[47] A. Pietsch, *Operator ideals*, Verlag der Wissenschaften and North Holland, Berlin 1978/1980.

[48] — *Eigenvalues of integral operators I*, Math. Ann. 247 (1980), 169–178.

[49] S. Ropela, *Spline bases in Besov spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 24 (1976), 467–470.

[50] J. Ryll, *Interpolating bases for spaces of differentiable functions*, Studia Math. 63 (1978), 125–144.

[51] J. Schauder, *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems*, Math. Z. 28 (1928), 317–320.

[52] S. Schonefeld, *Schauder bases in the Banach spaces $C^k(T^q)$*, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1971), 309–318.

[53] E. D. Gluskin, *The norms of random matrices and diameters of finite dimensional sets*, Mat. Sb. 120 (1983), 180–189.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Received December 10, 1981 (1729)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXVI. (1983)

О строении безусловных базисов некоторых пространств Кёте

В. П. КОНДАКОВ (Ростов-на-Дону)

Резюме. В пространствах Кёте числовых последовательностей

$$l_p[a_r(n)] = \Big\{\xi = (\xi_n): \Big\{\sum_n [|\xi_n| a_r(n)]^p\Big\}^{1/p} = |\xi|_r < +\infty,\ r = 1, 2, \ldots\Big\},$$

$1 \leqslant p \leqslant \infty$, показано, что для любой последовательности элементов (f_m), имеющей равностепенно непрерывную биортогональную систему функционалов, выполнено условие: существуют такие отображения в λ: $N \to R^+$, σ: $N \to N$, s: $N \to N$, c: $N \to R^+$, что

$$c_r^{-1} a_r(\sigma(m)) \leqslant \lambda_m |f_m|_{s(r)} \leqslant c_r a_{s(r+1)}(\sigma(m)), \quad r, m \in N.$$

Это даёт возможность получить простое доказательство квазиэквивалентности безусловных базисов в пространствах Кёте $l_p[a_r(n)]$, $p = 1, 2, \infty$, имеющих правильный безусловный базис, а также доказать квазиэквивалентность базисов и гипотезу Бессаги в некоторых других классах пространства.

Введение. Нашей целью является изучение в пространствах Кёте свойств базисов, основными из которых считаем квазиэквивалентность безусловных базисов (КББ) и характеризацию безусловных базисов дополняемых подпространств (проблема Бессаги).

Настоящая работа продолжает многочисленные исследования в этой области (см., напр., [1], [2], [4], [5], [10], [17], [19], [20], [23]). Подробнее с историей вопросов и библиографией можно познакомиться в обзорах [21], [22].

Важную роль в работе играет теорема 1, которая утверждает, что из матрицы преднорм стандартного базиса ортов всегда можно получить матрицу, эквивалентную матрице преднорм любой последовательности элементов, имеющей равностепенно непрерывную биортогональную систему функционалов, путём повторения одних столбцов и удаления других. Это обобщает известную теорему Драгилева–Бессаги [2], [5] для базисов дополняемых подпространств ядерных пространств и недавний результат В. П. Захарюты и автора для p-абсолютных базисов дополняемых подпространств пространств Кёте.

Рассуждения теоремы 1 в комбинации с усовершенствованием приёмов работ [17], [20], [7] даёт значительно упрощённое по сравнению с [19] доказательство КББ в пространствах Кёте $l_p[a_r(n)]$, $p=1, 2, \infty$, имеющих правильный безусловный базис (теорема 2 ниже).

В конце работы доказывается гипотеза Бессаги и свойство КББ для пространств Кёте специального класса (D_1) с некоторой упорядоченностью базиса ортов (теорема 3).

Добавим, что утверждение теоремы 1 позволяет переносить результаты [10], [9], [6] о квазиэквивалентности базисов в некоторых ядерных декартовых произведениях пространств Кёте на случай аналогичных неядерных пространств без дополнительных ограничений на сомножители (как, напр., в [1]) в редакции для безусловных базисов. Возможны также незначительные смягчения требований на сомножители в духе [26].

Предварительные сведения. Пусть $[a_r(n)]$ — матрица неотрицательных чисел с монотонностью по столбцам

$$a_r(n) \leqslant a_{r+1}(n), \quad r, n \in \{1, 2, \ldots\} = N.$$

Пространством Кёте называют пространство числовых последовательностей

$$l_p[a_r(n)] = \Big\{\xi = (\xi_n)\colon \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} [|\xi_n| a_r(n)]^p\Big\}^{1/p} = |\xi|_r < +\infty \ \forall\, r \in N\Big\},$$
$$1 \leqslant p \leqslant \infty \ (\text{при } p = \infty \ |\xi|_r = \sup_n |\xi_n| a_r(n),\ r \in N),$$

с топологией, задаваемой системой преднорм $(|\cdot|_r)$.

Тем самым выделяется класс пространств Фреше, то есть полных метризуемых локально выпуклых, каждое из которых полностью определено матрицей $[a_r(n)]$ и значением p.

Последовательность элементов (f_m) локально выпуклого пространства $(E, |\cdot|_\alpha, \alpha \in A)$ называют *базисом* (*безусловным*; *p-абсолютным*), если для каждого элемента $e \in E$ существует однозначно определённая числовая последовательность (ξ_m) такая, что

$$(1) \qquad e = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \xi_m f_m = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m f_m$$

(ряд (1) сходится при любой перестановке членов; кроме того, сходятся ряды

$$\Big\{\sum_{m=1}^{\infty} (|\xi_m| \, |f_m|_\alpha)^p\Big\}^{1/p} = \|e\|_\alpha, \quad \forall\, \alpha \in A,\ e \in E,$$

и система преднорм $(\|\cdot\|_\alpha, \alpha \in A)$ задаёт исходную топологию на E).

