STUDIA MATHEMATICA, T. LXXVII. (1984)

Solution générale d'une équation fonctionnelle dans le domaine des fonctions analytiques

par

I. FENYÖ (Budapest)

Hommage au Professeur Jan Mikusiński à l'occasion de son 70e anniversaire

Résumé. L'article contient la démonstration de la proposition suivante:
Une fonction $f(z)$ holomorphe dans un entourage de l'origine satisfaisante à l'équation

$$f(z_1+\ldots+z_n)\,f(z_1+\varepsilon z_2+\ldots+\varepsilon^{n-1}z_n)\ldots f(z_1+\varepsilon^{n-1}z_2+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}z_n)$$
$$=[f(z_1)+\ldots+f(z_n)][f(z_1)+\varepsilon f(z_2)+\ldots+\varepsilon^{n-1}f(z_n)]\ldots$$
$$\ldots[f(z_1)+\varepsilon^{n-1}f(z_2)+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}f(z_n)]$$

est de la forme générale $f(z)=\gamma z$ (γ est une constante; $\varepsilon^n=1$, $\varepsilon\neq 1$).

R. A. Rosenbaum et S. L. Segal [2] ont démontré que si la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un entourage de l'origine et satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(z_1+z_2)f(z_1-z_2)=[f(z_1)+f(z_2)][f(z_1)-f(z_2)]$$

elle est de la forme $f(z)=\gamma z$ ou bien $f(z)=\gamma\sin z$; γ étant un nombre arbitraire.

Une généralisation de l'équation ci-dessus est la suivante: Soit n un nombre naturel et ε une n-ième racine de l'unité (c'est-à-dire $\varepsilon^n=1$) différente de 1. On considère l'équation fonctionnelle

$$(1)\qquad f(z_1+\ldots+z_n)f(z_1+\varepsilon z_2+\ldots+\varepsilon^{n-1}z_n)\ldots f(z_1+\varepsilon^{n-1}z_2+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}z_n)$$
$$=[f(z_1)+\ldots+f(z_n)][f(z_1)+\varepsilon f(z_2)+\ldots+\varepsilon^{n-1}f(z_n)]\ldots[f(z_1)+\varepsilon^{n-1}f(z_2)+\ldots+\varepsilon^{(n-1)^2}f(z_n)],$$

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont des variables indépendantes. Pour le cas $n = 3$ cette équation a été résolue par L. Carlitz [1] qui a obtenu un résultat intéressant: la solution unique holomorphe est $f(z) = \gamma z$.

Notre but est de démontrer le proposition suivante:

Théorème. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un entourage de l'origine satisfaisant pour tous $z_1, z_2, \ldots, z_n$ complexes à l'équation* (1). *Alors f est de la forme*

$$f(z) = \gamma z,$$

où γ est un nombre arbitraire.

Démonstration. Soit f une fonction holomorphe dans un entourage de l'origine satisfaisant à l'équation (1). Si l'on pose dans (1) $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$, on obtient $[f(0)]^n = 0$, d'où

$$f(0) = 0. \tag{2}$$

En mettant dans (1) $z_1 = z_2 = \ldots = z_{n-1} = 0$; $z = z$ cela donne

$$\prod_{a=0}^{n-1} f(\varepsilon^{(n-1)a} z) = \varepsilon^{n(n-1)^2/2} f^n(z). \tag{3}$$

La fonction $f(z) = 0$ $(z \in C)$ est évidemment une solution de (1). Nous supposons donc que f n'est pas identiquement zéro; alors (3) implique

$$f(\varepsilon z) f(\varepsilon^2 z) \ldots f(\varepsilon^{n-1} z) = \varepsilon^{n(n-1)^2/2} f^{n-1}(z).$$

Si l'on remplace z par le produit εz, on obtient

$$f(\varepsilon^2 z) f(\varepsilon^3 z) \ldots f(z) = \varepsilon^{n(n-1)^2/2} f^{n-1}(\varepsilon z).$$

Posant cette expression dans la relation (3) on est amené à la relation

$$f^n(\varepsilon z) = f^n(z). \tag{4}$$

D'autre part, soit maintenant dans (1) $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = z$ et $z_1 = z + h$ $(h \neq 0)$ on obtient

$$f(nz + h) f^{n-1}(h) = [f(z+h) + (n-1) f(z)][f(z+h) - f(z)]^{n-1}.$$

En divisant les deux membres par h^{n-1} et en prenant la limite pour $h \to 0$, on a

$$f(nz)[f'(0)]^{n-1} = n f(z)[f'(z)]^{n-1}. \tag{5}$$

De l'hypothèse $f'(0) = 0$ découle $f'(z) = 0$ $(z \in C)$, puisque $f(z)$ n'est pas identiquement zéro. Ainsi $f(z) = \gamma$ (constante arbitraire), mais cette fonction ne satisfait à l'équation (1) que pour $\gamma = 0$. Cela est en contradiction avec la supposition faite sur $f(z)$. Donc $f'(0) = 0$ implique $f(z) = 0$ $(z \in C)$, c'est-à-dire on doit admettre

$$f'(0) \neq 0. \tag{6}$$

Nous revenons maintenant à la relation (4). De cette relation découle

$$f(z) = \varepsilon^k f(\varepsilon z) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{7}$$

f étant holomorphe dans un entourage U de l'origine, f a la forme suivante selon (2):

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu \quad (z \in U)$$

et selon (7)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varepsilon^{k+\nu} z^\nu \quad (z \in U)$$

d'où découle

$$a_\nu = \varepsilon^{k+\nu} a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{8}$$

