STUDIA MATHEMATICA, T. LXXVII. (1984)

Une preuve rapide du théorème de Beurling et Helson sur les endomorphismes de l'algèbre $l^1(\boldsymbol{Z})$

par

JEAN-PIERRE KAHANE (Paris)

Hommage au Professeur Jan Mikusiński

Resumé. Nous prouvons le résultat indiqué dans le titre.

L'algèbre de convolution $l^1(\boldsymbol{Z})$ est représentée par l'algèbre multiplicative des fonctions continues sur $\boldsymbol{T}$ $(=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ dont la série de Fourier est absolument convergente. On désigne cette algèbre par A. Ses endomorphismes sont donnés par les applications continues φ de $\boldsymbol{T}$ dans $\boldsymbol{T}$ telles que $f(\varphi)$ appartienne à A dès que $f\in A$. Il revient au même (d'après le théorème du graphe fermé) de dire qu'il existe un $C=C(\varphi)>0$ tel que

$$\|f(\varphi)\|_A \leqslant C\|f\|_A$$

pour tout $f\in A$, ou aussi bien que

$$\|e^{2\pi in\varphi}\|_A \leqslant C \qquad (n\in \boldsymbol{Z}). \tag{1}$$

Le théorème de Beurling et Helson [1] dit que cela équivaut à $\varphi(t) = k(t-t_0)$ $(k\in\boldsymbol{Z},\ t_0\in\boldsymbol{T})$. Nous allons en donner une nouvelle démonstration.

Ecrivons $A=\mathscr{F}l^1$, $L^2=\mathscr{F}l^2$, et considérons les normes de $e^{2\pi in\varphi}$ dans $\mathscr{F}l^1$, $\mathscr{F}l^2$, $\mathscr{F}l^4$. La norme dans L^2 est 1. D'après (1) et l'inégalité de Hölder, on a

$$1=\|e^{2\pi in\varphi}\|_{\mathscr{F}l^2} \leqslant \|e^{2\pi in\varphi}\|_{\mathscr{F}l^1}^{1/3}\|e^{2\pi in\varphi}\|_{\mathscr{F}l^4}^{2/3}$$

donc

$$\|e^{2\pi in\varphi}\|_{\mathscr{F}l^4}^4 \geqslant C^{-2}. \tag{2}$$

Considérons le carré de convolution de $e^{2\pi in\varphi}$. Le carré de sa norme dans L^2 est le premier membre de (2). On obtient donc

$$\iiint_{\boldsymbol{T}^3} e^{2\pi in(\varphi(t-s)+\varphi(s)-\varphi(t-s')-\varphi(s'))}\,ds\,ds'\,dt \geqslant C^{-2}. \tag{3}$$

Posons $\Phi(s, s', t) = \varphi(t-s)+\varphi(s)-\varphi(t-s')-\varphi(s')$, et soit μ l'image par Φ de la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{T}^3$. C'est une mesure sur $\boldsymbol{T}$, dont les coefficients de Fourier sont positifs et vérifient $\hat{\mu}(n) \geqslant C^{-2}$ $(n \in \boldsymbol{Z})$ d'après (3). Comme

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N}\hat{\mu}(n) = \int_{\boldsymbol{T}} \frac{1}{2N+1}\sum_{-N}^{N} e^{2\pi int}\, d\mu(t)$$

tend vers la masse $\mu(0)$ quand $N\to\infty$ (théorème de Lebesgue), on a $\mu(0) > 0$. Donc $E = \Phi^{-1}(0)$ est un fermé de mesure de Lebesgue > 0 sur $\boldsymbol{T}^3$.

Chacune des fonctions $e^{in\varphi(t-s)}$, $e^{in\varphi(s)}$, $e^{-in\varphi(t-s')}$, $e^{-in\varphi(s')}$ appartient à $A(\boldsymbol{T}^3)$ avec une norme inférieure à C, en vertu de (1). Donc

$$\|e^{in\Phi}\|_{A(\boldsymbol{T}^3)} \leqslant C^4.$$

Pour chaque N entier > 0, la formule du binôme et l'inégalité triangulaire donnent

$$\left\|\left(\frac{1+e^{i\Phi}}{2}\right)^N\right\|_{A(\boldsymbol{T}^3)} \leqslant C^4. \tag{4}$$

Or $\left(\frac{1+e^{i\Phi}}{2}\right)^N$ tend vers χ, fonction indicatrice de E, quand $N\to\infty$. D'après (4), les coefficients de Fourier de χ appartiennent à $l^1(\boldsymbol{Z}^3)$. Donc χ est égale presque partout à une fonction continue, et comme $\chi = 1$ sur un fermé de mesure > 0, $\chi = 1$ partout. Donc $\Phi(s, s', t) \equiv 0$.

Le premier membre de (3) est donc 1. Donc (choisissant $n = 1$)

$$\|e^{2\pi i\varphi}\|_{\mathscr{F}l^4} = \|e^{2\pi i\varphi}\|_{\mathscr{F}l^2} = 1,$$

donc la série de Fourier de $e^{2\pi i\varphi}$ ne contient qu'un seul terme, donc $\varphi(t) = k(t-t_0)$ pour un $k \in \boldsymbol{Z}$ et un $t_0 \in \boldsymbol{T}$.

Bibliographie

[1] A. Beurling, H. Helson, *Fourier–Stieltjes transforms with bounded powers*, Math. Scand. 1 (1953), 120–126.

Received November 12, 1982 (1828)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXVII. (1984)

Algebraic foundation of some distribution algebras

by

BENNO FUCHSSTEINER (Paderborn)

Dedicated to Professor Jan Mikusiński on the occasion of his 70th birthday

1. Introduction. Since the pioneering works of L. Schwartz, J. Mikusiński, I. M. Gelfand, G. E. Shilov and others the problem of distribution multiplication has attracted the attention of the practical-minded mathematician. Distributions are a wonderful tool to work with in the theory of linear differential equations. But, alas, most of the real problems, for example, in mathematical physics are connected with interacting systems; and interaction means nonlinearity for the corresponding differential equations. So a distribution multiplication is required although everybody knows quite well that this problem cannot be solved in a general way. Numerous approaches can be found in the literature. (In our reference list we have included some of the papers dealing with this problem; [1]–[3], [5]–[7], [9]–[16], [20], [21], [23], [25]. But this list is far from being complete.) Many of these approaches are motivated by the special application the author has in mind, and therefore, they contain a large amount of mathematical arbitrariness. A special point, most authors insist upon, is that the distribution multiplication has to be commutative. But elementary calculation (Section 2) shows that noncommutative models not only make sense but, in addition, that the noncommutativity can be considered as the mathematical analogue of the fact that physical conservation laws can be violated by discontinuities (Section 3). We therefore believe that distribution multiplication should not contain any arbitrariness at all, and that the product definition should, in a canonical way, come out of elementary algebraic properties. Of course, to carry out such a program certain sacrifices, in terms of the size of the space, have to be made.

In this paper we pick up an old idea [7] from 1967. At that time we proved that in the space of so-called almost-bounded distributions a multiplication is given in a canonical way. This result is reviewed in