Для каждого базиса (f_m) пространства Фреше $(E, |\cdot|_r, r \in N)$

формулы $f'_m(e) = \xi_m$, $e = \sum_i \xi_i f_i \in E$, $m \in N$, определяют биортогональную систему линейных форм, удовлетворяющую условию равностепенной непрерывности(*)

$$(2) \qquad \forall r\ \exists s(r)\colon c_r \geqslant 1 \ \ |f'_m(e)|\,|f_m|_r \leqslant c_r |e|_{s(r)}, \qquad m \in N,\ e \in E$$

(см., напр., [27], стр. 621).

Последовательность элементов (f_m) пространства Фреше будем называть *равномерно минимальной*, если для неё существует биортогональная система функционалов с условием (2).

Говорят, что базис (e_i) локально выпуклого пространства E *квазиэквивалентен* части базиса (f_j) локально выпуклого пространства F, если существует взаимно однозначное отображение в $\sigma\colon N \to N$, последовательность положительных чисел (λ_i) и изоморфизм в $T\colon E \to F$ такие, что

$$Te_i = \lambda_i f_{\sigma(i)}, \quad i \in N.$$

Если при этом σ — перестановка натурального ряда, то базисы (e_i) и (f_j) называют *квазиэквивалентными*. Из квазиэквивалентности базиса (e_i) пространства Фреше $(E, (|\cdot|_r))$ части базиса (f_j) пространства Фреше $(F, (\|\cdot\|_r))$ следует существование взаимно однозначного отображения в $\sigma\colon N \to N$ и каких-нибудь отображений $\lambda\colon N \to N$, $s\colon N \to N$, $C\colon N \to R \setminus (-\infty, 0]$ таких, что

$$(3) \qquad (1/c(r))\lambda_i \|f_{\sigma(i)}\|_r \leqslant |e_i|_{s(r)} \leqslant c(r)\lambda_i \|f_{\sigma(i)}\|_{s(r+1)}, \qquad s(r) \geqslant r,\ i, r \in N.$$

Будем говорить, что последовательность элементов (e_i) пространства Фреше E *слабо квазиэквивалентна* части последовательности (f_j) пространства Фреше F, если условие (3) выполнено с отображением $\sigma\colon N \to N$ не обязательно взаимно однозначным.

Неизвестно, будут ли квазиэквивалентны любые два p-абсолютных базиса произвольного пространства Кёте.

В трёх случаях класс безусловных базисов совпадает с классом p-абсолютных базисов.

Лемма 1 (см., напр., [3], [8], [14], [16]). *В пространствах Фреше, изоморфных пространствам Кёте вида $l_p[a_r(n)]$, $p = 1, 2, \infty$, всякий безусловный базис дополняемого подпространства p-абсолютен с соответствующим p.*

Последовательность (e_n) пространства Фреше E называют *правильной* (в смысле Драгилева [5]), если в E существует монотонная система преднорм $|\cdot|_1 \leqslant |\cdot|_2 \leqslant \ldots$, задающая исходную топологию, такая, что

(*) Здесь и дальше предлагается что система преднорм $(|\cdot|_r)$ монотонна.

после некоторой перестановки индексов $(\sigma(n))_{n=1}^{\infty}$:

$$|e_{\sigma(n)}|_r\,|e_{\sigma(n)}|_{r+1}^{-1}\downarrow 0 \quad \text{при} \quad n\uparrow\infty,\ r\in N.$$

Правильность матрицы Кёте $[a_r(n)]$ означает, что

$$\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)}\downarrow 0 \quad \text{при} \quad n\uparrow\infty,\ r\in N. \tag{4}$$

Назовём p-абсолютный базис (e_k) пространства Фреше E *упорядочиваемым* [19], если в E имеются система преднорм $(|\cdot|_r)$, задающая исходную топологию, и разбиение базиса

$$(e_k)_{k=1}^{\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(e_i)_{i\in\nu_n}$$

такие, что $|e_k|_r=|e_i|_r$ для $k,i\in\nu_n$, $n,r\in N$, и матрица $[|e_{k(n)}|_r=a_r(n)]$, где $k(n)\in\nu_n$, $n\in N$, правильная.

Пространсво с упорядочиваемым базисом изоморфно пространству Кёте вида

$$l_p\big([a_r(n)],\,l_p^{N(n)}\big)=$$
$$=\Big\{x=(x_n)\colon x_n\in l_p^{N(n)},\ \Big\{\sum_n[\|x_n\|_{l_p}a_r(n)]^p\Big\}^{1/p}=|x|_r<+\infty\ \forall r\Big\}$$

определяемому правильной матрицей $[a_r(n)]$ и набором координатных пространств $l_p^{N(n)}$ конечных или бесконечных размерностей $N(n)$. Базис ортов такого пространства будет правильным, если все числа $N(n)$ конечны.

Все центры шкал Рисса (см., напр., [23]) и их обобщения L_f (см. [5], но без дополнительного требования ядерности или монтелевости) имеют упорядочиваемый p-абсолютный базис ($p=1,2$).

Пространство Фреше относят к классу (D_1) (см. [5]), если оно изоморфно пространству Кёте $l_p[a_r(n)]$, матрица которого удовлетворяет условию

$$\exists q\,\forall r\,\exists s\colon \sup_n\frac{a_r^2(n)}{a_q(n)\,a_s(n)}<+\infty. \tag{5}$$

Предположение о том, что в пространстве Фреше с p-абсолютным базисом (e_n) всякий p-абсолютный базис дополняемого подпространства квазиэквивалентен части базиса (e_n) мы будем называть *гипотезой Бессаги* (для ядерных пространств она сформулирована в [2]).

