Il existe $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon, N) < \varepsilon$ tel que chaque $B(z_{n_k}, \varepsilon)$ contiennent un point ζ_{n_k} de $\boldsymbol{D}$ vérifiant

$$d(\zeta_{n_k}, \sigma) \geqslant \varepsilon' \tag{3.8}$$

et donc par (2) de la proposition 1.1

$$|U_\sigma(\zeta_{n_k})| \geqslant \gamma'. \tag{3.9}$$

Considérons alors $\sigma_k = \sigma \setminus B(z_{n,k}, \varepsilon)$ et U_k le produit ayant pour zéros les points de σ_k, il vient

$$|U_k(\zeta_{n_k})| \geqslant |U_\sigma(\zeta_{n,k})| \geqslant \gamma' \tag{3.10}$$

et si l'on écrit σ comme une union finie de suites séparées par 2ε: $\sigma = \bigcup_{i=1}^{M} s_i$ où $i = 1, 2, \ldots, M$, $d(z, z') \geqslant 2\varepsilon$ pour $z, z' \in s_i$, $z \neq z'$ alors (3.10) implique que s_i est d'interpolation.

Références

[1] L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions*, Amer. J. Math. 80 (1958).

[2] — *The Corona theorem*, Proc. 15th Scandinavian Congress, Oslo 1968.

[3] W. Rudin, *Functions theory in polydiscs*, W. A. Benjamin, Inc., New York 1969.

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Received January 20, 1981 (1660)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIV. (1982)

Die atomare Struktur topologischer Boolescher Ringe und s-beschränkter Inhalte

von

HANS WEBER (Konstanz)

Abstract. Starting point of this paper are the following questions concerning a (e.g. group-valued) finitely additive measure μ on a Boolean ring:

(1) When is the range of μ connected?

(2) When is the range of μ compact?

(3) When can μ be uniquely represented as sum of an atomless and an atomic finitely additive measure?

To answer this questions satisfactorily, it is necessary to define atomless and atomic measures in a new way. First we study (locally) s-bounded atomless and atomic in monotone ring topologies and then we deduce from the obtained results theorems about locally s-bounded finitely additive measures which answer questions (1), (2), (3).

0. Einleitung. Ausgangspunkt dieser Arbeit sind die folgenden Fragen:

(1) Wann ist der Wertebereich eines (z.B. gruppenwertigen) Inhalts zusammenhängend?

(2) Wann ist der Wertebereich eines Inhalts kompakt?

(3) Wann läßt sich ein Inhalt μ (in eindeutiger Weise) darstellen als Summe $\mu = \mu_l + \mu_a$ eines atomlosen Inhalts μ_l und eines atomaren Inhalts μ_a?

Für alle drei Fragen ist ein hier neu eingeführter Begriff des atomlosen und atomaren Inhalts von Bedeutung. Wir erläutern das zunächst an der Frage (3).

Das klassische Resultat, daß sich jedes reellwertige Maß auf einem σ-Ring eindeutig als Summe eines atomlosen und eines atomaren Maßes schreiben läßt, wurde von Hoffmann-Jørgensen ([5], Theorem 6) verallgemeinert für absolut stetige Maße mit Werten in einem lokalkonvexen Vektorraum und von Musiał ([12], Theorem 1) für gruppenwertige Maße, die die "countable chain condition" (kurz: ccc) erfüllen. Hoffmann-Jørgensen zeigt durch Beispiele ([5], Example 2 und 3), daß eine naheliegende Verallgemeinerung dieser Aussage für beliebige Maße mit Werten in lokalkonvexen Räumen i.allg. nicht richtig ist. Andererseits ist — wie in dieser Arbeit gezeigt wird — ein zu dem klassischen Resultat analoger Satz noch richtig für einen lokal s-beschränkten[1] Inhalt μ auf einem Booleschen Ring $\mathfrak{R}$, der bez. der monotonen Ringtopologie ($=$ FN-Topologie), die in üblicher Weise (vgl. Abschnitt 6) von μ auf $\mathfrak{R}$ induziert wird, vollständig ist; dabei wird "μ ist atomlos (atomar)" im klassischen Sinne verstanden, nämlich daß der Quotientenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}(\mu)$ von $\mathfrak{R}$ nach dem Ideal der μ-Nullmengen im Booleschen Sinne atomlos (atomar) ist. In den genannten Sätzen von Hoffmann-Jørgensen und Musiał ist μ ein Maß auf einem σ-Ring $\mathfrak{R}$, die von μ auf $\mathfrak{R}$ induzierte monotone Ringtopologie erfüllt wegen der dort gemachten Voraussetzungen (absolute Stetigkeit in [5], ccc in [12]) nach ([4], Corollary 1.3) das erste Abzählbarkeitsaxiom und ist daher tatsächlich vollständig. Die erwähnten Gegenbeispiele von Hoffmann-Jørgensen zeigen, daß der klassische Begriff von atomlosen (atomaren) Maßen in allgemeineren Situationen nicht mehr geeignet ist. Daher wird in dieser Arbeit eine neue Definition von atomlosen (atomaren) Inhalten angegeben, die im vollständigen Fall mit der üblichen übereinstimmt: Ein Inhalt auf einem Booleschen Ring heißt atomlos (atomar), wenn eine bestimmte Fortsetzung von $\tilde{\mu}$, welche eine vollständige monotone Ringtopologie induziert, im klassische Sinnen atomlos (atomar) ist. Bei dieser Begriffsbildung ist eine eindeutige Zerlegung im Sinne der Frage (3) für jeden lokal s-beschränkten Inhalt auf einem Booleschen Ring möglich; der Beweis wird auf den vollständigen Fall zurückgeführt.

Verschiedene Autoren haben die klassische Definition von "atomlos" ersetzt durch Begriffsbildungen, die der jeweiligen speziellen Situation gut angepaßt sind: Sobczyk und Hammer [13] betrachten im Zusammenhang mit einer Zerlegung positiver (endlich additiver) Inhalte, welche mit der in der Frage (3) genannten vergleichbar ist (s. (6.8), (6.9)), positive Inhalte μ auf einer Algebra, die "stetig" sind, d.h. bez. denen es zu jeder positiven Zahl ε eine endliche Zerlegung $A_1, \ldots, A_n$ der Grundmenge gibt mit $\mu(A_i) < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$; im Zusammenhang mit einer Verallgemeinerung des Satzes von Liapounoff ([11], Theorem 1) untersuchen Hoffmann-Jørgensen [5], Tweddle [15], Lew [10] und andere Maße μ auf einer σ-Algebra mit Werten in einem lokalkonvexen Raum E, die in der Terminologie von [15] "total-atomlos" sind, d.h. für die $\xi\circ\mu$ atomlos ist für jedes stetige Funktional ξ auf E; Constantinescu führt in [1] einen etwas komplizierteren Begriff des Atoms ein, definiert damit "atomlos" und "atomar" für gruppenwertige Maße auf δ-Ringen und beweist mit dieser Begriffsbildung eine Zerlegung im Sinne der Frage (3). Diese drei Begriffe ("stetig", "total-atomlos", "atomlos" im Sinne [1]) sind in den jeweiligen Spezialfällen äquivalent zu dem Begriff "atomlos" dieser Arbeit, was nochmals die Brauchbarkeit dieses Begriffes bestätigt.

