STUDIA MATHEMATICA, T. LXXVI. (1983)

Un espace de Banach réticulé qui a presque la propriété de Radon–Nikodym

par

MICHEL TALAGRAND (Paris)

Abstract. We construct a Banach lattice E which fails the Radon–Nikodym property but which contains no dyadic tree.

I. Introduction. Soit E un espace de Banach. On appelle *arbre de* E une famille $(f_s)_{s\in T}$ de la boule unité de E, où $T = \bigcup_n I_1\times \ldots \times I_n$, et où les I_n sont des ensembles finis, qui possède les propriétés suivantes:

(1.1) Pour $s \in I_1\times \ldots \times I_n$ et $i \in I_{n+1}$, on a

$$\|f_s - f_{(s,i)}\| \geqslant \delta > 0 .$$

(1.2) Pour tout $s \in I_1\times \ldots \times I_n$, f_s est barycentre des $(f_{s,i})_{i\in I_{n+1}}$.

On dit que l'arbre est *dyadique* si pour tout n, $I_n = \{0,1\}$ et si $f_s = \frac{1}{2}(f_{s,0}+f_{s,1})$. On dit [3] que E possède *la propriété de Radon–Nikodym* (RN) s'il ne contient pas de δ-arbre. J. Bourgain et H. Rosenthal ont montré que si E ne possède pas la propriété RN, il ne contient pas nécessairement d'arbre dyadique. La structure de leur exemple est très différente de celle d'un espace réticulé. Il est donc naturel de se demander si le même phénomène est possible même dans le cas d'un espace réticulé. Un espace qui ne contient pas d'arbre dyadique ne contient pas de copie de $c_0(\boldsymbol{N})$ ni de L^1. Or l'auteur a construit [5] un espace réticulé qui ne possède pas la propriété RN, mais ne contient de copies ni de $c_0(\boldsymbol{N})$ ni de L^1. Il est toutefois possible de montrer que cet espace contient des arbres dyadiques.

Dans ce travail on va améliorer les résultats de [2] et [5] en prouvant le résultat énoncé dans le résumé.

II. Le lemme de base. Pour que E ne possède pas la propriété RN, il doit contenir un arbre. Chaque fonction f_s est barycentre de fonctions $(f_{s,i})_{i\in I_{n+1}}$. On va appliquer une idée très puissante de [2]: les $(f_{s,i})$ seront choisis de sorte que chaque combinaison linéaire des $f_{s,i}$ soit somme d'une fonction presque constante et d'une fonction à support très petit. Dans toute la suite on fixe un espace probabilisé standard Ω muni d'une probabilité λ. Etant donné une fonction f sur Ω, on pose $\{f>0\}=\{\omega\in\Omega;\ f(\omega)>0\}$.

Le lemme suivant utilise une idée de W. Roberts [4].

LEMME 1. *Soit $\varepsilon>0$. Il existe un ensemble fini I, des fonctions mesurables bornées $(f_i)_{i\in I}$ sur Ω, et une application continue $\theta\colon(\boldsymbol{R}^+)^I\to\boldsymbol{R}$, qui vérifient les conditions suivantes*

(2.1) $\forall i\in I, f_i\geqslant 0, \int f_i d\mu=1,\ \lambda\{f_i>0\}\leqslant\varepsilon.$

(2.2) *Pour toute famille $(a_i)_{i\in I}\in(\boldsymbol{R}^+)^I$, il existe une famille $(\beta_i)_{i\in I}\in(\boldsymbol{R}^+)^I$ de sorte que l'on ait une décomposition de la forme*

$$\sum_{i\in I}a_if_i=g+\sum_{i\in I}\beta_if_i$$

avec $\|g-\theta((a_i))\|_2\leqslant\varepsilon,\ \lambda\{\sum\beta_if_i>0\}\leqslant\varepsilon$ *où* $\|\cdot\|_2$ *désigne la norme dans* $L^2(\lambda)$.

(2.3) *Il existe* $0\leqslant g_i\leqslant f_i$ *avec* $\|g_i\|_1\geqslant 1-\varepsilon$ *et des* $(\gamma_i)_{i\in I}$ *avec*

$$\forall i,\ \gamma_i\geqslant 0;\ \sum_{i\in I}\gamma_i=1;\ \Big\|1-\sum\gamma_ig_i\Big\|_2\leqslant\varepsilon.$$

Preuve. Soit p un entier tel que $p\geqslant 10\ \varepsilon^{-4}$. Soit $(A_l)_{l\leqslant p}$ une suite disjointe d'ensembles mesurables de Ω, avec $\lambda(A_l)=p^{-l}$. On pose $h_l=p^l\chi_{A_l}$. Soit J un ensemble fini, tel que

$$4\varepsilon^{-2}\frac{p^{p'-1}}{p-1}\leqslant\operatorname{card}J\leqslant 5\ \varepsilon^{-2}p^{p'-2}. \tag{2.4}$$