При изучении квазиэквивалентности базисов и гипотезы Бессаги часто бывает полезен следующий факт.

Лемма 2 (теорема М. Холла [25], т. 5.1.2). *Пусть A — некоторое множество и $(A_m)_{m\in N}$ семейство конечных подмножеств A. Система различных представителей $a_m\in A_m$, $m\in N$, существует в том и только том случае, если для всякого конечного набора различных индексов $m_1, m_2,\ldots,m_k$ множество $\bigcup_{i=1}^{k}A_{m_i}$ содержит не менее k различных элементов.*

1. Равномерно минимальные системы. М. М. Драгилевым в [5] было показано, что всякий базис ядерного пространства Фреше слабо квазиэквивалентен части любого другого базиса этого пространства. Ч. Бессага в [2] распространил это утверждение на все базисы дополняемых подпространств ядерных пространств Фреше. Недавно В. П. Захарюта и автор доказали, что всякий p-абсолютный базис дополняемого подпространства пространства Фреше слабо квазиэквивалентен части любого p-абсолютного базиса всего пространства (если таковой имеется). В. П. Захарюта использовал для этой цели инварианты типа n-поперечников, близкие к употреблявшимся в [13], а автор — оценки специальных элементов, аналогичные применявшимся в [23]. Оба подхода использовали p-абсолютность изучаемых базисов. Сразу после этого было найдено простое доказательство более общего факта.

Теорема 1. *Пусть (f_m) — последовательность элементов пространства Кёте $E=l_p[a_r(n)]$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Если существует последовательность функционалов $(f_m'(\cdot))$ такая, что $f_m'(f_m)\geqslant 1$, $m\in N$, и выполнено условие (2), то (f_m) слабо квазиэквивалентна части последовательности единичных ортов в E.*

Доказательство. Мы не утратим общности, если будем предполагать матрицу $[a_r(n)]$, определяющую преднормы пространства Кёте E, выбранной так, чтобы выполнялись условия

(а) $|e|_r\leqslant 2^{-r}|e|_{r+1}$,

(б) $|f_m'(e)|\,|f_m|_r\leqslant 2^{-r}|e|_{r+1}$, $e\in E$, $r,n\in N$.

Если эти условия не имели места при задании пространства Кёте E матрицей $[a_r'(n)]$, то достаточно положить $a_1(n)=a_1'(n)$,

$$a_r(n)=\Big(\prod_{k=2}^{r}2^{k-1}c_{s^{k-1}(1)}\Big)a'_{s^{r-1}(1)}(n),\qquad r>1,\ n\in N,$$

где $c_r>1$, $s^r(1)\in N$ взяты из (2), $s^1(1)=s(1)$, $s^2(1)=s\big(s(1)\big),\ldots$, и новая матрица $[a_r(n)]$ уже определяет систему преднорм $(|\cdot|_r)$, которая задаёт исходную топологию и удовлетворяет условиям (а) и (б).

Обозначив $(e_n'(\cdot))$ — биортогональную последовательность функционалов к последовательности (e_n) единичных ортов пространства $E=l_p[a_r(n)]$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, получаем с использованием неравенства

Гёльдера

$$(6)\qquad \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[|e_i'(f_n)|\sup_{r:|f_n|_{r+1}\neq 1]}\frac{a_r(i)}{|f_n|_{r+1}}\right]^p\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{rp}}\right\}^{1/p}\leqslant 1\leqslant|f_n'(f_n)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|e_i'(f_n)|\,|f_n'(e_i)|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[|e_i'(f_n)|\inf_r\frac{a_{r+1}(i)}{|f_n|_r}\right]^p\right\}^{1/p}\cdot\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{|f_n'(e_i)|}{\inf\limits_r\frac{a_{r+1}(i)}{|f_n|_r}}\right]^q\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[|e_i'(f_n)|\inf_r\frac{a_{r+1}(i)}{|f_n|_r}\right]^p\right\}^{1/p},\qquad n\in N,$$

так как в виду (б)

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{|f_n'(e_i)|}{a_{r+1}(i)}\right]^q\right\}^{1/q}=\sup_{|e|_{r+1}=1}|f_n'(e)|\leqslant\frac{2^{-r}}{|f_n|_r},$$

а значит

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{|f_n'(e_i)|}{\inf\limits_r\frac{a_{r+1}(i)}{|f_n|_r}}\right]^q\right\}^{1/q}\leqslant\left\{\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^{rq}}\right\}^{1/q}\leqslant 1\qquad(q\geqslant 1).$$

При $p=1$ или ∞ аналогичные неравенства следуют прямо из условий (а) и (б). Сравнивая члены крайних рядов в (6), заключаем, что

$$\forall n\,\exists i=\sigma(n):\ \sup_{r:|f_n|_{r+1}\neq 0}\frac{a_r(i)}{|f_n|_{r+1}}\leqslant\inf_r\frac{a_{r+1}(i)}{|f_n|_r}=\frac{1}{\lambda_n}\quad(e_i'(f_n)\neq 0),$$

откуда следует условие (3)

$$\lambda_n a_r(\sigma(n))\leqslant|f_n|_{r+1}\leqslant\lambda_n a_{r+2}(\sigma(n)),\qquad r,n\in N.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Всякая равномерно минимальная последовательность элементов пространства Кёте* $l_p[a_r(n)]$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ *слабо квазиэквивалентна части последовательности единичных ортов. В частности, это справедливо для всякого базиса дополняемого подпространства пространства Кёте.*

Доказательство. Если (f_m) — базис в замкнутом подпространстве E_1 пространства Фреше E, то последовательность коэффициентных функционалов, как известно (см., напр., [27], стр. 621), на E_1 удовлетворяет (2). Нетрудно убедиться, что при наличии непрерывного линейного проектора Q из E на E_1, последовательность функционалов $f_m'(Q(\cdot))$, $m=1,2,\ldots$, удовлетворяет условию (2) на E.