[1] Beispiele für lokal s-beschränkte Inhalte sind Maße auf δ-Ringen und $[0, \infty[$-wertige Inhalte.

Für die Resultate dieser Arbeit über Inhalte ist die Struktur des Zielbereichs der Inhalte unwesentlich; die entsprechenden Sätze haben einen rein topologischen Kern. Daher liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit in der Untersuchung topologischer Boolescher Ringe; so wird z.B. im Zusammenhang mit den Fragen (1) und (2) zunächst untersucht, wann ein topologischer Boolescher Ring zusammenhängend bzw. kompakt ist. Die Sätze über Inhalte ergeben sich daraus als einfache Folgerungen.

Ich danke dem Referenten für Verbesserungsvorschläge und Herrn Z. Lipecki (Wrocław) für Literaturhinweise.

1. Grundlagen. *Während der gesamten Arbeit sei $\mathfrak{R}$ ein Boolescher Ring*; wir verwenden wie üblich die Zeichen $\triangle$ (Addition, Subtraktion, symmetrische Differenz), $\wedge$ (Multiplikation, Infimum), $\vee$ (Supremum), $\setminus$ (Differenz), $\leqslant$ (Ordnungsrelation).

Eine Topologie auf $\mathfrak{R}$, bez. der die Subtraktion $\triangle\colon \mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ und die Multiplikation $\wedge\colon \mathfrak{R}\times\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ stetig sind, heißt *Ringtopologie*. Dabei verstehen wir unter einer Ringtopologie stets das zugehörige Nullumgebungssystem $\mathbf{U}$; den Durchschnitt aller zugehörigen Nullumgebungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(\mathbf{U}) := \bigcap \mathbf{U}$.

Unter einer *monotonen Ringtopologie* auf $\mathfrak{R}$ verstehen wir eine Ringtopologie $\mathbf{U}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\forall \mathfrak{U}\in\mathbf{U}\ \exists \mathfrak{V}\in\mathbf{U}\ \forall (a, b)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{V}\ \ a\leqslant b\to a\in\mathfrak{U}.$$

Offenbar ist ein Filter $\mathbf{U}$ auf $\mathfrak{R}$ genau dann eine monotone Ringtopologie, wenn

$$\forall \mathfrak{U}\in\mathbf{U}\ \exists \mathfrak{V}\in\mathbf{U}\ \forall (a, b, c)\in\mathfrak{R}\times\mathfrak{V}^2\ \ a\leqslant b\wedge c\to a\in\mathfrak{U};$$

Drei weitere äquivalente Aussagen sind: $\mathbf{U}$ wird von einer I-Norm erzeugt (s. [16], (5.2.1), (5.2.2), (5.1.5)); $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ ist ein topologischer Ring, in dem jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus konvexen[2] Mengen besitzt; $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ ist ein beschränkter topologischer Ring (i.S. von [6], S. 160).

Während der gesamten Arbeit sei $\mathbf{U}$ eine monotone Ringtopologie auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N} := \mathfrak{N}(\mathbf{U})$.

Für ein Ideal $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{R}$ ist die von $\mathbf{U}$ induzierte Quotiententopologie auf dem Faktorring $\mathfrak{R}/\mathfrak{J}$ eine monotone Ringtopologie. Ist $\mathbf{U}$ hausdorffsch, d.h. $\mathfrak{N} = (0)$, dann ist die Topologie der vollständigen Hülle von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ eine monotone Ringtopologie. Man bestätigt leicht:

Hilfssatz (1.1). *Vor.*: $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *sei hausdorffsch. Beh.*:

(a) *Für* $a\in\mathfrak{R}$ *sind* $\{x\in\mathfrak{R}\colon x\leqslant a\}$ *und* $\{x\in\mathfrak{R}\colon a\leqslant x\}$ *abgeschlossen.*

(b) *Ist* $\mathfrak{M}$ *eine nach oben (bzw. unten) gerichtete Teilmenge von* $\mathfrak{R}$ *und konvergent, dann ist* $\lim\mathfrak{M} = \sup\mathfrak{M}$ (*bzw.* $\lim\mathfrak{M} = \inf\mathfrak{M}$).

[2] Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$ heißt *konvex*, wenn für jedes Paar $(a, b)\in\mathfrak{M}^2$ $\{x\in\mathfrak{R}\colon a\leqslant x\leqslant b\}\subset\mathfrak{M}$.

$(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ (oder kurz: $\mathbf{U}$) heißt *s-beschränkt*, wenn jede Folge paarweise disjunkter[3] Elemente aus $\mathfrak{R}$ bez. $\mathbf{U}$ gegen 0 konvergiert; und *lokal s-beschränkt*, wenn jede ordnungsbeschränkte Folge paarweiser disjunkter Elemente aus $\mathfrak{R}$ bez. $\mathbf{U}$ gegen 0 konvergiert.

HILFSSATZ (1.2). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist s-beschränkt.*

(2) *Für jede Folge* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *in* $\mathfrak{R}$ *ist* $(\sup_{i=1}^{n} a_i)$ *eine* $\mathbf{U}$*-Cauchyfolge.*

(3) *Jede gerichtete Teilmenge von* $\mathfrak{R}$ *ist ein* $\mathbf{U}$*-Cauchysystem.*

Beweis. (3)→(2)→(1) gilt trivialerweise.

(1)→(3): Sei $\mathfrak{M}$ eine etwa nach oben gerichtete Teilmenge von $\mathfrak{R}$ und kein $\mathbf{U}$-Cauchysystem, dann gibt es ein $\mathfrak{U} \in \mathbf{U}$ und zu jedem $a \in \mathfrak{M}$ ein Paar $(a_1, a_2) \in \mathfrak{M}^2$ mit $a_1 \geqslant a$, $a_2 \geqslant a$, $a_1 \triangle a_2 \notin \mathfrak{U}$; für eine Menge $\mathfrak{V} \in \mathbf{U}$ mit $\mathfrak{V} \triangle \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$ ist dann für solche a, a_1, a_2 wegen $a_1 \triangle a_2 = (a_1 \setminus a) \triangle (a_2 \setminus a)$ $a_1 \setminus a \notin \mathfrak{V}$ oder $a_2 \setminus a \notin \mathfrak{V}$. Es läßt sich also eine Folge (a_n) in $\mathfrak{M}$ wählen mit $a_n \leqslant a_{n+1}$, $a_{n+1} \setminus a_n \notin \mathfrak{V}$ $(n \in \mathbf{N})$. Die Elemente $b_n := a_{n+1} \setminus a_n$ sind dann paarweise disjunkt, (b_n) konvergiert nicht gegen 0 bez. $\mathbf{U}$; $\mathbf{U}$ ist also nicht s-beschränkt.