On pose $I=J\times[1,p]$, et on considère des fonctions $(h_{j,l})_{(j,l)\in I}$ de sorte que pour j fixé, les $(h_{j,l})_{l\leqslant p}$ aient même loi conjointe que les $(h_l)_{l\leqslant p}$, et que les algèbres engendrées par les $(h_{j,l})_{l\leqslant p}$ soient indépendantes. On pose, pour $(j,k)\in I$:

$$f_{j,k}=\frac{1}{p-k+1}\sum_{k\leqslant l\leqslant p}h_{j,l}.$$

On a $\int f_{j,k}d\lambda=1$, et $\lambda(\{f_{j,k}>0\})\leqslant\sum_{1\leqslant l\leqslant p}p^{-1}\leqslant 1/(p-1)\leqslant\varepsilon$. Ce qui montre que (2.1) est vérifiée. Puisque $p\geqslant 10\ \varepsilon^{-4}$ il existe un entier p' tel que

$$p'\geqslant p(1-\varepsilon/2);\qquad p-p'\geqslant\varepsilon^{-3}/4. \tag{2.5}$$

Pour $j\in J$, posons

$$g_j=1/p\sum_{1\leqslant l\leqslant p'}h_{l,j}.$$

On a $g_j\leqslant f_{j,p}$ et $\int g_jd\lambda=p'/p$. Les g_j étant indépendantes, on a

$$\Big\|\frac{1}{\operatorname{card}J}\sum_{j\in J}g_j-\frac{p'}{p}\Big\|^2\leqslant(\operatorname{card}J)^{-1}\int g_1^2d\lambda.$$

Or

$$\int g_1^2d\lambda=\frac{1}{p^2}\sum_{l\leqslant p'}p^l\leqslant\frac{p^{p'-1}}{(p-1)},$$

et puisque $|p'/p-1|\leqslant\varepsilon/2$, on a

$$\Big\|\frac{1}{\operatorname{card}J}\sum g_j-1\Big\|_2\leqslant 1.$$

On en déduit donc que la condition (2.3) est réalisée, en posant $g_{(j,p)}=g_j$ et $g_{(j,q)}=f_i$ pour $q\neq p$, $\gamma_{j,p}=1/\operatorname{card}J$ et $\gamma_{j,q}=0$ pour $q\neq p$. Passons à la définition de θ. Pour tout élément $(a_{j,k})\in(\boldsymbol{R}^+)^I$, on peut écrire

$$\sum_{(j,k)\in I}a_{j,k}f_{j,k}=\sum_{j\in J}\sum_{1\leqslant k\leqslant p}\beta_{j,k}h_{j,k},$$

où

$$\beta_{j,k}=\sum_{l\leqslant k}\frac{1}{p-l+1}a_{j,l}.$$

Ainsi on a $\sum_{j,k}\beta_{j,k}=1$, et pour tout j, la fonction $k\to\beta_{j,k}$ est croissante. Pour $k\leqslant p$, posons

$$\eta_k=p^{-2k}\varepsilon^2;\qquad\gamma_{j,k}=\operatorname{Inf}(\eta_k,\beta_{j,k});\qquad\delta_{j,k}=\beta_{j,k}-\gamma_{j,k}. \tag{2.6}$$

On pose

$$\theta((a_{j,k}))=\sum_{(j,k)\in I}\gamma_{j,k}.$$

C'est une fonction continue de $(a_{j,k})$. On pose $g=\sum_{(j,k)\in I}\gamma_{j,k}h_{j,k}$. On a

$$\|g-\theta\|_2^2\leqslant\sum_{j,k}\gamma_{j,k}^2p^{2k}.$$

Or $\gamma_{j,k}p^{2k}\leqslant\eta_kp^{2k}\leqslant\varepsilon^2$, et d'autre part, $\gamma_{j,k}\leqslant\beta_{j,k}$, d'où $\sum_{j,k}\gamma_{j,k}\leqslant 1$. On a donc $\|g-\theta\|_2\leqslant\varepsilon$. On a

$$f-g=\sum_{(j,k)\in I}\delta_{j,k}h_{j,k}.$$

Puisque η_k est une fonction décroissante de k, pour tout j la fonction

$k \to \delta_{j,k}$ est croissante. On en déduit sans peine que l'on peut écrire

$$f-g = \sum_{(j,k)\in I} a'_{j,k} f_{j,k} \quad \text{pour} \quad (a'_{j,k}) \in (\boldsymbol{R}^+)^I.$$

Pour chaque $j \in J$, désignons par k_j le premier indice k tel que $\delta_{j,k} > 0$, où $k_j = p$ si $\delta_{j,p} = 0$. On a donc $\eta_{k_j} < \beta_{j,k_j}$ si $k_j < p$. On a

$$f-g = g_1 + g_2$$

avec

$$g_1 = \sum_{j\in J', k_j \leqslant k} \delta_{j,k} h_{j,k},$$

$$g_2 = \sum_{j\in J'', k_j \leqslant k} \delta_{j,k} h_{j,k},$$

où $J' = \{j \in J;\ k_j \leqslant p'\}$, $J'' = J \setminus J'$. On a

$$\lambda\{g_1 > 0\} \leqslant \sum_{i\in J', k_j \leqslant k \leqslant p'} p^{-k} \leqslant \frac{p}{p-1} \sum_{k_j \leqslant p'} p^{-k_j}.$$

Or

$$p^{-k_j} = \varepsilon^{-2}\eta_{k_j} \leqslant \varepsilon^{-2}\beta_{j,k_j}.$$

Pour $k \geqslant k_j$, on a $\beta_{j,k} \geqslant \beta_{j,k_j}$. Puisque $\sum_{j\in J, k \leqslant p} \beta_{j,k} = 1$, on a $(p-p') \sum_{J'} \beta_{j,k_j} \leqslant 1$, d'où $\sum_{J'} \beta_{j,k_j} \leqslant \varepsilon^3/4$, d'où $\lambda\{g_1 > 0\} \leqslant \varepsilon/2$, puisque $p/(p-1) \leqslant 2$.