Следствие 2. *Пусть пространство Кёте E определяется матрицей $[a_r(n)]$ с условием (S) (Шварца)*

$$\forall r\,\exists s(r):\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)}=0.$$

Тогда для всякого p-абсолютного базиса (f_m) дополняемого подпространства $E_1\subset E$ в последовательности $(\sigma(n))$ теоремы 1 каждое натуральное значение повторяется не более конечного числа раз. В частности, если матрица $[a_r(n)]$ правильная, то всякий p-абсолютный базис дополняемого подпространства в E тоже правильный.

Доказательство. Рассуждая для p-абсолютного базиса (f_m) дополняемого подпространства в E как в доказательстве теоремы 1, предположим, что для некоторой подпоследовательности $(f_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ существует один индекс $i=\sigma(n_j)$, то есть

$$a_r(i)\leqslant\frac{|f_{n_j}|_{r+1}}{\lambda_{n_j}}\leqslant a_{r+2}(i),\qquad r,j\in N.$$

Ввиду p-абсолютности базиса (f_m) из этих неравенств следует, что $(\lambda_{n_j}^{-1}f_{n_j})$ порождает подпространство F, изоморфное банахову пространству l_p с нормой

$$\|e\|=\left\{\sum_j[|f_{n_j}'(e)|\lambda_{n_j}]^p\right\}^{1/p},\qquad e\in F,$$

и при этом $\forall r\,\exists D_r>0$: $D_r^{-1}|e|_r\leqslant\|e\|\leqslant D_r|e|_r$, $\forall e\in F$.

В бесконечномерном подпространстве F всегда найдутся элементы g_k: $\|g_k\|=1$, $k=1,2,\ldots$, такие, что у g_k равны нулю первые k коэффициентов разложения по базису единичных ортов всего пространства E. Для них получаем противоречие с условием (S)

$$\frac{D_s^{-1}}{D_r}\leqslant\frac{|g_k|_r}{|g_k|_s}\leqslant\max_{i>k}\frac{a_r(i)}{a_s(i)},\qquad r<s,\ k\in N.$$

Если матрица $[a_r(n)]$ правильная, то условие (S) также имеет место. Положим $\forall e\in E$

$$\|e\|_r=\left\{\sum_m[|f_m'(Qe)|\lambda_m a_r(\sigma(m))]^p\right\}^{1/p}+|e-Qe|_r,\qquad r\in N,$$

где Q — проектор на подпространство, порождаемое p-абсолютным базисом (f_m), λ_m, $\sigma(m)$ — найдены в теореме 1. Получим систему преднорм на E, задающую исходную топологию, и при расположении элементов $(f_{m(n)})$ в порядке возрастания $\sigma(m(n))$

$$\frac{\|f_{m(n)}\|_r}{\|f_{m(n)}\|_s} = \frac{a_r(\sigma(m(n)))}{a_s(\sigma(m(n)))} \downarrow 0 \quad \text{при} \quad n\uparrow\infty\ \forall r< s.$$

Отметим, что часть следствия 2 о правильных базисах была получена в [19].

2. Правильные базисы. Следуя С. Банаху, будем говорить, что линейные размерности локально выпуклых пространств E, F *равны*,

$$\dim_l E = \dim_l F,$$

если существуют изоморфные вложения $T\colon E\to F$, $S\colon F\to E$.

Теорема 2 (ср. [17] и [20]). *Пусть в пространствах Фреше E, F имеются правильные p-абсолютные базисы. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1° $\dim_l E = \dim_l F$,

2° *E изоморфно F*,

3° *любые p-абсолютные базисы (e_n) в E и (f_m) в F квазиэквивалентны.*

Доказательство. Достаточно показать импликацию 1° ⇒ 3°. Для этого нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 3. *Если для пространств Фреше E, F существуют изоморфные вложения $T\colon E\to F$, $S\colon F\to E$, то системы преднорм $(|\cdot|_r)$ $(\|\cdot\|_r)$, задающие топологии E, F соответственно, могут быть выбраны так, что*

$$|Tf|_r \leqslant \|f\|_{r+1} \leqslant |Tf|_{r+2}, \quad r\in N,\ f\in F, \tag{7}$$

$$|e|_r \leqslant \|Se\|_{r+1} \leqslant |e|_{r+2}, \quad r\in N,\ e\in E. \tag{8}$$

Для доказательства выпишем сначала условия изоморфности T, S при произвольных системах преднорм $(|\cdot|_r^*)$ в E, $(\|\cdot\|_r^*)$ в F: существуют последовательности положительных чисел $(c(r))_{r=1}^{\infty}$ и натуральных возрастающих индексов $(s(r))_{r=1}^{\infty}$ такие, что

$$c^{-1}(r)\,|Tf|_r^* \leqslant \|f\|_{s(r)}^* \leqslant c(r)\,|Tf|_{s(r+1)}^*, \quad r\in N,\ f\in F,$$

$$c^{-1}(r)\,|e|_r^* \leqslant \|Se\|_{s(r)}^* \leqslant c(r)\,|e|_{s(r+1)}^*, \quad r\in N,\ e\in E.$$

Остаётся положить

$$|e|_r = \Big[\prod_{j=-1}^{r-2} c(s^j(1))\Big]\,|e|_{s^{r-1}(1)}^*, \quad r\in N,\ e\in E,$$

$$\|f\|_r = \Big[\prod_{j=0}^{r-2} c(s^j(1))\Big]\,\|f\|_{s^{r-1}(1)}^*, \quad r=2,3,\ldots,f\in F,$$

где $c(s^{-1}(1))=1$, $c(s^0(1))=c(1)$, $s^1(1)=s(1)$, $s^2(1)=s(s(1))$, …, и неравенства (7) без труда проверяются для новых преднорм $(|\cdot|_r)$ в E и $(\|\cdot\|_r)$ в F.