Da $\mathbf{U}$ genau dann lokal s-beschränkt ist, wenn für jedes $a \in \mathfrak{R}$ die auf das Ideal $a \wedge \mathfrak{R} := \{a \wedge x\colon x \in \mathfrak{R}\}$ induzierte Relativtopologie $\mathbf{U}|a \wedge \mathfrak{R}$ s-beschränkt ist, ergibt sich aus (1.2):

HILFSSATZ (1.3). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist lokal s-beschränkt.*

(2) *Für jede ordnungsbeschränkte Folge* (a_n) *in* $\mathfrak{R}$ *ist* $(\sup_{i=1}^{n} a_i)$ *eine* $\mathbf{U}$*-Cauchyfolge.*

(3) *Jede ordnungsbeschränkte, nach oben gerichtete Teilmenge von* $\mathfrak{R}$ *ist ein* $\mathbf{U}$*-Cauchysystem.*

(2)′ *Für jede Folge* (a_n) *in* $\mathfrak{R}$ *ist* $(\inf_{i=1}^{n} a_i)$ *eine* $\mathbf{U}$*-Cauchyfolge.*

(3)′ *Jede nach unten gerichtete Teilmenge von* $\mathfrak{R}$ *ist ein* $\mathbf{U}$*-Cauchysystem.*

Aus (1.1) (b) und (1.2) erhält man:

FOLGERUNG (1.4). *Vor.:* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *sei s-beschränkt, hausdorffsch und (als uniformer Raum) vollständig. Beh.:*

(a) $(\mathfrak{R}, \leqslant)$ *ist eine (als Verband) vollständige Boolesche Algebra.*

(b) *Ist* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$ *abgeschlossen und* $\mathfrak{M}$ *nach unten (oben) gerichtet, dann ist* $\inf \mathfrak{M} \in \mathfrak{A}$ $(\sup \mathfrak{M} \in \mathfrak{A})$.

[3] $a, b \in \mathfrak{R}$ heißen *disjunkt*, wenn $a \wedge b = 0$.

Ist $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ s-beschränkt und vollständig, gibt es also ein $a_0 \in \mathfrak{R}$, so daß $a_0 + \mathfrak{N}$ das größte Element, also das Einselement von $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ ist; für alle $a \in \mathfrak{R}$ ist dann $a \setminus a_0 \in \mathfrak{N}$ (vgl. [3], Theorem 4.8). Entsprechend zu (1.4) erhält man aus (1.1) (b) und (1.3):

FOLGERUNG (1.5). *Vor.:* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *sei lokal s-beschränkt, hausdorffsch und vollständig. Beh.:*

(a) $(\mathfrak{R}, \leqslant)$ *ist Dedekind-vollständig (d.h. jede ordnungsbeschränkte Teilmenge von* $\mathfrak{R}$ *hat in* $\mathfrak{R}$ *ein Supremum und Infimum).*

(b) *Ist* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$ *abgeschlossen,* $\mathfrak{M}$ *nach unten gerichtet (nach oben gerichtet und ordnungsbeschränkt), dann ist* $\inf \mathfrak{M} \in \mathfrak{A}$ $(\sup \mathfrak{M} \in \mathfrak{A})$.

Für $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{R}$ ist

$$\mathfrak{J}^d := \{x \in \mathfrak{R}\colon \forall y \in \mathfrak{J}\ x \wedge y = 0\}$$

ein Ideal und $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^d \subset \{0\}$. Falls $\mathfrak{J}$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$ ist und es zu jedem $z \in \mathfrak{R}$ ein $x \in \mathfrak{J}$ mit $x = \sup(z \wedge \mathfrak{J})$ gibt (also $y := x \triangle z \in \mathfrak{J}^d$, $z = x \triangle y$), dann ist $\mathfrak{J} \triangle \mathfrak{J}^d = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{J}^d = \{0\}$ und daher offenbar durch $(x, y) \mapsto x \triangle y$ ein algebraischer und topologischer Isomorphismus von $(\mathfrak{J}, \mathbf{U}|\mathfrak{J}) \times (\mathfrak{J}^d, \mathbf{U}|\mathfrak{J}^d)$ auf $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ erklärt, d.h. $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ ist algebraische und topologische direkte Summe der Ideale $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}^d$. Hieraus erhält man, indem man (1.5) für $\mathfrak{M} := z \wedge \mathfrak{J}$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{J}$ anwendet:

FOLGERUNG (1.6). $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *sei lokal s-beschränkt, hausdorffsch und vollständig;* $\mathfrak{J}$ *ein abgeschlossenes Ideal in* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$. *Dann ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *algebraische und topologische direkte Summe der abgeschlossenen Ideale* $\mathfrak{J}$ *und* $\mathfrak{J}^d$.

Ist $\mathbf{U}$ sogar s-beschränkt, dann gibt es unter den Voraussetzungen von (1.6) ein $a \in \mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{R} \wedge a$ und $\mathfrak{J}^d = \mathfrak{R} \wedge (e \setminus a)$, wobei $e := \sup \mathfrak{R}$ das Einselement von $\mathfrak{R}$ ist (s. (1.4)).

Ein Kriterium für Vollständigkeit erhält man z.B. aus ([16], Satz (2.2.3)):

Ist $(\mathfrak{R}, \leqslant)$ σ-vollständig und $\mathbf{V}$ ein Filter auf $\mathfrak{R}$ mit abzählbarer Basis, so daß $\forall \mathfrak{B} \in \mathbf{V}\ \exists (\mathfrak{B}_n) \in \mathbf{V}^{\mathbf{N}}\ \forall a \in \mathfrak{R}\ \forall (a_n) \in \mathfrak{R}^{\mathbf{N}}$

$$(a \leqslant \sup_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \forall n \in \mathbf{N}\ a_n \in \mathfrak{B}_n) \to a \in \mathfrak{B},$$

dann ist $\mathbf{V}$ eine monotone Ringtopologie auf $\mathfrak{R}$ und $(\mathfrak{R}, \mathbf{V})$ vollständing.

SATZ (1.7). *Ist* $\mathfrak{R}^*$ *ein dichter Teilring von* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *und* $\mathbf{V}^*$ *eine monotone Ringtopologie auf* $\mathfrak{R}^*$ *mit* $\mathbf{V}^* \subset \mathbf{U}|\mathfrak{R}^*$, *dann gibt es genau eine monotone Ringtopologie* $\mathbf{V}$ *auf* $\mathfrak{R}$ *mit* $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$ *und* $\mathbf{V}|\mathfrak{R}^* = \mathbf{V}^*$.

Beweis. (1) Offenbar ist der von $\{\overline{\mathfrak{B}}^{U}\colon \mathfrak{B} \in \mathbf{V}^*\}$ auf $\mathfrak{R}$ erzeugte Filter $\mathbf{V}$ eine monotone Ringtopologie mit $\mathbf{V} \subset \mathbf{U}$ und $\mathbf{V}|\mathfrak{R}^* = \mathbf{V}^*$; dabei bezeichne $\overline{\mathfrak{B}}^{U}$ den Abschluß von $\mathfrak{B}$ in $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$.