D'autre part, on a

$$\lambda\{g_2 > 0\} \leqslant \operatorname{card} J \frac{p}{p-1} p^{-p'-1} \leqslant 10\, \varepsilon^{-2} p'^{-1} \leqslant \varepsilon/2. \ \blacksquare$$

La preuve précédente semble en première lecture bien artificielle. Or en fait on y est conduit assez naturellement. La seule manière explicite connue de construire une famille (f_i) vérifiant (2.1) et les deux conditions suivantes:

(2.7) La fonction 1 est presque moyenne des f_i.

(2.8) Toute combinaison convexe des f_i est la somme d'une fonction presque constante et d'une fonction nulle sur presque tout l'espace, est d'utiliser des fonctions de la forme

$$f_j = \frac{1}{p} \sum_{l \leqslant p_1} h_{j,l}.$$

Mais alors la condition (2.2) oblige à mettre les fonctions

$$f_{j,k} = \frac{1}{p-k+1} \sum_{k \leqslant l \leqslant p} h_{j,l}$$

dans la famille. Pour que la condition (2.7) soit vérifiée, il faut prendre $\operatorname{card} J$ du moins de l'ordre de $a_p \varepsilon^{-2}$. Mais alors il existe des combinaisons convexes des $h_{j,p}$ qui ne sont pas proches en mesure d'une fonction constante. La solution consiste à prendre $\operatorname{card} J$ sensiblement plus petit que $a_p \varepsilon^{-2}$, puis à supprimer l'ensemble où f_j est trop grand, c'est-à-dire à considérer g_j donnée par (2.5), et à remplacer (2.7) par (2.3). On est alors conduit naturellement à la preuve du lemme 1.

III. Construction de l'espace E. Par induction sur n, on va construire des ensembles finis (I_n), des fonctions bornées $(f_i^n)_{i\in I_n}$ sur Ω, et une suite (ε_n) de réels > 0, tels que les conditions suivantes soient vérifiées:

(3.1) $$\forall n,\ \forall i \in I_n,\ f_i^n \geqslant 0,\ \int f_i^n d\lambda = 1,\ \lambda(\{f_i^n > 0\}) \leqslant \varepsilon_n.$$

(3.2) L'algèbre engendrée par les $(f_i^n)_{i\in I_n}$ est indépendante de l'algèbre $\mathscr{A}_n$ engendrée par les $(f_i^k)_{k<n, i\in I_k}$,

(3.3) Il existe des $g_i^n \leqslant f_i^n$ et une combinaison convexe $g^n = \sum \alpha_i^n g_i^n$ des g_i^n telle que $\|g^n - 1\|_2 < \varepsilon_{n+1}$.

(3.4) Si l'on pose

$$H_n = \operatorname{cone}\Big\{\prod_{l\leqslant n} f_{i_l}^l;\ i_l \in I_l, \forall l \leqslant n\Big\},$$

il existe une application continue φ_{n-1} de H_n dans H_{n-1} telle que pour $z \in H_n$, on puisse écrire

$$z = \varphi_{n-1}(z) + h + u,$$

où $\|h\|_2 \leqslant \varepsilon_n \|z\|_1$ et $u \in H_n$, $\lambda\{u > 0\} \leqslant \varepsilon_n$.

(3.5) Si $M_n = \operatorname{Sup}\{\|f\|_\infty, f \in H_n, \int f d\lambda \leqslant 1\}$ on a

$$\varepsilon_n \leqslant \operatorname{Inf}(\varepsilon_{n-1}/4,\ 2^{-2n} M_{n-1}^{-4},\ a_n/10),$$

où

$$a_n = \operatorname{Inf}\{\lambda(A);\ A \in \mathscr{A}_{n-1}, \lambda(A) > 0\}.$$

Pour cela, la construction étant supposée effective au rang n, on utilise le lemme 1 avec $\varepsilon = \varepsilon_{n+1} (M_n \operatorname{card} I_1 \times \ldots \times \operatorname{card} I_n)^{-1}$. Cela donne une famille $(f_i^{n+1})_{i\in I_{n+1}}$, et on peut supposer que (3.2) est satisfaite. Soit T l'ensemble des produits $\prod_{l\leqslant n} f_{i_l}^l$ pour $(i_1, \ldots, i_n) \in I_1 \times \ldots \times I_n$. Tout élément de H_{n+1} s'écrit de manière unique

$$z = \sum_{t\in T, i\in I_{n+1}} a_{t,i} t f_i^{n+1} = \sum_{t\in T} a_t t \Big(\sum_{i\in I_{n+1}} a'_{t,i} f_i^{n+1}\Big),$$

où $\sum_{t,i} a_{t,i} = \|z\|_1$, $a_t = \sum_{i\in I_{n+1}} a_{t,i}$, $a'_{t,i} = a_{t,i}/a_t$ (avec $0/0 = 0$). Pour chaque

