b)) = d(x, a) + d(y, b)$ car $U_{p,n} = \bigcup_{z \in G} (\mathscr{U}_z \cap \mathscr{V}_z)$ où $\mathscr{U}_z$ et $\mathscr{V}_z$ sont les ouverts définis par:

$$\mathscr{U}_z = \{(x, y) \in A \times A: d(xz, x) < 1/n\}$$

et

$$\mathscr{V}_z = \{(x, y) \in A \times A: \|y^p z\|_2 > n\}.$$

L'ensemble $U_{p,n}$ est dense dans $A \times A$. En effet soient $(a, b) \in A \times A$ et $\varepsilon > 0$. Comme G est dense dans A, il existe $v \in G$ tel que $d(b, v) < \varepsilon/2$.

On a

$$\lim_{n \to \infty} a x_n = a \quad \text{ et } \quad \liminf_{n \to \infty} \|v^p x_n^{-1}\|_2 \geqslant \liminf_{n \to \infty} \frac{\|x_n^{-1}\|_1}{\|v^{-p}\|_2} = +\infty.$$

On peut donc trouver $m \in N$ tel que

$$d(a x_m, a) < \min(\varepsilon/2, 1/n) \quad \text{ et } \quad \|v^p x_m^{-1}\|_2 > n.$$

Posons $x = a x_m$, $z = x_m^{-1}$, $y = v$. Alors $(x, y) \in U_{p,n}$ puisque $d(xz, x) = d(a, a x_m) < 1/n$ et $\|y^p z\|_2 = \|v^p x_m^{-1}\|_2 > n$.

D'autre part $d(a, x) + d(b, y) \leqslant \varepsilon$. Soit

$$V_{p,n} = \{(x, y) \in A \times A: \exists z \in A \text{ tel que } d(yz, y) < 1/n \text{ et } \|x^p z\|_2 > n\}.$$

On a:

$$V_{p,n} = \{(x, y) \in A \times A: (y, x) \in U_{p,n}\};$$

$V_{p,n}$ est un ouvert de $A \times A$ et $V_{p,n}$ est dense dans $A \times A$ puisque l'application $(c, d) \to (d, c)$ un homéomorphisme de $A \times A$. Posons

$$U = \bigcap_{p, n \in N} U_{p,n}, \qquad V = \bigcap_{p, n \in N} V_{p,n}.$$

Alors $U \cap V$ est un G_δ dense dans $A \times A$ d'après la propriété de Baire. Il existe donc un élément $(x, y) \in A \times A$ tel que pour tout entier $p \in N$, il existe une suite $(u_{p,n})_{n \in N}$ et une suite $(v_{p,n})_{n \in N}$ d'éléments de A satisfaisant à:

$$d(x u_{p,n}, x) < 1/n, \qquad d(y v_{p,n}, y) < 1/n,$$
$$\|y^p u_{p,n}\|_2 > n, \qquad \|x^p v_{p,n}\|_2 > n.$$

On a $\lim_{n \to \infty} \|\alpha u_{p,n}\|_2 = \|\alpha\|_2$ et $\lim_{n \to \infty} \|\beta v_{p,n}\|_2 = \|\beta\|_2$ pour tout $\alpha \in xA$ et $\beta \in yA$.

Par conséquent $y^p \notin xA$ et $x^p \notin yA$ pour tout $p \in N$.

On conclut d'après un résultat classique d'algèbre commutative qu'il existe deux idéaux premiers I et J tels que $x \in I$, $y \notin I$ et $x \notin J$, $y \in J$. Donc si l'application $x \to x^{-1}$ est discontinue, l'ensemble des idéaux premiers de A ne forme pas une chaîne. Ceci achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 3. *Soit A une B_0-algèbre commutative unitaire. Si l'ensemble* *des idéaux premiers de A est totalement ordonné par inclusion, alors A est une algèbre de Fréchet.*

Démonstration. A est évidemment un anneau local. D'après le lemme précédent l'application $x \to x^{-1}$ est continue sur G. Le fait que A est une algèbre de Fréchet résulte alors du théorème 2.

Rappelons qu'ùn anneau commutatif unitaire et intègre A est appelé un anneau de valuation si l'ensemble des idéaux de A est totalement ordonné par inclusion.