(2) Sei $\mathbf{V}_0$ eine weitere monotone Ringtopologie auf $\mathfrak{R}$ mit $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{U}$ und $\mathbf{V}_0|\mathfrak{R}^* = \mathbf{V}^*$. Da $\mathfrak{R}^*$ auch dicht in $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}_0)$ liegt, ist $\{\overline{\mathfrak{B}}^{\mathbf{V}_0}\colon \mathfrak{B} \in \mathbf{V}^*\}$ eine Basis von $\mathbf{V}_0$ und folglich $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}$. Zum Nachweis von $\mathbf{V}_0 \supset \mathbf{V}$ kann $(\mathfrak{R}, \mathbf{V})$ als hausdorffsch angenommen werden; sonst betrachtet man $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}(\mathbf{V})$ mit den entsprechenden Quotiententopologien. Außerdem kann $(\mathfrak{R}, \mathbf{V})$ als vollständig angenommen werden; sonst betrachtet man eine Fortsetzung $\widetilde{\mathbf{V}}_0$ von $\mathbf{V}_0$ auf die vollständige Hülle $(\widetilde{\mathfrak{R}}, \widetilde{\mathbf{V}})$ von $(\mathfrak{R}, \mathbf{V})$ mit $\widetilde{\mathbf{V}}_0 \subset \widetilde{\mathbf{V}}$ entsprechend (1). Da $\mathfrak{R}^*$ dicht in $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}_0)$ liegt und $(\mathfrak{R}, \mathbf{V})$ vollständig ist, läßt sich $\mathrm{id}_{\mathfrak{R}^*}\colon (\mathfrak{R}^*, \mathbf{V}^*) \to (\mathfrak{R}^*, \mathbf{V}^*)$ eindeutig zu einer stetigen Abbildung $f\colon (\mathfrak{R}, \mathbf{V}_0) \to (\mathfrak{R}, \mathbf{V})$ fortsetzen. Zu $a \in \mathfrak{R}$ gibt es ein gerichtetes System $(a_\iota)_{\iota \in I}$ in $\mathfrak{R}^*$ mit $a = \mathbf{V}-\lim a_\iota$; dann ist wegen $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{V}$ auch $a = \mathbf{V}_0 - \lim a_\iota$ und wegen der Stetigkeit von f

$$f(a) = \mathbf{V}-\lim f(a_\iota) = \mathbf{V}-\lim a_\iota = a.$$

Also ist $f = \mathrm{id}_{\mathfrak{R}}$, $\mathrm{id}_{\mathfrak{R}}\colon (\mathfrak{R}, \mathbf{V}_0) \to (\mathfrak{R}, \mathbf{V})$ stetig, d.h. $\mathbf{V}_0 \supset \mathbf{V}$.

Benutzt man, daß jede monotone Ringtopologie von einem äußeren Inhalt (i.S. von [17]) erzeugt wird (s. z.B. [16], Satz (5.2.4), [3], Theorem 2.7), läßt sich (1.7) noch etwas einfacher beweisen: Ist μ^* ein äußerer Inhalt auf $\mathfrak{R}^*$, der $\mathbf{V}^*$ erzeugt, dann ist die stetige Fortsetzung von μ^* auf $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ ein äußerer Inhalt, der $\mathbf{V}$ erzeugt.

Die Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ aller monotonen Ringtopologien auf $\mathfrak{R}$ bildet einen vollständigen Verband mit der trivialen Topologie als kleinstem und der diskreten Topologie als größtem Element. Die Menge aller (lokal) s-beschränkten monotonen Ringtopologien auf $\mathfrak{R}$ bildet ein vollständiges Ideal in $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$; d, h.: ist $(\mathbf{V}_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ eine Familie (lokal) s-beschränkter monotoner Ringtopologien und $\mathbf{V}$ eine monotone Ringtopologie mit $\mathbf{V} \subset \sup\limits_{\alpha \in \Delta} \mathbf{V}_\alpha$, dann ist auch $\mathbf{V}$ (lokal) s-beschränkt. $V(\mathbf{U})$ bezeichne das Hauptideal

$$V(\mathbf{U}) := \{\mathbf{V} \in \mathfrak{M}\colon \mathbf{V} \subset \mathbf{U}\}.$$

Satz (1.8). *Vor.: $\mathfrak{R}^*$ sei ein dichter Teilring von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$. Beh.:*

(a) *Dann ist durch $\mathbf{V} \mapsto \mathbf{V}|\mathfrak{R}^*$ ein Verbandsisomorphismus von $V(\mathbf{U})$ auf $V(\mathbf{U}|\mathfrak{R}^*)$ definiert.*

(b) *Für $\mathbf{V} \in V(\mathbf{U})$ ist $\mathbf{V}$ genau dann (lokal) s-beschränkt, wenn $\mathbf{V}|\mathfrak{R}^*$ (lokal) s-beschränkt ist.*

(a) folgt sofort aus (1.7); zu (b) vgl. [17], Abschnitt 2.

Trivialerweise gilt

(1.9). *$\mathfrak{N}_0$ sei ein Ideal in $\mathfrak{R}$; für $\mathbf{V} \in V(\mathbf{U})$ bezeichne $\hat{\mathbf{V}}$ die von $\mathbf{V}$ auf $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}_0$ induzierte Quotiententopologie. Dann ist durch $\mathbf{V} \mapsto \hat{\mathbf{V}}$ ein Verbandsisomorphismus von $V(\mathbf{U})$ auf $V(\hat{\mathbf{U}})$ definiert; für $\mathbf{V} \in V(\mathbf{U})$ ist $\mathbf{V}$ genau dann (lokal) s-beschränkt, wenn $\hat{\mathbf{V}}$ (lokal) s-beschränkt ist.*

Im Beweis von Satz (4.6) brauchen wir folgendes Kriterium für s-Beschränktheit.

Hilfssatz (1.10). *Ist $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ abzählbar kompakt, dann ist $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ s-beschränkt.*

Beweis. Sei $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ abzählbar kompakt und nicht s-beschränkt. Dann gibt es eine konvexe Menge $\mathfrak{U} \in \mathbf{U}$ und eine Folge (a_n) paarweise disjunkter Elemente aus $\mathfrak{R} \setminus \mathfrak{U}$. Man wählt dann zu $\mathfrak{U}$ ein $\mathfrak{B} \in \mathbf{U}$ mit $\mathfrak{B} \triangle \mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$, einen Häufungspunkt a von $\{a_n\colon n \in \mathbf{N}\}$ und verschiedene natürliche Zahlen r, s mit $a_r \triangle a \in \mathfrak{B}$ und $a_s \triangle a \in \mathfrak{B}$. Wegen

$$a_r \leqslant a_r \triangle a_s = (a_r \triangle a) \triangle (a_s \triangle a)$$

erhält man $a_r \in \mathfrak{U}$, also einen Widerspruch.

2. Atomlose und atomare monotone Ringtopologien. Ein $\mathfrak{N}$-*Atom* in $\mathfrak{R}$ ist ein Element $a \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{N}$, so daß für jedes $b \in \mathfrak{R}$ $a \wedge b \in \mathfrak{N}$ oder $a \setminus b \in \mathfrak{N}$. $\mathfrak{R}$ heißt $\mathfrak{N}$-*atomlos*, wenn es in $\mathfrak{R}$ keine $\mathfrak{N}$-Atome gibt; und $\mathfrak{N}$-*atomar*, wenn es zu jedem $b \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{N}$ ein $\mathfrak{N}$-Atom a in $\mathfrak{R}$ gibt mit $a \leqslant b$. Ist $\mathfrak{N} = (0)$, so sagt man statt $\mathfrak{N}$-Atom, $\mathfrak{N}$-atomlos, $\mathfrak{N}$-atomar auch kurz *Atom*, *atomlos*, *atomar*.