$t \in G$, on peut écrire

$$\sum_{i \in I_{n+1}} a_{t,i} f_i^{n+1} = \theta_t + h_t + \sum_{i \in I_{n+1}} \beta_{t,i} f_i^{n+1},$$

où $\theta_t = \theta\big((a_{t,i})_{i \in I_{n+1}}\big)$, $\|h_t\|_2 \leqslant \varepsilon$, $\lambda\{\sum_{i \in I_{n+1}} \beta_{t,i} f_i^{n+1} > 0\} \leqslant \varepsilon$. Posons

$$\varphi_n(z) = \sum_{t \in T} a_t \theta_t t \in H_n,$$

$$h = \sum_{t \in T} a_t t h_t,$$

$$u = \sum_{t \in T, i \in I_{n+1}} \beta_{t,i} t f_i^{n+1}.$$

On a

$$\|h\|_2 \leqslant \sum_{t \in T} a_t \|t h_t\|_2 \leqslant \Big(\sum_{t \in T} a_t\Big) M_n \varepsilon \leqslant \varepsilon_{n+1} \|z\|_1$$

et

$$\lambda\{u > 0\} \leqslant \varepsilon \operatorname{card} T \leqslant \varepsilon_{n+1}.$$

Posons pour $n \geqslant q$

$$\psi_{q,n} = \varphi_{n+1} \circ \ldots \circ \varphi_q \colon H_n \to H_q.$$

Compte tenu du fait que $\varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_q/2$ pour tout n, et qu'ainsi $\sum_{p \geqslant q} \varepsilon_p \leqslant 2\varepsilon_q$, on voit par une induction facile sur q que pour $z \in H_q$ on peut écrire

$$z = \psi_{q,n}(z) + h + u, \tag{3.6}$$

où $\|h\|_2 \leqslant 2\varepsilon_{q+1}\|z\|_1$ et $\lambda\{u > 0\} \leqslant 2\varepsilon_{q+1}$. On définit E comme l'ensemble des $x \in L^1$ tels qu'il existe $A \in \boldsymbol{R}$, $y \in L^2$, et des $z_q \in H_q$ avec

$$|x| \leqslant y + \sum z_q, \qquad \|y\|_2 + \sum \|z_q\|_1 \leqslant A. \tag{3.7}$$

Et on définit $\|x\|$ comme étant l'inf des A vérifiant cette condition. Il est clair que E est un espace de Banach réticulé. De plus pour $x \in E$ on a

$$\|x\|_1 \leqslant \|y\|_1 + \sum \|z_q\|_1 \leqslant A,$$

d'où $\|x\|_1 \leqslant \|x\|$.

IV. Etude de E.

PROPOSITION. *E ne possède pas la propriété* RN.

Preuve. Conservons les notations de la construction. Pour $s = (i_1, \ldots, i_n) \in I_1 \times \ldots \times I_n$, posons

$$g_s = g_{i_1}^1 \cdot \ldots \cdot g_{i_n}^n.$$

On a $\int g_s d\lambda \geqslant (1-2^{-2}) \ldots (1-2^{-n}) \geqslant 1/2$ d'après (3.3), d'où $\|g_s\|_E \geqslant \|g_s\|_1 \geqslant 1/2$. On a aussi

$$\|g_s\|_E \leqslant \|f_{i_1}^1 \cdot \ldots \cdot f_{i_n}^n\|_E \leqslant 1.$$

D'autre part

$$\Big\|g_s - \sum_{i \in I_{n+1}} a_i^{n+1} g_{s,i}\Big\|_E \leqslant \Big\|g_s - \sum_{i \in I_{n+1}} a_i^{n+1} g_{s,i}\Big\|_2$$
$$\leqslant M_n \Big\|1 - \sum_{i \in I_{n+1}} a_i^{n+1} g_i^{n+1}\Big\|_2 \leqslant M_n \varepsilon_{n+1} \leqslant 2^{-n-1}$$

ainsi $(g_s)_{s \in I}$, où $I = \bigcup_n I_1 \times \ldots \times I_n$ est un "arbre approché". D'autre part soit $s \in I_1 \times \ldots \times I_n$ et $i \in I_{n+1}$. Posons $A = \chi_{\{g_{s,i} > 0\}}$. On a

$$\|g_s - g_{s,i}\|_E \geqslant \|\chi_A(g_s - g_{s,i})\|_E \geqslant \|g_{s,i}\|_E - \|\chi_A g_s\|_2$$
$$\geqslant \|g_{s,i}\|_E - 2^{-n} \geqslant 1/2 - 2^{-n}$$

d'après (3.5). ■

Le lemme suivant permet de remplacer l'écriture (3.7) par une écriture plus canonique. Ce lemme éclaircit la structure de E, et introduit sous une forme simplifiée la technique assez complexe qui permettra de prouver que E ne contient pas d'arbre dyadique.

LEMME. *Soit $x \in E$, $\|x\| \leqslant 1$. Il existe $y \in L^2$, une suite $t_p \in H_p$, une suite (u_l) de E de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(4.1) $\|y\|_2 \leqslant 5$.

(4.2) $\forall p \geqslant 1$, $\varphi_p(t_{p+1}) = t_p$, $\int t_p d\lambda \leqslant 2$.

(4.3) $\lambda\{u_l > 0\} \leqslant \varepsilon_l$.

(4.4) $\|u_p\|_1 \leqslant \int t_{p+1} d\lambda - \int t_p d\lambda + 2\varepsilon_{p+1}$.

(4.5) $\forall p$, $|x| \leqslant y + t_p + \sum_{p \leqslant l} u_l$.