COROLLAIRE. *Toute B_0-algèbre qui est un anneau de valuation est une algèbre de Fréchet.*

On a montré dans [1] que toute algèbre de Fréchet de dimension infinie qui est un anneau de valuation est une algèbre de séries formelles, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme injectif de A dans $C[[X]]$, continu pour la topologie naturelle d'algèbre de Fréchet de $C[[X]]$ et dont l'image contient les polynômes. On voit donc que toute B_0-algèbre de dimension infinie qui est un anneau de valuation est une algèbre de Fréchet de séries formelles. Il résulte également du corollaire 1 et d'un résultat de [1] que si une telle B_0-algèbre A ne possède aucune norme continue, A est isomorphe à $C[[X]]$.

Bibliographie

[1] S. H. Bouloussa, *Caractérisation des algèbres de Fréchet qui sont des anneaux de valuation*, J. London Math. Soc. (2) 25 (1982), 355–364.

[2] J. Esterle, *Theorems of Gelfand-Mazur and continuity of epimorphisms from $\mathscr{C}(K)$*, J. Functional Analysis 36, 3 (1980), 273–286.

[3] W. Żelazko, *Metric generalisations of Banach algebras*, Diss. Math. Rozprawy Mat. 47 (1965).

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
U.E.R. DE MATHÉMATIQUE ET D'INFORMATIQUE
351, Cours de la Libération
33405 Talence, France

Received July 15, 1981
Revised version February 14, 1983 (1696)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIX. (1984)

Operators of Bochner-Riesz type for the helix

by

ELENA PRESTINI (Milano)

Abstract. We consider in R^3 a family of multipliers $m_\delta(\bar{\xi})$ depending upon a parameter $\delta > 0$. Their singularities lie along a cylindrical helix. The boundedness on $L_p(R^3)$ of the operators $T_\delta f(\bar{x})$ defined by $\widehat{T_\delta f}(\bar{\xi}) = m_\delta(\bar{\xi})\hat{f}(\bar{\xi})$ is studied after establishing a sharp estimate on the corresponding maximal function. The operators T_δ are the analogue for the helix in R^3 of the Bochner–Riesz spherical summation operators for the circle in R^2.

Introduction. Bochner–Riesz spherical summation operators U_δ are defined in $R^n (n \geqslant 2)$ by the formula $\widehat{U_\delta f}(\bar{\xi}) = n_\delta(\bar{\xi})\hat{f}(\bar{\xi})$, $\delta > 0$, where $n_\delta(\bar{\xi}) = (1-\|\bar{\xi}\|^2)^\delta$ if $\|\bar{\xi}\| < 1$ and $n_\delta(\bar{\xi}) = 0$ otherwise. They have been studied extensively (see [1], [3], [5], [7], [8], [10], [17]). In R^2 the results on the boundedness of these operators acting on L_p functions are sharp (they actually hold not only for the unit circle but for more general curves with the function n_δ replaced by any function with compact support which is smooth except near the curve where it is the distance to the curve raised to the power δ; see [11], [15]). The studies on the subject have shown that these operators are tight up with restriction theorems of the Fourier transform to the unit sphere of R^n. In [13] a restriction theorem to smooth curves in R^3 with nonvanishing curvature and torsion is proved, so it is natural to look for the related multipliers. We are going to define them in R^3 for the helix Γ of equation $\gamma(t) = (\cos t/\sqrt{2}, \sin t/\sqrt{2}, t/\sqrt{2})$, $-1/10 \leqslant t \leqslant 1/10$. (The helix being the only curve with constant curvature and torsion might be thought as the analogue in R^3 of the unit circle in R^2.) This choice makes the geometry slightly easier, at the same time it captures the nature of the problem which has to do with the local behavior of the curve.

Let $(\xi_1^t, \xi_2^t, \xi_3^t)$ be the coordinates of $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3$, with respect to the Frenet frame of Γ at $\gamma(t)$. Denote by N_t the normal plane at $\gamma(t)$. If $\bar{\xi}$ is a point lying in the angle determined by the planes N_t for $t = \pm 1/10$, which contains Γ, and moreover $\bar{\xi}$ is close enough to Γ, say $\operatorname{dist}(\bar{\xi}, \Gamma) < 1/100$ (denote by $U(\Gamma)$ this set) then there exists one and only one normal plane $N_{t(\bar{\xi})}$ through $\bar{\xi}$ ($t(\bar{\xi})$ is the solution of the equation $-\xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t + \xi_3 = 0$, unique under our assumptions). Now we define the following multipliers:

$$m_\delta(\bar{\xi}) = (|\xi_2^{t(\bar{\xi})}|^6 + |\xi_3^{t(\bar{\xi})}|^4)^{\delta/4}\, G(\bar{\xi}), \qquad \delta > 0 \tag{1}$$