(2.1). *Sei $\mathfrak{R}^*$ ein dichter Teilring von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ und $a \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{N}$. Dann ist a genau dann ein $\mathfrak{N}$-Atom in $\mathfrak{R}$, wenn für jedes $b \in \mathfrak{R}^*$ $a \wedge b \in \mathfrak{N}$ oder $a \setminus b \in \mathfrak{N}$ ist.*

Beweis. Eine Implikation ist trivial. Sei nun a kein $\mathfrak{N}$-Atom, also für ein $b \in \mathfrak{R}$ $a \wedge b \notin \mathfrak{N}$ und $a \setminus b \notin \mathfrak{N}$. Ist $(c_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ ein gerichtetes System in $\mathfrak{R}^*$ mit $\lim c_\alpha = b$, dann ist $\lim a \wedge c_\alpha = a \wedge b$ und $\lim a \setminus c_\alpha = a \setminus b$, also für ein $c \in \mathfrak{R}^*$ $a \wedge c \notin \mathfrak{N}$ und $a \setminus c \notin \mathfrak{N}$.

(2.2). *Sei $\mathfrak{R}^*$ ein dichter Teilring von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ oder ein Ideal in $\mathfrak{R}$; und $a \in \mathfrak{R}^*$. Dann ist a genau dann ein $\mathfrak{N}$-Atom in $\mathfrak{R}$, wenn a ein $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}^*)$-Atom in $\mathfrak{R}^*$ ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{R}^*$ ein dichter Teilring von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$, folgt das aus (2.1); ist $\mathfrak{R}^*$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$, ist die Behauptung trivial.

Definition. Sei $(\widetilde{\mathfrak{R}}, \widetilde{\mathbf{U}})$ die vollständige Hülle des Quotientenrings $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})/\mathfrak{N}$. Dann nennen wir $\mathbf{U}$ bzw. $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *atomlos* (*atomar*), wenn der Boolesche Ring $\widetilde{\mathfrak{R}}$ atomlos (atomar) ist.

Natürlich lassen sich beide Begriffe auch ohne Benutzung der vollständigen Hülle $(\widetilde{\mathfrak{R}}, \widetilde{\mathbf{U}})$ formulieren; mit (2.1) erhält man: $\mathbf{U}$ ist genau dann atomlos, wenn es zu jedem Cauchysystem $(a_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ in $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$, das nicht gegen 0 konvergiert, ein $b \in \mathfrak{R}$ gibt, so daß weder $(a_\alpha \wedge b)_{\alpha \in \Delta}$ noch $(a_\alpha \setminus b)_{\alpha \in \Delta}$ gegen 0 konvergiert. Eine entsprechende Umformulierung ist im atomaren Fall möglich. Solche Umformulierungen kann man benutzen, um den Zusammenhang zu den entsprechenden Begriffen von Constantinescu [1] herzustellen. Im Rest dieses Abschnitts werden die beiden neuen Begriffe weiter geklärt und Hilfsmittel für das Folgende bereitgestellt.

(2.3). *Ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *vollständig, dann ist* $\mathbf{U}$ *atomlos (atomar) genau dann, wenn* $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$*-atomlos* ($\mathfrak{N}$*-atomar*) *ist.*

Beides bedeutet nämlich, daß $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ atomlos (atomar) ist.

(2.4). *Ist* $\mathfrak{R}^*$ *ein dichter Teilring von* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$, *dann ist* $\mathbf{U}|\mathfrak{R}^*$ *atomlos (atomar) genau dann, wenn* $\mathbf{U}$ *atomlos (atomar) ist.*

$(\mathfrak{R}^*, \mathbf{U}|\mathfrak{R}^*)/\mathfrak{N}(\mathbf{U}|\mathfrak{R}^*)$ und $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})/\mathfrak{N}(\mathbf{U})$ haben nämlich dieselbe vollständige Hülle. Trivialerweise gilt

(2.5). *Ist* $\mathfrak{N}_0$ *ein Ideal in* $\mathfrak{R}$, *dann ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})/\mathfrak{N}_0$ *bez. der Quotiententopologie genau dann atomlos (atomar), wenn* $\mathbf{U}$ *atomlos (atomar) ist.*

Bemerkung (2.6). *Der in* (1.8) (*bzw.* (1.9)) *angegebene Verbandsisomorphismus von* $V(\mathbf{U})$ *auf* $V(\mathbf{U}|\mathfrak{R}^*)$ (*bzw. auf* $V(\hat{\mathbf{U}})$) *bildet nach* (2.4) (*bzw. nach* (2.5)) *das System aller atomlosen (atomaren) monotonen Ringtopologien aus* $V(\mathbf{U})$ *bijektiv auf das System aller atomlosen (atomaren) monotonen Ringtopologien aus* $V(\mathbf{U}|\mathfrak{R}^*)$ (*bzw. aus* $V(\hat{\mathbf{U}})$) *ab.*

Damit werden wir im folgenden häufig Beweise auf den Fall reduzieren, daß $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ vollständig oder hausdorffsch oder beides ist.

Bemerkung (2.7). *Ist* $\mathbf{U}$ *atomlos, dann ist* $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$*-atomlos.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\mathbf{U}$ hausdorffsch ist. $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{U}})$ sei die vollständige Hülle von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$. Ist $\mathbf{U}$ atomlos, also $\tilde{\mathfrak{R}}$ atomlos, dann ist nach (2.2) auch $\mathfrak{R}$ atomlos.

Folgerung (2.8). *Ist* $\mathbf{V}$ *eine atomlose monotone Ringtopologie auf* $\mathfrak{R}$ *mit* $\mathfrak{N}(\mathbf{V}) = \mathfrak{N}(\mathbf{U})$ *und ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *vollständig, dann ist auch* $\mathbf{U}$ *atomlos.*

Beweis. Ist $\mathbf{V}$ atomlos, dann ist nach (2.7) $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$-atomlos, also wegen der Vollständigkeit von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ auch $\mathbf{U}$ atomlos.

Zu (2.7), (2.8) vgl. die Beispiele (7.1) (a), (b), (e) und (7.2).

Hilfssatz (2.9). *Ist* $\mathfrak{J}$ *ein Ideal in* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathbf{U}$ *atomlos (atomar), dann ist auch* $\mathbf{U}|\mathfrak{J}$ *atomlos (atomar).*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\mathbf{U}$ hausdorffsch ist. $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{U}})$ sei die vollständige Hülle von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ und $\bar{\mathfrak{J}}$ der Abschluß von $\mathfrak{J}$ in $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{U}})$. Dann ist $\tilde{\mathfrak{R}}$ atomlos (atomar); also nach (2.2), da $\bar{\mathfrak{J}}$ ein Ideal in $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist, auch $\bar{\mathfrak{J}}$ atomlos (atomar) und daher, da $(\bar{\mathfrak{J}}, \tilde{\mathbf{U}}|\bar{\mathfrak{J}})$ die vollständige Hülle von $(\mathfrak{J}, \mathbf{U}|\mathfrak{J})$ ist, $\mathbf{U}|\mathfrak{J}$ atomlos (atomar).