Preuve. *1ère étape.* Pour une fonction $g \in H_n$, telle que $\|g\|_1 \leqslant 1$, on a, avec les notations de la construction,

$$g \leqslant |g - gg^n| + gg^n \quad \text{et} \quad gg^n \in H_{n+1}, \int gg^n d\lambda \leqslant 1,$$
$$\|g - gg^n\|_2 \leqslant \|g\|_\infty \|1 - g^n\|_2 \leqslant M_n \varepsilon_{n+1}.$$

On a donc $g = g' + g''$ ou $g' \in H_{n+1}$, $\|g'\|_1 \leqslant 1$, $\|g''\|_2 \leqslant M_n \varepsilon_{n+1}$. Par itération, pour tout $q \geqslant n$, on peut donc écrire

$$g = g' + \sum_{r=n}^{q-1} g_r'' \text{ où } g' \in H_q, \|g'\|_1 \leqslant 1, \|g_r''\|_2 \leqslant M_r \varepsilon_{r+1}.$$

2ème étape. Par définition, on a $|x| \leqslant y' + \sum_{q \geqslant 1} z_q$, où $z_q \in H_q$, $\sum \|z_q\|_1$

$\leqslant 1$ et $\|y'\|_2 \leqslant 1$. Soit (q_n) une suite telle que $\sum\limits_{q \geqslant q_n} \|z_q\|_1 \leqslant 2^{-2n}$. Soit

$$A_n = \Big\{\sum_{q > q_n} z_q \leqslant 2^{-n}\Big\}; \qquad v_n = \chi_{A_n^c} \sum_{q > q_n} z_q.$$

On a $\lambda\{v_n > 0\} \leqslant 2^{-n}$. D'après la première étape, pour $1 \leqslant q \leqslant q_n$ on a $z_q = z'_{q,n} + \sum\limits_{r=q}^{q_{n-1}} z''_{q,r}$ où $z'_{q,n} \in H_{q_n}$ et $\|z''_{q,r}\|_2 \leqslant M_r \varepsilon_{r+1} \|z_q\|_1$. Posons $y^2 = \sum\limits_{q,r,q \leqslant r} z''_{q,r}$. On a sans peine

$$\|y^2\|_2 \leqslant \Big(\sum_q \|z_q\|_1\Big)\Big(\sum_r M_r \varepsilon_{r+1}\Big) \leqslant 1.$$

Posons $y^3 = y + 1 + y^2$. Ainsi $\|y^3\|_2 \leqslant 3$. Si l'on pose $z''_n = \sum\limits_{q \leqslant q_n} z'_{q,n}$, on a donc

$$|x| \leqslant y^3 + z''_n + v_n, \tag{4.6}$$

où $z''_n \in H_{q_n}$, $\|z''_n\|_1 \leqslant 1$, $\lambda\{v_n \geqslant 0\} \leqslant 2^{-n}$.

3ème étape. Pour tout m, la suite $\psi_{m,q_n}(z''_n) \in H_m$ admet une valeur d'adhérence, puisque H_m est un cône de dimension finie. On peut donc, par extraction de sous-suite, supposer que cette suite converge pour tout m vers $t_m \in H_m$. La définition de ψ_{m,q_n} et la continuité de φ_m montrent que (4.2) est satisfaite. On a, d'après (3.4), $t_n = t_{n-1} + h_{n-1} + u_{n-1}$, où $\|h_{n-1}\|_2 \leqslant \varepsilon_n$, $u_{n-1} \in H_{n-1}$, $\lambda\{u_{n-1} > 0\} \leqslant \varepsilon_{n-1}$. De plus

$$\int u_{n-1} d\lambda \leqslant \int (t_n - t_{n-1}) d\lambda + \|h_{n-1}\|_2$$

ce qui prouve (4.4).

Posons $y = y^3 + \sum h_n + 1$. On a $\|y\|_2 \leqslant 5$. Fixons p, et soit $q \geqslant p$. Pour n assez grand, on a $\|\psi_{q,q_n}(z''_n) - t_q\|_\infty \leqslant 1$; on a donc d'après (4.6)

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant y^3 + t_q + |\psi_{q,q_n}(z''_n) - t_q| + |z''_n - \psi_{q,q_n}(z''_n)| + v_n \\ &\leqslant y^3 + 1 + t_p + \sum_{p \leqslant l \leqslant q-1} (h_l + u_l) + |z''_n - \psi_{q,q_n}(z''_n)| + v_n \\ &\leqslant y + t_p + \sum_{p \leqslant l} u_l + |z''_n - \psi_{q,q_n}(z''_n)| + v_n. \end{aligned}$$

Or d'après (3.1) on a

$$z''_n - \psi_{q,q_n}(z''_n) = h_{q,n} + u_{q,n}$$

où $\|h_{q,n}\|_2 \leqslant 2\varepsilon_q$ et où $\lambda\{u_{q,n} > 0\} \leqslant 2\varepsilon_q$. Ainsi, si on choisi q assez grand, puis n assez grand, on a

$$|x| \leqslant y + t_p + \sum_{p \leqslant l} u_l + h'_q + v'_q$$

où $\|h'_q\|_1 \leqslant 2\varepsilon_q$ et $\lambda\{v'_q > 0\} \leqslant 2^{-q+1}$. Ainsi $\lim\limits_{q\to\infty} h'_q + v'_q = 0$ p.s., ce qui prouve le lemme.