Лемма 4. *Пусть существует изоморфное отображение S пространства Кёте $E=l_p[a_r(n)]$ в пространство Кёте $F=l_p[b_r(n)]$ и матрицы $[a_r(n)]$, $[b_r(n)]$ выбраны по отображению S так, что определяемые ими системы преднорм $(|\cdot|_r)$ в E и $(\|\cdot\|_r)$ в F удовлетворяют неравенствам* (8). *Тогда для любых натуральных $r<s$ и $c>0$*

$$\Big|\Big\{i\colon \frac{a_s(i)}{a_r(i)}\leqslant c\Big\}\Big| \leqslant \Big|\Big\{j\colon \frac{b_{s-1}(j)}{b_{r+1}(j)}\leqslant c\Big\}\Big|,$$

где $|A|$ — число (или ∞) элементов множества A.

Доказательство. Предположив противное, при некотором выборе индексов $r<s$ и числа $c>0$ будем иметь

$$|\nu| = \Big|\Big\{i\colon \frac{a_s(i)}{a_r(i)}\leqslant c\Big\}\Big| > \Big|\Big\{j\colon \frac{b_{s-1}(j)}{b_{r+1}(j)}\leqslant c\Big\}\Big| = |\mu|.$$

Пусть (e_i), (f_j) — базисы единичных ортов пространств E, F соответственно. Размерность подпространства в F, порождаемого элементами Se_i, $i\in\nu$, в силу нашего предположения по крайней мере на единицу больше конечного числа элементов в μ. Поэтому существует элемент

$$0\neq f = \sum_{i\in\nu}\lambda_i Se_i = \sum_{j\notin\mu} f_j'(f)f_j.$$

Для f получаем из p-абсолютности базисов (e_i), (f_j) и (8)

$$c< \frac{\{\sum_{j\notin\mu}[|f_j'(f)|\,b_{s-1}(j)]^p\}^{1/p}}{\{\sum_{j\notin\mu}[|f_j'(f)|\,b_{r+1}(j)]^p\}^{1/p}} \leqslant \frac{\{\sum_{i\in\nu}[|\lambda_i|\,a_s(i)]^p\}^{1/p}}{\{\sum_{i\in\nu}[|\lambda_i|\,a_r(i)]^p\}^{1/p}} \leqslant c,$$

что невозможно и это отвергает наше предположение. Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 2. Будем считать p-абсолютные базисы (e_i), (f_j) базисами единичных ортов в пространствах Кёте $E=l_p[a_r'(n)]$, $F=l_p[b_r'(n)]$ соответственно. Так как в E и F имеются правильные p-абсолютные базисы, согласно следствию 2 теоремы 1 матрицы $[a_r'(n)]$, $[b_r'(n)]$ можно предполагать правильными. Выберем на основании 1° изоморфные вложения $T\colon E\to F$, $S\colon F\to E$. Согласно лемме 3 имеются системы преднорм $(|\cdot|_r)$, $(\|\cdot\|_r)$ в E, F соответственно, удовлетворяющие (7) и (8). Этим системам преднорм соответствуют матрицы $[a_r(n)=|e_n|_r]$,

$[b_r(n) = \|f_n\|_r]$, которые, очевидно, не утратят условий правильности (4). Сравним матрицы $[a_r(n)]$, $[b_r(n)]$ с помощью леммы 4. Полагая в ней для произвольных $r < s$ последовательно $c = a_s(1) a_r^{-1}(1), a_s(2)\cdot a_r^{-1}(2), \ldots$ и учитывая монотонность отношений $a_s(n)\cdot a_r^{-1}(n)$, $b_s(n)\cdot b_r^{-1}(n)$ по n при любых $r < s$, заключаем, что

$$\frac{b_{s-1}(n)}{b_{r+1}(n)} \leqslant \frac{a_s(n)}{a_r(n)}, \qquad \forall r \leqslant s,\ n \in N,$$

или

$$\frac{b_{s-1}(n)}{a_s(n)} \leqslant \frac{b_{r+1}(n)}{a_r(n)}, \qquad \forall r \leqslant s,\ n \in N,$$

(при $s = r,\ r+1,\ r+2$ эти неравенства тривиальны).

Аналогично применим лемму 4 к паре пространств F, E с учётом (7) и придём к неравенствам

$$\frac{b_r(n)}{a_{r+1}(n)} \leqslant \frac{b_s(n)}{a_{s-1}(n)}, \qquad \forall s \geqslant r,\ n \in N.$$

Таким образом,

$$\frac{b_r(n)}{a_{r+1}(n)} \leqslant \frac{b_{s+1}(n)}{a_s(n)}, \qquad \forall r, s, n \in N,$$

и можно как в [20] (ср. [17]) положить

$$\inf_s \frac{b_{s+1}(n)}{a_s(n)} = \frac{1}{\lambda_n}, \qquad n \in N.$$

Условия квазиэквивалентности (3) базисов (e_i) и (f_j) проверяются теперь непосредственно

$$\lambda_n b_r(n) \leqslant a_{r+1}(n) \leqslant \lambda_n b_{r+2}(n), \qquad \forall r, n \in N.$$

Теорема доказана.