Hilfssatz (2.10). $\mathbf{U}$ *ist genau dann atomlos (atomar), wenn für jedes* $a \in \mathfrak{R}$ $\mathbf{U}|a \wedge \mathfrak{R}$ *atomlos (atomar) ist.*

Beweis. Wegen (2.9) ist nur noch eine Implikation zu beweisen. Sei wieder $\mathbf{U}$ hausdorffsch, $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{U}})$ die vollständige Hülle von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$; ferner für $a \in \mathfrak{R}$ $\mathbf{U}|a \wedge \mathfrak{R}$ atomlos (atomar). Sei $c \in \tilde{\mathfrak{R}} \setminus \{0\}$. Zu zeigen ist im atomlosen Fall, dass c kein Atom in $\tilde{\mathfrak{R}}$ ist; und im atomaren Fall, dass ein Atom b in $\tilde{\mathfrak{R}}$ existiert mit $b \leqslant c$. Wegen $c \neq 0$ gibt es ein $a \in \mathfrak{R}$ mit $a \wedge c \neq 0$. Da $\mathbf{U}|a \wedge \mathfrak{R}$ atomlos (atomar) ist, ist auch der Abschluß $\overline{a \wedge \mathfrak{R}}$ in $\tilde{\mathfrak{R}}$ aufgrund der Vollständigkeit atomlos (atomar). Wegen $a \wedge c \in \overline{a \wedge \mathfrak{R}}$ ist im atomlosen Fall $a \wedge c$ kein Atom, also wegen $0 \neq a \wedge c \leqslant c$ auch c kein Atom. Im atomaren Fall gibt es ein Atom b in $\overline{a \wedge \mathfrak{R}}$ mit $b \leqslant a \wedge c$; nach (2.2) ist dann b ein Atom in $\tilde{\mathfrak{R}}$ mit $b \leqslant c$.

Mit (2.10) lassen sich aus gewissen Aussagen über Boolesche Algebren Aussagen über Boolesche Ringe folgern.

Offenbar sind folgende vier Aussagen äquivalent: $\mathbf{U}$ ist atomlos und atomar; $\mathbf{U}$ ist trivial; $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomlos und $\mathfrak{N}$-atomar.

3. Topologische Charakterisierung atomloser Boolescher Ringe.

Bemerkung (3.1). *Ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *lokal s-beschränkt, dann sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{R}$ *ist* $\mathfrak{N}$*-atomlos.*

(2) $\forall\ a \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{N}\ \forall \mathfrak{U} \in \mathbf{U}\ \exists b \in \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{N}\ b \leqslant a$.

Beweis. (1)→(2): Seien $a_0 \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{N}$, $\mathfrak{U} \in \mathbf{U}$. Da $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$-atomlos ist, lassen sich induktiv $a_n, b_n \in \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{N}$ wählen mit $a_n \wedge b_n = 0$ und $a_n \vee b_n = a_{n-1}$ $(n \in \mathbf{N})$. Da $\mathbf{U}$ lokal s-beschränkt ist, konvergiert (b_n) gegen 0; für ein $r \in \mathbf{N}$ ist also $b_r \in \mathfrak{U} \setminus \mathfrak{N}$ und $b_r \leqslant a_0$.

(2)→(1) gilt offenbar auch ohne die Voraussetzung der lokalen s-Beschränktheit von $\mathbf{U}$; (1)→(2) gilt nicht ohne diese Voraussetzung (s. (7.4) (c)).

(3.2). *Die Zusammenhangskomponente der* 0 *in* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist ein abgeschlossenes Ideal und enthält keine* $\mathfrak{N}$*-Atome.*

Die zweite Aussage folgt daraus, daß für ein a der Zusammenhangskomponente $\mathfrak{C}$ der 0 $a \wedge \mathfrak{R} = a \wedge \mathfrak{C}$ als stetiges Bild von $\mathfrak{C}$ zusammenhängend ist, aber für ein $\mathfrak{N}$-Atom a $a \wedge \mathfrak{R} = \{x \in \mathfrak{N}\colon x \leqslant a\} \dot{\cup} \{a \setminus x\colon x \in \mathfrak{N}\}$ nicht zusammenhängend ist.

Folgerung (3.3). *Ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *zusammenhängend, dann ist* $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$*-atomlos.*

Das Umgekehrte ist nur unter Zusatzvoraussetzungen richtig (s. (7.3) (a), (7.4) (b)).

Satz (3.4). *Ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *vollständig und lokal s-beschränkt, dann sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{R}$ *ist* $\mathfrak{N}$*-atomlos.*

(2) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist zusammenhängend.*

Beweis. (2)→(1) gilt nach (3.3). (1)→(2): Durch die Quotientenbildung $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})/\mathfrak{N}$ reduziert man die Behauptung auf den hausdorffschen Fall. Wir zeigen, daß jede nicht leere, offen-abgeschlossene Teilmenge von $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ die Null enthält und daher eine disjunkte Zerlegung, von $\mathfrak{R}$ in zwei nicht leere offene Mengen nicht möglich ist. Sei $\mathfrak{A}$ eine nicht leere, offen-abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{R}$. Da jede Kette von $\mathfrak{A}$ wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ nach (1.5) in $\mathfrak{A}$ eine untere Schranke hat, besitzt $\mathfrak{A}$ nach dem Zorn'schen Lemma ein minimales Element a. Da $\mathfrak{A}$ offen ist, gibt es ein $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$ mit $a\triangle\mathfrak{U}\subset\mathfrak{A}$. Wäre $a\neq 0$, dann gäbe es nach (3.1) ein $b\in\mathfrak{U}$ mit $0\neq b\leqslant a$; es wäre dann $a\triangle b\in a\triangle\mathfrak{U}\subset\mathfrak{A}$, $a\neq a\triangle b\leqslant a$, ein Widerspruch zur Minimalität von a. Also ist $0=a\in\mathfrak{A}$.

Das folgende Lemma zeigt, daß "Stetigkeit" eines positiven Inhalts im Sinne von ([13], S. 841) eine gewisse Zusammenhangseigenschaft der von μ erzeugten Topologie ist.