On voit donc immédiatement que les coefficients a_{pn-k} sont arbitraires $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ et $a_\nu = 0$ si $\nu \neq pn - k$. D'autre part selon (6) $a_1 \neq 0$, donc toutes les valeurs de k pour les quelles $a_1 = 0$ ne peuvent intervenir. Mais $\nu = 1$ si et seulement si $k = pn - 1$ et k doit être inférieur (ou égal) à $n-1$, ce qui veut dire que $k = pn - 1 \leqslant n - 1$. Cette inégalité n'est satisfaite que pour $p = 1$, c'est-à-dire $k = n - 1$. Pour $k = n - 1$ on tirent de (8)

$$a_\nu = \varepsilon^{n-1+\nu} a_\nu = \varepsilon^{\nu-1} a_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

La relation (9) ne détermine pas le coefficient a_ν si $\nu - 1 = pn$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, mais si $\nu - 1 \neq pn$, alors (9) implique $a_\nu = 0$. C'est pourquoi la solution non banale doit avoir la forme

$$f(z) = a_1 z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{2n+1} z^{2n+1} + \ldots \quad (z \in U). \tag{10}$$

Nous supposerons que $a_1 = 1$ $(f'(0) = 1)$, ce qui ne restreint pas la généralité. Sous cette hypothèse la formule (5) devient

$$f(nz) = n f(z)[f'(z)]^{n-1}. \tag{11}$$

Formant la $k$ième dérivée $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ des deux membres de (11), on obtient

$$n^k f^{(k)}(nz) = n\Big\{f^{(k)}(z)[f'(z)]^{n-1} + k f^{(k-1)}(z)\big[[f'(z)]^{n-1}\big]' + \ldots \\ \ldots + k f'(z)\big[[f'(z)]^{n-1}\big]^{(k-1)} + f(z)\big[[f'(z)]^{n-1}\big]^{(k)}\Big\}. \tag{12}$$

Pour $k = n+1$ (12) donne la relation suivante

$$n^n f^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z)[f'(z)]^{n-1} + (n+1)f^{(n)}(z)[[f'(z)]^{n-1}]' + \ldots$$
$$\ldots + (n+1)f'(z)[[f'(z)]^{n-1}]^{(n)} + f(z)[[f'(z)]^{n-1}]^{(n+1)}.$$

Posons maintenant $z = 0$ et tenons compte de ce que

$$f'(0) = 1, \quad f(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = f^{(n)}(0) = 0,$$

on obtient

(13) $$f^{(n+1)}(0) + (n+1)[[f'(z)^{n-1}]^{(n)}_{z=0} = n^n f^{(n+1)}(0).$$

D'autre part

(14) $$[[f'(z)]^{n-1}]' = (n-1)f''(z)[f'(z)]^{n-2},$$

donc

$$[[f'(z)]^{n-1}]^{(n)} = (n-1)\{f''(z)[f'(z)]^{n-2}\}^{(n-1)}$$
$$= (n-1)\{f^{(n+1)}(z)[f'(z)]^{n-2} + \ldots + f''(z)[[f'(z)]^{n-2}]^{(n-1)}\}.$$

Soit encore $z = 0$, on voit immédiatement que

$$[[f'(z)]^{n-1}]^{(n)}_{z=0} = (n-1)f^{(n+1)}(0).$$

En posant ce résultat partiel dans la formule (13), on obtient

$$n^n f^{(n+1)}(0) = f^{(n+1)}(0) + (n+1)(n-1)f^{(n+1)}(0) = n^2 f^{(n+1)}(0).$$

Comme $n > 2$, on voit que $f^{(n+1)}(0) = 0$, c'est-à-dire $a_{n+1} = 0$. On suppose maintenant que $a_{2n+1} = a_{3n+1} = \ldots = a_{(p-1)n+1} = 0$. Notre but est de démontrer que $a_{pn+1} = 0$, ou bien, ce qui est le même, que $f^{(pn+1)}(0) = 0$.

Mettons dans (12) $k = pn+1$ et $z = 0$, alors on a

(15) $$n^{pn} f^{(pn+1)}(0) = f^{(pn+1)}(0) + (pn+1)[[f'(z)]^{n-1}]^{(pn)}_{z=0}.$$

En vertu de (14) on obtient

$$[[f'(z)]^{n-1}]^{(pn)} = (n-1)[f''(z)[f'(z)]^{n-2}]^{(pn-1)}$$
$$= (n-1)\{f^{(pn+1)}(z)[f'(z)]^{n-2} + \ldots + f''(z)[[f'(z)]^{n-2}]^{(pn-1)}\}.$$

Cette formule donne pour $z = 0$

$$[[f'(z)]^{n-1}]^{(pn)}_{z=0} = (n-1)f^{(pn+1)}(0),$$

ainsi (15) entraîne

(16) $$n^{pn} f^{(pn+1)}(0) = f^{(pn+1)}(0) + (pn+1)(n-1)f^{(pn+1)}(0)$$
$$= [1 + (pn+1)(n-1)]f^{(pn+1)}(0).$$

Si $n > 2$, on a pour $p = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{n^{pn-1}-1}{n-1} = n^{pn-2} + n^{pn-3} + \ldots + 1 > pn-2 > p,$$

cela implique

$$n^{pn-1} > 1 + p(n-1)$$

ou bien

$$n^{pn} > n(1 + pn - p) = 1 + (pn+1)(n-1),$$

donc selon (16)

$$f^{(pn+1)}(0) = 0.$$

La démonstration est ainsi terminée.

Références

[1] L. Carlitz, *Some functional equations*, Amer. Math. Monthly 68 (1961), 753–756.

[2] R. A. Rosenbaum, S. L. Segal, *A functional equation characterising the sine*, Math. Gaz. 44 (1960), 97–105.

Received September 15, 1982 (1800)