Из неё и леммы 1 вытекает

Следствие 1 [19]. *В пространствах Фреше, имеющих правильный p-абсолютный базис, все p-абсолютные базисы квазиэквивалентны. В частности, в пространствах Кёте $l_p[a_r(n)]$, $p = 1, 2, \infty$, имеющих правильный безусловный базис, все безусловные базисы квазиэквивалентны.*

Следствие 2 (ср. [2]). *Если в пространстве Фреше E имеется правильный p-абсолютный базис и $\dim_l E = \dim_l E\times E$, то для E справедлива гипотеза Бессаги.*

Для доказательства достаточно заметить, что любой p-абсолютный базис (f_j) дополняемого подпространства F в E согласно теореме 1 правильный, а значит декартово произведение $E\times F$ имеет правильный p-абсолютный базис, часть которого составляет последовательность $(0, f_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ $(0 \in E)$ и $\dim_l E = \dim_l E\times F$.

3. Упорядочиваемые базисы. Из теоремы 1 следует, что в пространстве Фреше с упорядочиваемым p-абсолютным базисом всякий p-абсолютный базис дополняемого подпространства также является упорядочиваемым. Если упорядочиваемый базис не будет правильным, то для доказательства квазиэквивалентности базисов как в п. 2 уже недостаточно простых оценок леммы 4. Однако в отдельных случаях удаётся доказать гипотезу Бессаги и квазиэквивалентность p-абсолютных базисов.

Теорема 3. *Пусть пространство Фреше имеет упорядочиваемый p-абсолютный базис и принадлежит классу (D_1). Тогда в нём справедлива гипотеза Бессаги и все p-абсолютные базисы квазиэквивалентны.*

Доказательство. На основании теоремы 1 можно сразу считать, что в пространстве Кёте $E = l_p([a_r(n)], l_p^{N(n)})$, где $[a_r(n)]$ — правильная матрица, $N(n) \leqslant \infty$, дополняемое подпространство F с p-абсолютным базисом (f_j) наделено системой преднорм

$$\|f\|_r = \Big\{\sum_{i=1}^{\infty} [|f_i'(f)|\, \|f_i\|_r]^p\Big\}^{1/p}, \qquad r \in N,\ f \in F,$$

где $\|f_n\|_r = a_r(\sigma'(n))$, $r, n \in N$, $\sigma'(n)$ соответствуют $\sigma(n)$ в теореме 1.

Правильную матрицу $[a_r(n)]$ удобно выбрать по некоторому проектору Q из E на F и условию (5) так, чтобы выполнялись неравенства

$$|Qe|_r \leqslant \frac{1}{2^r}\, \|Qe\|_{r+1} \leqslant \frac{1}{2^{2r+1}}\, |e|_{r+2}, \qquad r \in N,\ e \in E, \tag{9}$$

$$\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \leqslant \frac{a_{r-1}(n)}{a_r(n)}. \tag{10}$$

Сделать это всегда можно приёмом, аналогичным применявшимся в теореме 1 или в лемме 3.

Для построения взаимно однозначного отображения $\sigma\colon N\to N$ индексов базиса (f_i) на часть индексов базиса единичных ортов (e_j) составленного из ортов в $l_p^{N(n)}$, $n \in N$, пространства E с неравенствами (3) для преднорм нам понадобится

Лемма 5. *При сделанных выше предположениях для каждой тройки натуральных индексов r, $n_1 < n_2$,*

$$\left|\left\{i\colon \frac{a_s(n_1)}{a_r(n_1)} \leqslant \frac{\|f_i\|_s}{\|f_i\|_r} \leqslant \frac{a_s(n_2)}{a_r(n_2)}\ \forall s > r+4\right\}\right| = |\mu| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\left\{j\colon \frac{a_s(n_1)}{a_r(n_1)} \leqslant \frac{|e_j|_{s+1}}{|e_j|_{r-1}},\ \frac{|e_j|_{s-1}}{|e_j|_{r+1}} \leqslant \frac{a_s(n_2)}{a_r(n_2)}\ \forall s > r+4\right\}\right| = |\nu|.$$

Доказательство. Предположим, при некотором выборе индексов, $|\mu| > |\nu|$. Как в лемме 4 заключаем, что существует элемент

$$f = \sum_{i\in\mu} f_i'(f) f_i = \sum_{j\notin\nu} e_j'(f) e_j.$$

Обозначив

$$\nu_1 = \{j\colon\ \exists s(j) > r+4\ \ a_r(n_2)|e_j|_{s(j)-1} > a_{s(j)}(n_2)|e_j|_{r+1}\},$$
$$\nu_2 = \{j\notin\nu_1\colon\ \exists s'(j)\ \ a_{s'(j)}(n_1)|e_j|_{r-1} > a_r(n_1)|e_j|_{s'(j)+1}\},$$
$$g_k = \sum_{j\in\nu_k} e_j'(f)\sum_{i\in\mu} f_i'(e_j) f_i, \qquad k = 1, 2,$$