LEMMA (3.5). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Zu jedem $a\in\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$ gibt es endlich viele Elemente $a_1,\ldots,a_n\in\mathfrak{U}$ mit $a=a_1\vee\ldots\vee a_n$.*

(2) *Zu jedem $(a,b)\in\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$ gibt es endlich viele Elemente $c_1,\ldots,c_n\in\mathfrak{R}$ mit $c_1=a$, $c_n=b$ und $c_{i+1}\triangle c_i\in\mathfrak{U}$ $(i=1,\ldots,n-1)$.*

(3) *Zu je zwei offenen, nicht leeren Teilmengen $\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2$ von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}=\mathfrak{O}_1\cup\mathfrak{O}_2$ und jedem $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$ gibt es Elemente $x\in\mathfrak{O}_1$, $y\in\mathfrak{O}_2$ mit $x\triangle y\in\mathfrak{U}$.*

Beweis. (1)→(2): Wählt man zu $a,b\in\mathfrak{R}$ und einer konvexen Menge $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$ $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_m\in\mathfrak{U}$ mit $a=a_1\vee\ldots\vee a_n$, $b=b_1\vee\ldots\vee b_n$, dann bilden die Elemente

$$c_k=\sup_{1\leqslant j\leqslant n+1-k} a_j \quad (k=1,\ldots,n),$$

$$c_{n+1}=0,\quad c_{n+1+k}=\sup_{1\leqslant j\leqslant k} b_j \quad (k=1,\ldots,m)$$

eine Kette von a nach b mit $c_{i+1}\triangle c_i\in\mathfrak{U}$ $(i=1,\ldots,n+m)$.

(2)→(3): Seien $\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2$ offene, nicht leere Teilmengen von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}=\mathfrak{O}_1\cup\mathfrak{O}_2$ und $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$. Falls $\mathfrak{O}_1\cap\mathfrak{O}_2\neq\emptyset$, wählt man $x=y\in\mathfrak{O}_1\cap\mathfrak{O}_2$; andernfalls zu einem Paar $(a,b)\in\mathfrak{O}_1\times\mathfrak{O}_2$ eine Kette $c_1,\ldots,c_n$ gemäß (2). Dann gibt es ein $i\in\{1,\ldots,n-1\}$ mit $x:=c_i\in\mathfrak{O}_1$, $y:=c_{i+1}\in\mathfrak{O}_2$; $x\triangle y\in\mathfrak{U}$.

(3)→(1): Wir zeigen, daß für eine konvexe Nullumgebung $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{U}):=\{\sup\mathfrak{F}:\mathfrak{F}\text{ ist eine endliche Teilmenge von }\mathfrak{U}\}$$

gleich $\mathfrak{R}$ ist. Offenbar ist $\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$ ein Ideal, das $\mathfrak{U}$ umfasst, und daher offen und abgeschlossen. Wäre $\mathfrak{J}(\mathfrak{U})\neq\mathfrak{R}$, gäbe es also nach (3) ein $x\in\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$ und $y\in\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$ mit $x\triangle y\in\mathfrak{U}$. Dann wäre

$$y=x\triangle(x\triangle y)\in\mathfrak{J}(\mathfrak{U})\triangle\mathfrak{U}=\mathfrak{J}(\mathfrak{U}),$$

ein Widerspruch.

In diesem Zusammenhang ist es zweckmäßig den Begriff des fast-zusammenhängenden Raumes einzuführen. Sei $(X,\mathbf{V})$ ein uniformer Raum, $\mathbf{V}$ seine Uniformität. Wir nennen $(X,\mathbf{V})$ *fast-zusammenhängend*, wenn die vollständige Hülle des assoziierten separierten uniformen Raumes zusammenhängend ist; d.h. wenn es zu je zwei offenen, nicht leeren Teilmengen $\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2$ von X mit $X=\mathfrak{O}_1\cup\mathfrak{O}_2$ Cauchysysteme $(x_\mathfrak{U})_{\mathfrak{U}\in\mathbf{U}}$ in $\mathfrak{O}_1$ und $(y_\mathfrak{U})_{\mathfrak{U}\in\mathbf{U}}$ in $\mathfrak{O}_2$ gibt mit $x_\mathfrak{U}\triangle y_\mathfrak{U}\in\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{U}\in\mathbf{U})$; (dabei wird $\mathbf{U}$ als eine bez. der Inklusion nach unten gerichtete Menge aufgefasst.) Ist eine auf X definierte gleichmäßig stetige Abbildung und X fastzusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ fast-zusammenhängend. Ist $(X,\mathbf{V})$ fast-zusammenhängend, dann ist für je zwei offene, nicht leere Teilmengen $\mathfrak{O}_1,\mathfrak{O}_2$ von X mit $X=\mathfrak{O}_1\cup\mathfrak{O}_2$ und jedes $\mathfrak{V}\in\mathbf{V}$ $\mathfrak{V}\cap(\mathfrak{O}_1\times\mathfrak{O}_2)\neq\emptyset$; insbesondere gilt, wenn $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ fast-zusammenhängend ist, die Aussage (3) von Lemma (3.5); d.h. in (3.6) gilt (2)→(3).

FOLGERUNG (3.6). *Ist $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ lokal s-beschränkt, dann sind äquivalent:*

(1) *$(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist atomlos.*

(2) *$(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist fast-zusammenhängend.*

(3) *Zu jedem $a\in\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{U}\in\mathbf{U}$ gibt es endlich viele Elemente $a_1,\ldots,a_n\in\mathfrak{U}$ mit $a=a_1\vee\ldots\vee a_n$.*

Beweis. (1) und (2) sind nach (3.4) äquivalent. (2)→(3) erhält man, wie oben erklärt, aus (3.5). (3)→(1): Offenbar besitzt mit $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ auch die vollständige Hülle $(\tilde{\mathfrak{R}},\tilde{\mathbf{U}})$ des Fatorrings $(\mathfrak{R},\mathbf{U})/\mathfrak{N}$ die Eigenschaft (3) aus Lemma (3.5). Wegen der Äquivalenz (1)↔(3) in (3.5) gilt Entsprechendes für die Eigenschaft (3) aus (3.6); aus ihr folgt also, daß $\tilde{\mathfrak{R}}$ atomlos ist, d.h. dass $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ atomlos ist. (2)→(3)→(1) gilt auch ohne die Voraussetzung der lokalen s-Beschränktheit.

(3.7). *Ist $(\mathbf{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie atomloser, monotoner Ringtopologien auf $\mathfrak{R}$, dann ist auch $\sup\limits_{\alpha\in A}\mathbf{U}_\alpha$ atomlos.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $(\mathfrak{R},\sup\mathbf{U}_\alpha)$ vollständig und hausdorffsch ist (s. (2.6)). Wäre $\sup\mathbf{U}_\alpha$ nicht atomlos, besässe dann $\mathfrak{R}$ ein Atom a. Für ein $\alpha\in A$ wäre $a\notin\mathfrak{N}(\mathbf{U}_\alpha)$ und damit a ein $\mathfrak{N}(\mathbf{U}_\alpha)$-Atom. Nach (2.7) wäre $\mathbf{U}_\alpha$ nicht atomlos.

FOLGERUNG (3.8). *Die Menge aller atomlosen, (lokal) s-beschränkten, monotonen Ringtopologien auf $\mathfrak{R}$ ist ein vollständiges Ideal in $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$.*

Beweis. Sei $\mathbf{U}$ atomlos und (lokal) s-beschränkt; ferner $\mathbf{V}\in\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ mit $\mathbf{V}\subset\mathbf{U}$. Dann ist nach (3.6) $\mathbf{U}$ fast-zusammenhängend und daher wegen $\mathbf{V}\subset\mathbf{U}$ $\mathbf{V}$ fast-zusammenhängend. Da außerdem mit $\mathbf{U}$ auch $\mathbf{V}$ (lokal) s-beschränkt ist, ist also nach (3.6) $\mathbf{V}$ atomlos. Zusammen mit (3.7) erhält man hieraus (3.8).