Le lemme précédent donne une suite d'approximation naturelle de x, (par troncation avec $y + t_p$). Sa force est que l'on a un bon contrôle de l'erreur. L'idée pour étudier une martingale $x(s)$ va être de construire des approximations qui soient à peu près des martingales. Pour cela, le fait essentiel suivant sera nécessaire:

LEMME. *Posons $\varepsilon'_n = \varepsilon_n^{1/2}$. Soient $z_1, z_2 \in H_q$, $\|z_1\|_1$, $\|z_2\|_1 \leqslant 1$. Alors pour $q < n$ on a*

$$\Big\|\psi_{q,n}\Big(\frac{z_1 + z_2}{2}\Big) - \frac{1}{2}\psi_{q,n}(z_1) - \frac{1}{2}\psi_{q,n}(z_2)\Big\|_\infty \leqslant 2\varepsilon'_{n+1}.$$

Preuve. Pour $y \in H_q$, on a $z = \psi_{q,n}(z) + h + u$ où $\|h\|_2 \leqslant 2\varepsilon_{q+1}$ et $\lambda\{u > 0\} \leqslant 2\varepsilon_{q+1}$. On a donc

$$\Big|\psi_{q,n}\Big(\frac{z_1 + z_2}{2}\Big) - \frac{1}{2}\big(\psi_{q,n}(z_1) + \psi_{q,n}(z_2)\big)\Big| \leqslant h + u,$$

ou

$$\|h\|_2 \leqslant 4\varepsilon_{q+1}; \qquad \lambda\{u > 0\} \leqslant 4\varepsilon_{q+1}.$$

Ceci montre que la fonction du premier membre est $2\varepsilon'_{q+1}$ sauf au plus sur un ensemble de mesure au plus $6\varepsilon'_{n+1}$. Mais comme cette fonction est mesurable pour la tribu $\mathscr{A}_q$ dont les atomes ont une mesure $> 6\varepsilon'_{q+1}$ d'après (3.5) ceci prouve le lemme.

Soit maintenant $(x(s))$ un arbre dyadique, où $s \in T = \bigcup\limits_n \{0,1\}^n$. On suppose $\|x(s)\| \leqslant 1$ pour tout s.

LEMME. *Pour chaque s, il existe $y(s) \in L^2$, une suite $(t_p(s))$ de H_p et une suite $(u_l(s))$ de E, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(4.7) $\|y(s)\|_2 \leqslant 5$.

(4.8) $\forall p \geqslant 1$, $\varphi_p(t_{p+1}(s)) = t_p(s)$, $\int t_p(s) d\lambda \leqslant 2$.

(4.9) $\lambda\{u_l(s) > 0\} \leqslant \varepsilon_l$.

(4.10) $\|u_p(s)\|_1 \leqslant \|t_{p+1}(s)\|_1 - \|t_p(s)\|_1 + 2\varepsilon_{p+1}$.

(4.11) $\forall p$, $|x(s)| \leqslant y(s) + t_p(s) + \sum\limits_{p \leqslant l} u_l(s)$.

(4.12) $\|\frac{1}{2}\big(t_p(s,1) + t_p(s,0)\big) - t_p(s)\|_\infty \leqslant \varepsilon'_{p+1}$.

(4.13) *Si* $a_p(s) = \lim\limits_n \|t_n(s)\|_1 - \|t_p(s)\|_1$ *on a*

$$\tfrac{1}{2}\big(a_p(s,0) + a_p(s,1)\big) \leqslant a_p(s) + 2\varepsilon'_{p+1}.$$

Preuve. On utilise le résultat de la 2ème étape de la preuve du lemme. Par diagonalisation on voit que l'on peut choisir (q_n) de sorte que pour tout $s \in T$, et pour tout n avec $|s| \leqslant n$ on peut écrire

$$|x(s)| \leqslant y'(s) + z_n(s) + v_n(s),$$

où $z_n(s) \in H_{q_n}$, $\|z_n(s)\|_1 \leqslant 1$, $\lambda\{v_n(s) > 0\} \leqslant 2^{-n}$, $\|y'(s)\|_2 \leqslant 3$. Pour une suite $s' \in \{0,1\}^q$, soit (s, s') la concaténation de s et s'. On a $x(s) = 2^{-q} \sum_{|s'|=q} x(s, s')$. Pour $n \geqslant q \geqslant |s|$, on a donc

$$|x(s)| \leqslant y'_{n,q}(s) + z_{n,q}(s) + v_{n,q}(s), \tag{4.14}$$

où $y'_{n,q}(s) = 2^{-q+|s|} \sum_{|s'|=q-|s|} y(s, s')$ et $z_{n,q}(s)$, $v_{n,q}(s)$ sont définis similairement. On a $z_{n,q}(s) \in H_{q_n}$ et $\lambda\{v_{n,q}(s) > 0\} \leqslant 2^{-n+q}$. Pour $r \geqslant |s|$, posons

$$y'_r(s) = y'_{3r,r}(s), \qquad z'_r(s) = z_{3r,r}(s), \qquad v'_r(s) = v_{3r,r}(s).$$