имеем $f = g_1 + g_2$, $\|f\|_r \leqslant \|g_1\|_r + \|g_2\|_r$. Но этому противоречат оценки с использованием (9) ($p = 1$),

$$\|g_1\|_r \leqslant \Big\|\sum_{j\in\nu_1} e_j'(f) e_j\Big\|_r \leqslant \frac{1}{2^r}\sum_{j\in\nu_1}|e_j'(f)|\,|e_j|_{r+1} <$$
$$< \frac{1}{2}\sum_{j\in\nu_1}|e_j'(f)|\frac{a_r(n_2)}{a_{s(j)}(n_2)}|e_j|_{s(j)-1} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{s=r+4}\frac{a_r(n_2)}{a_s(n_2)}\frac{\|f\|_s}{2^{s-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|f\|_r}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s} = \frac{\|f\|_r}{2},$$

$$\|g_2\|_r \leqslant \sum_{j\in\nu_2}|e_j'(f)|\sum_{i\in\mu}|f_i'(e_j)|\,\|f_i\|_r \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j\in\nu_2}|e_j'(f)|\sum_{i\in\mu}|f_i'(e_j)|\frac{a_r(n_1)}{a_{s'(j)}(n_1)}\|f_i\|_{s'(j)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j\in\nu_2}|e_j'(f)|\frac{a_r(n_1)}{a_{s'(j)}(n_1)}\|e_j\|_{s'(j)} \leqslant \sum_{j\in\nu_2}|e_j'(f)|\frac{a_r(n_1)}{a_{s'(j)}(n_1)}\frac{|e_j|_{s'(j)+1}}{2^{s'(j)}} <$$
$$< \frac{1}{2}\sum_{j\in\nu_2}|e_j'(f)|\,|e_j|_{r-1} \leqslant \frac{|f|_{r-1}}{2} \leqslant \frac{\|f\|_r}{2}.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. Фиксируем $r > 2$ и образуем множества

$$A_i = \left\{j\colon\ \frac{|e_j|_{s-4}}{|e_j|_r} \leqslant \frac{\|f_i\|_{s-2}}{\|f_i\|_r} \leqslant \frac{|e_j|_s}{|e_j|_r}\ \forall s > r+4\right\}, \qquad i\in N.$$

Для системы всех конечных множеств $\{A_i,\ i\in\mu_1\}$ будем проверять условие леммы 2 (теоремы М. Холла). Ввиду правильности $[a_r(n)]$

любое конечное множество различных индексов из μ_1 можно представить в виде объединения таких наборов $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, у каждого из которых соответствующие множества индексов

$$\nu_i = \left\{n\colon\ \frac{a_{s-4}(n)}{a_r(n)} \leqslant \frac{\|f_i\|_{s-2}}{\|f_i\|_r} \leqslant \frac{a_s(n)}{a_r(n)}\ \forall s > r+4\right\}, \qquad i\in I,$$

сплошь покрывают некоторый отрезок натурального ряда, причём отрезки для разных наборов не пересекаются. Поэтому нам нужно убедиться в справедливости условия леммы 2 для всех указанных наборов, а для этого достаточно неравенств:

$$k = |I| \leqslant \left|\left\{i\colon\ \frac{a_s(n_1)}{a_r(n_1)} \leqslant \frac{\|f_i\|_s}{\|f_i\|_r} \leqslant \frac{a_s(n_2)}{a_r(n_2)}\ \forall s > r+4\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\left\{j\colon\ \frac{a_{s-4}(n_1)}{a_r(n_1)} \leqslant \frac{|e_j|_{s-3}}{|e_j|_{r-1}} \leqslant \frac{|e_j|_{s-2}}{|e_j|_r} \leqslant \frac{|e_j|_{s-1}}{|e_j|_{r+1}} \leqslant \frac{a_s(n_2)}{a_r(n_2)}\ \forall s > r+4\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\bigcup_{i\in I} A_i\Big|,$$

где $n_1 = \min\{\sigma'(i),\ i\in I\}$, $n_2 = \max\{\sigma'(i),\ i\in I\}$, которые следуют из леммы 5 и (10).

Согласно лемме 2 для системы множеств $\{A_i,\ i\in\mu_1\}$ существует система различных представителей $\sigma(i)\in A_i$, $i\in\mu_1$. Для системы оставшихся бесконечных множеств A_i заметим, что в соответствующих множествах индексов

$$\nu_i = \left\{n\colon\ \frac{a_{s-4}(n)}{a_r(n)} \leqslant \frac{\|f_i\|_{s-2}}{\|f_i\|_r} \leqslant \frac{a_s(n)}{a_r(n)}\ \forall s > r+4\right\}$$

имеется по крайней мере один индекс $n = n(i)$: $N(n) = \infty$, иначе бы имели для некоторой неограниченной последовательности (n_k)

$$\sup_k \frac{a_{s-4}(n_k)}{a_r(n_k)} \leqslant \frac{\|f_i\|_{s-2}}{\|f_i\|_r}, \qquad s > r+4,$$

что невозможно. Выберем из каждого бесконечного множества A_i также бесконечное множество вида

$$B_i = \left\{j\colon\ \frac{|e_j|_s}{|e_j|_r} = \frac{a_s(n(i))}{a_r(n(i))}\ \forall r, s\right\}, \qquad i\notin\mu_1,$$

которое очевидно не имеет общих точек ни с одним из конечных множеств A_i. Разбивая, если это необходимо, каждое B_i на бесконечное число бесконечных подмножеств, легко построить систему различных представителей $\sigma(i)\in B_i\subset A_i$, $i\notin\mu_1$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между базисом (f_i) и подпоследовательностью $(e_{\sigma(i)})$ базиса ортов пространства E такое, что $\sigma(i) \in A_i$, $i \in N$. При этом очевидно для любых индексов s, $t > r+4$,

$$\frac{\|f_i\|_{s-2}}{\|f_i\|_t} \leqslant \frac{|e_{\sigma(i)}|_s}{|e_{\sigma(i)}|_{t-2}}, \quad i \in N,$$

и можно положить

$$\lambda_i = \inf_{s>r+4} \frac{|e_{\sigma(i)}|_s}{\|f_i\|_{s-2}}, \quad i \in N.$$

Но тогда справедливы неравенства

$$|e_{\sigma(i)}|_s \leqslant \lambda_i \|f_i\|_{s+2} \leqslant |e_{\sigma(i)}|_{s+4}, \quad i \in N, \ s > r+4,$$

которые завершают доказательство гипотезы Бессаги. Согласно сказанному из любых двух p-абсолютных базисов пространства E каждый квазиэквивалентен части другого. Стандартная конструкция теоремы Кантора–Бернштейна (см. напр., [15], стр. 23) даёт квазиэквивалентность этих базисов. Теорема доказана.

Заметим, что из теоремы 1 тривиально следует справедливость гипотезы Бессаги в пространствах Кёте вида $l_p([a_r(n)], l_p^{N(n)})$, где $N(n) = \infty$, $n \in N$.

В [23] были указаны средства для доказательства гипотезы Бессаги в пространствах Кёте вида $l_p[\exp f(\lambda_r b_n)]$, где f — нечётная, возрастающая, логарифмически выпуклая функция, $\lambda_r \uparrow \lambda \leqslant \infty$, b_n — произвольны (см., напр., [18]).

Рассматривавшиеся нами вопросы изучались ранее и для пространств Кёте без какой-либо упорядоченности базисов (см. [10], [9], [6], [1], [11], [12], [24]). Не вдаваясь в подробности, добавим, что в ряде результатов цитированных работ теорема 1 позволяет снять требование ядерности пространств.

В заключение выражаю глубокую признательность профессору Ч. Бессаге за внимание к работе и замечания.

Литература

[1] В. И. Баран, *О квазиэквивалентности абсолютных базисов в декартовых произведениях пространств Кёте*, сб. *Актуальные вопросы мат. анализа*, РГУ, Ростов н/Д, 18–21.

[2] [Ч. Бессага] C. Bessaga, *Some remarks on Dragilev theorem*, Studia Math. 31 (1968), 307–318.

[3] [В. Войтынски] W. Wojtyński, *On bases in certain countable-Hilbert spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. Astronom Physic. 14 (1966), 681–684.

[4] М. М. Драгилев, *О регулярной сходимости базисных разложений аналитических функций*, Научн. докл. Высш. шк., серия физ.-мат. наук 4 (1953), 27–32.

[5] — *О правильных базисах в ядерных пространствах*, Мат. Сборник 68, 110, 2 (1965), 153–173.

[6] — *Классы Рисса и кратные правильные базисы*, Теория функций, Функ. анализ и его прилож., Харьков, 15 (1971), 55–78.

[7] [П. Дяков] P. Djakov, *A short proof of the theorem of Crone and Robinson on the quasi-equivalence of regular bases*, Studia Math. 53 (1975), 269–271.

[8] В. П. Захарюта, *О квазиэквивалентности базисов в конечных центрах гильбертовых шкал*, Докл. АНСССР 180, 4 (1968), 786–788.

[9] — *Об изоморфизме декартовых произведений линейных топологических пространств*, Функц. анализ и его прилож. 4, 2 (1970), 87–88.

[10] [В. П. Захарюта] V. P. Zahariuta, *On the isomorphism of Cartesian products of locally convex spaces*, Studia Math. 46 (1973), 201–221.

[11] — *Об изоморфизме и квазиэквивалентности базисов для степенных пространств Кёте*, кн. *Труды седьмой зимней школы по матем. программированию и смежным вопросам*, Дрогобыч, 1974; Москва 1976, 101–126.

[12] — *Компактные операторы и изоморфизм пространств Кёте*, кн. *Актуальные вопросы матем. анализа*, Ростов н/Д, 1978, 62–71.

[13] — *Школа по теории операторов в функциональных пространствах*, Тезисы докладов, Минск (1978), 51–52.

[14] [Н. Дж. Кальтон] N. J. Kalton, *On absolute bases*, Math. Ann. 200 (1973), 209–225.

[15] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва 1968.

[16] В. П. Кондаков, *Некоторые вопросы изоморфизма и базисов ЛВП*, канд. дисс., Ростов н/Д 1972, 101.

[17] — *О квазиэквивалентности правильных базисов в пространствах Кёте*, кн. *Математ. анализ и его прилож.*, т. 5, РГУ, 1974, 210–213.

[18] — *Об одном обобщении пространств степенных рядов*, сб. *Актуальные вопросы мат. анализа*, РГУ Ростов н/Д, 1978, 92–99.

[19] — *Об упорядочиваемых абсолютных базисах в $\mathcal{F}$-пространствах*, Докл. АН СССР 247, 3 (1979), 543–546.

[20] [Л. Кроне, В. Робинсон] L. Krone, W. Robinson, *Every nuclear Fréchet space with a regular bases has the quasi-equivalence property*, Studia Math. 52 (1975), 203–207.

[21] [В. С. Митягин] W. S. Mitjagin, *Fréchet spaces with a unique unconditional basis*, Studia Math. 38 (1970), 23–34.

[22] — *Геометрия линейных пространств и линейных операторов*, в сб. *Теория операторов в функциональных пространствах.*

[23] — *Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах*, Studia Math. 37 (1971), 111–137.

[24] [К. Ныберг] K. Nyberg, *On subspaces of products of Nuclear Fréchet Spaces*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Sér. Al. Diss. 31 (1980).

[25] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, Москва 1970.

[26] [И. С. Эдельштейн, П. Войтащик] I. S. Edelstein, P. Wojtaszczyk, *On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces*, Studia Math. 54 (1976), 263–276.

[27] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ*, Мир, Москва 1969.

Received May 5, 1980 (1617)
Revised version November 25, 1981