Notons que $z'_r(s) \in H_{q_{3r}}$ et que pour $|s|+1 \leqslant r$ on a:

$$\tfrac{1}{2}\big(z'_r(s, 0) + z'_r(s, 1)\big) = z'_r(s). \tag{4.15}$$

Par passage à une sous-suite, on peut supposer que pour tout m et tout s, la suite $\varphi_{m,q_{3r}}\big(z'_r(s)\big)$ converge vers $t_m(s) \in H_m$. Grâce à (4.15) et au lemme on voit que (4.12) est vérifiée. D'après (3.4), pour tout n, s, on a $t_n(s) = t_{n-1}(s) + h_{n-1}(s) + u_{n-1}(s)$ où

$$\|h_{n-1}(s)\|_2 \leqslant \varepsilon_n, \qquad u_{n-1} \in H_{n-1}, \qquad \lambda\{u_{n-1} > 0\} \leqslant \varepsilon_{n-1}$$

et de plus (4.10) est satisfaite. Posons $y''(s) = \sum_{n \geqslant 2} h_{n-1}(s)$. Fixons p, et soit $q \geqslant p$. Pour r assez grand, on a $\big\|t_q(s) - \varphi_{q,q_{3r}}\big(z'_r(s)\big)\big\|_\infty \leqslant 1$, et donc

$$\begin{aligned}|x(s)| &\leqslant y'_r(s) + t_q(s) + \big|\varphi_{q,q_{3r}}\big(z'_r(s)\big) - t_q(s)\big| + \big|z_r(s) - \varphi_{q,q_{3r}}\big(z'_r(s)\big)\big| + v'_r(s)\\ &\leqslant y'_r(s) + 1 + t_p(s) + \sum_{p \leqslant l \leqslant q} \big(h_l(s) + u_l(s)\big) + \big|z_r(s) - \varphi_{q,q_{3r}}\big(z'_r(s)\big)\big| + v'_r(s).\end{aligned}$$

Or d'après (3.5)

$$\big|z_r(s) - \varphi_{q,q_{3r}}\big(z'_r(s)\big)\big| \leqslant h_{q,r} + u_{q,r},$$

où $\|h_{q,r}\|_1 \leqslant 2\varepsilon_q$, $\lambda\{u_{q,r} > 0\} < 2\varepsilon_q$. Finalement on a

$$|x(s)| \leqslant 1 + y'_r(s) + y''(s) + t_p(s) + \sum_{p \leqslant l} u_l(s) + h_{q,r}(s) + u_{q,r} + v'_r(s),$$

où $\|h_{q,r}(s)\|_1 \leqslant 2\varepsilon_q$ et $\{v_r(s) > 0\} \leqslant 2^{-r}$. Il suffit maintenant de faire tendre q et r convenablement vers l'infini, et de prendre pour $y(s)$ une valeur d'adhérence faible dans L^2 de $1 + y'_r(s) + y''(s)$ pour obtenir (4.11). Finalement, (4.13) résulte de (4.12).

Théorème. *E ne contient pas d'arbre dyadique.*

Preuve. Supposons que $\|x(s) - x(s, a)\| \geqslant \delta$ pour $a \in \{0, 1\}$. Soit p un entier tel que $a_p(\varnothing) < 10^{-2}\delta$. En prenant p assez grand, on peut supposer que $\varepsilon'_{p+1} M_p^2 \leqslant \delta^3 10^{-10}$. Il existe alors un entier q tel que $q\varepsilon'_p \leqslant \delta 10^{-3}$ et $M_p^2 \leqslant q\delta^2 10^{-3}$. Pour chaque $s \in T$ avec $|s| = q$ on peut écrire d'après (4.11) $x(s) = x_1(s) + x_2(s)$, où

$$|x_1(s)| \leqslant y(s) + t_p(s) \quad \text{et} \quad |x_2(s)| \leqslant \sum_{p \leqslant l} u_l(s).$$

D'après (4.10), on a donc

$$|x_2(s)| \leqslant a_p(s) + 4\varepsilon_{n+1}. \tag{4.16}$$

On a donc $\|x_1(s)\|_2 \leqslant 5 + M_p \leqslant 2M_p$. Pour $n \leqslant q$, désignons pour $\mathscr{B}_n$ l'algèbre des éléments de $\{0, 1\}^q$ qui ne dépendent que des n premières coordonnées. On munit $\{0, 1\}^q$ de la probabilité naturelle P. On désigne par $(z_n)_{n \leqslant q}$ l'unique martingale relative aux $\mathscr{B}_n$ telle que $z_q(s) = x_1(s)$ pour $s \in \{0, 1\}^q$. On a, par un calcul élémentaire,

$$\int_{\{0,1\}^q} \sum_{n \leqslant q} \|z_n(s) - z_{n-1}(s)\|_2^2 \, dP \leqslant \int \|z_q(s)\|_2^2 \, dP \leqslant 4M_p^2.$$

Soit

$$A = \Big\{s;\ \sum_{n \leqslant q} \|z_n(s) - z_{n-1}(s)\|_2^2 \leqslant 10 M_p^2\Big\}. \tag{4.17}$$

On a donc $P(A) \geqslant 3/5$. D'après (4.13), on a

$$2^{-q} \sum_{s \in \{0,1\}^q} a_p(s) \leqslant 2q\varepsilon'_{p+1} + a_p(\varnothing) \leqslant 3\,10^{-3}\delta.$$

Considérons l'unique martingale (b_n) $\{0, 1\}^q \to \boldsymbol{R}$ relative aux algèbres $\mathscr{B}_n$ telle que $b_q(s) = a_p(s)$ pour tout s. L'inégalité maximale montre que $P(B) \geqslant 1/2$, où

$$B = \{s \in \{0, 1\}^q;\ \operatorname*{Sup}_{n \leqslant q} b_n(s) \leqslant 2b_0(s) \leqslant 10^{-2}\}.$$

Il existe donc $s \in A \cap B$. D'après (4.17), il existe $n \leqslant q$ tel que

$$\|z_n(s) - z_{n-1}(s)\|_2^2 \leqslant 10 M_p^2 / q \leqslant \delta^2 10^{-2}.$$

On a donc

$$\|z_n(s) - z_{n-1}(s)\| \leqslant \delta 10^{-1}. \tag{4.18}$$

Soit s_1 (resp. s_2) la suite formée des n (resp. $n-1$) premièrs termes de s. On a par additivité et puisque $|x(s) - x_1(s)| \leqslant |x_2(s)|$ pour tout s:

$$|x(s_1) - z_n(s)| \leqslant 2^{-q+n} \sum |x_2(s_1, s')|,$$

où la sommation est effectuée pour tous les $s' \in \{0, 1\}^{q-n}$. On a donc, d'après (4.16) et puisque $s \in B$

$$\|x(s_1) - z_n(s)\| \leqslant 4\varepsilon_{p+1} + b_n(s) \leqslant 4\varepsilon_{p+1} + 10^{-2}\delta.$$

De même on a

$$\|x(s_2) - z_{n-1}(s)\| \leqslant 4\varepsilon_{p+1} + 10^{-2}\delta.$$

D'où enfin, grâce à (4.18) on a

$$\|x(s_1) - x(s_2)\| \leqslant \delta/10 + \delta/50 + 8\varepsilon_{p+1} < \delta;$$

une contradiction. Le résultat est démontré.

Remarque. Un résultat de J. Bourgain [1] implique alors que tout opérateur de L^1 dans E possède la propriété de Dunford–Pettis.

Bibliographie

[1] J. Bourgain, *Dunford–Pettis operators on L^1 and the* RNP, Israel J. Math. 37 (1980), 34–47.

[2] J. Bourgain, H. Rosenthal, *Martingales valued in certain subspaces of L^1*, ibid. 37 (1980), 54–75.

[3] W. Roberts, *Compact convex sets with no extreme points in the spaces $L^p([0, 1])$, $0 \leqslant p < 1$*, à paraître.

[4] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, selected topics*, Lecture Notes in Math. n° 485, Springer-Verlag, 1975.

[5] M. Talagrand, *Sur la propriété de Radon–Nikodym dans les espaces de Banach réticulés*, C. R. Acad. Sci. Paris 288 (1979), 907–910.

UNIVERSITÉ PARIS VI, EQUIPE D'ANALYSE
Tour 46-0 4ème Etage
4, Place Jussieu, 75230-Paris Cedex 05

Received June 4, 1982 (1766)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXVI. (1983)

Unconditional decompositions and local unconditional structures in some subspaces of L_p, $1 \leqslant p < 2$

by

ANDRZEJ BORZYSZKOWSKI* (Gdańsk)

Abstract. For every integer $k \geqslant 2$ and for every p, $1 \leqslant p < 2$, there exists a subspace of l_p which is an unconditional sum of a sequence of k-dimensional subspaces and k is the least integer with this property. The method of proof involves the notion of local unconditional structure of order $\leqslant k$. In fact, we prove a stronger claim, thus improving upon the results of T. Ketonen [9].

1. Introduction and main results. Let X be a Banach space and let k be a positive integer. We say that X has *local unconditional structure of order* $\leqslant k$ (in short $\mathscr{U}_k(X) < \infty$) if there is a constant C such that for every finite dimensional subspace E of X there are operators $T_j\colon E \to X$, $j = 1, \ldots, n$, for which rank $T_j \leqslant k$, $i_E = \sum_{j \leqslant N} T_j$ and

$$\sup_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{j \leqslant N} \varepsilon_j T_j \Big\| \leqslant C.$$

Here i_E stands for the inclusion map, $i_E\colon E \hookrightarrow X$. The infimum of all numbers C with that property is denoted by $\mathscr{U}_k(X)$.

It is well known (cf. proof of Lemma 4.1 below) that $\mathscr{U}_k(X) < C < \infty$ is equivalent to the following property.

Given a finite dimensional subspace E of X, there are a space V and operators $A\colon E \to V$, $B\colon V \to X$ such that $i_E = B \circ A$, V has a Schauder decomposition $\{V_j\}_{j \leqslant N}$, $\dim V_j \leqslant k$ for $j \leqslant N$ and $\|A\| \cdot \|B\| \operatorname{unc}\{V_j\}_{j \leqslant N} \leqslant C$. Here $\operatorname{unc}\{V_j\}_{j \leqslant N}$ stands for the unconditional constant of the decomposition $\{V_j\}_{j \leqslant N}$.

This property in the case $k = 1$ was introduced by Gordon and Lewis [5]. They gave the first examples of Banach spaces for which $\mathscr{U}_1(X) = \infty$. The method of [5] depends on properties of a certain parameter which is now denoted by $\mathrm{gl}(X)$ (cf. Proposition 1.3 below). Other methods were developed in [7] and [6]. The case where X is a subspace of L_1 presented

* The present paper is a part of the author's Ph.D. thesis prepared under the supervision of Professor Tadeusz Figiel at the Institute of Mathematics of Polish Academy of Sciences.