4. Topologische Charakterisierung atomarer Boolescher Ringe. Wir beginnen mit einfachen Folgerungen aus (3.1), (3.2), (3.3).

Bemerkung (4.1). *Ist $\mathbf{U}$ hausdorffsch, ferner $\mathfrak{R}$ atomar oder $\mathbf{U}$ atomar, dann ist $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ total unzusammenhängend.*

Beweis. Falls $\mathfrak{R}$ atomar ist, ergibt sich die Behauptung aus (3.2). Ist $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ atomar und $\mathfrak{C}$ die Zusammenhangskomponente der Null, dann ist $\mathbf{U}|\mathfrak{C}$ nach (2.9) atomar und atomlos, da zusammenhängend, also trivial. Folglich ist $\mathfrak{C} = (0)$.

Satz (4.2). *Ist $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ hausdorffsch, vollständig und lokal s-beschränkt, dann sind äquivalent:*

(1) $\mathfrak{R}$ *ist atomar.*

(2) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist total unzusammenhängend.*

Beweis von (2)→(1). Da $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ total unzusammenhängend ist, ist für $b \in \mathfrak{R}\setminus\{0\}$ $(b\wedge\mathfrak{R}, \mathbf{U}|b\wedge\mathfrak{R})$ nicht zusammenhängend. Also gibt es nach (3.4) ein Atom a in $b\wedge\mathfrak{R}$. a ist dann ein Atom in $\mathfrak{R}$ mit $a \leqslant b$.

Ohne die Voraussetzungen der Vollständigkeit und lokalen s-Beschränktheit würde (2)→(1) nicht gelten (vgl. (7.3) (c), (7.4) (a)).

Für $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{R}$ bezeichne $\sum\mathfrak{M}$ das gerichtete System der endlichen Partialsummen

$$\Big(\sum_{a\in\mathfrak{E}} a\Big)_{\mathfrak{E}\in\mathbf{E}} = \big(\mathop{\triangle}_{a\in\mathfrak{E}} a\big)_{\mathfrak{E}\in\mathbf{E}},$$

wobei

$$\mathbf{E} := \{\mathfrak{E}\subset\mathfrak{M}\colon \mathfrak{E} \text{ ist endlich}\};$$

sind die Elemente aus $\mathfrak{M}$ paarweise disjunkt, dann ist $\sum\mathfrak{M} = (\sup\mathfrak{E})_{\mathfrak{E}\in\mathbf{E}}$; $\sum\emptyset := (0)$.

Für eine Menge $\mathfrak{A}$ identifizieren wir die Potenzmenge $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ mit dem Produkt $\{0,1\}^{\mathfrak{A}}$; $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ ist mit den üblichen Operationen ein Boolescher Ring. Bezeichnet $\mathbf{U}_p$ die Produkttopologie auf $\mathbf{P}(\mathfrak{A}) = \{0,1\}^{\mathfrak{A}}$ bez. der diskreten Topologie auf $\{0,1\}$, so ist $\mathbf{U}_p$ eine kompakte, total unzusammenhängende, s-beschränkte, atomare, monotone Ringtopologie.

Lemma (4.3). *Vor.: Es sei $\mathbf{U}$ hausdorffsch, $\mathfrak{A}$ die Menge aller Atome in $\mathfrak{R}$ und für $x\in\mathfrak{R}$ $j(x) := \{a\in\mathfrak{A}\colon a\leqslant x\}$. $\mathbf{U}_p$ bezeichne die Produkttopologie auf $\mathbf{P}(\mathfrak{A}) = \{0,1\}^{\mathfrak{A}}$ bez. der diskreten Topologie auf $\{0,1\}$. Beh.:*

(a) $j\colon (\mathfrak{R},\mathbf{U})\to(\mathbf{P}(\mathfrak{A}),\mathbf{U}_p)$ *ist ein stetiger Ringhomomorphismus.*

(b) $j(\mathfrak{R})$ *enthält alle endlichen Teilmengen von $\mathfrak{A}$ und liegt damit dicht in $(\mathbf{P}(\mathfrak{A}),\mathbf{U}_p)$.*

(c) j *ist injektiv genau dann, wenn $\mathfrak{R}$ atomar ist.*

(d) $\mathfrak{R}$ *ist atomar und für jedes $x\in\mathfrak{R}$ ist $\sum j(x)$ konvergent in $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ genau dann, wenn für jedes $x\in\mathfrak{R}$ $\sum j(x)$ bez. $\mathbf{U}$ gegen x konvergiert.*

Beweis. (a) Wegen $j(0)=\emptyset$, $j(x\wedge y) = j(x)\wedge j(y)$, $j(x\vee y) = j(x)\vee j(y)$ $(x,y\in\mathfrak{R})$ ist j ein Ringhomomorphismus. j ist stetig: Sei $\mathfrak{U}_0\in\mathbf{U}_p$. Es gibt dann eine endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\mathbf{P}(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{E})\subset\mathfrak{U}_0$. Wählt man eine konvexe Nullumgebung $\mathfrak{U}$ in $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ mit $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{E}=\emptyset$, dann ist $j(\mathfrak{U})\subset\mathfrak{U}_0$.

Die Beweise (b) und (c) sind trivial. Zum Beweis von (d) benutzt man (1.1) und, daß $\mathfrak{R}$ genau dann atomar ist, wenn für jedes $x\in\mathfrak{R}$ $x=\sup j(x)$ ist.

Mit (3.4) läßt sich noch zeigen, daß der Kern von j gerade die Zusammenhangskomponente der Null ist, falls $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ vollständig und lokal s-beschränkt ist.

Aus (4.3) (a), (c) erhält man:

Folgerung (4.4). *Unter den Voraussetzungen von (4.3) ist*

$$j\colon (\mathfrak{R},\mathbf{U})\to(j(\mathfrak{R}),\mathbf{U}_p|j(\mathfrak{R}))$$

genau dann ein stetiger Isomorphismus, wenn $\mathfrak{R}$ atomar ist.

Wir untersuchen nun, wann diese Abbildung sogar ein topologischer Isomorphismus ist.

(4.5). *Unter den Voraussetzungen von (4.3) sind äquivalent:*

(1) $j\colon (\mathfrak{R},\mathbf{U})\to(j(\mathfrak{R}),\mathbf{U}_p|j(\mathfrak{R}))$ *ist ein topologischer Isomorphismus.*

(2) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ *ist s-beschränkt und für jedes $x\in\mathfrak{R}$ konvergiert $\sum j(x)$ gegen x bez.* $\mathbf{U}$.

(3) $\sum\mathfrak{A}$ *ist ein $\mathbf{U}$-Cauchysystem und für jedes $x\in\mathfrak{R}$ konvergiert $\sum j(x)$ gegen x bez.* $\mathbf{U}$.

Falls $\mathfrak{R}$ ein Einselement e besitzt, ist eine weitere äquivalente Aussage:

(4) $\sum\mathfrak{A}$ *konvergiert bez. $\mathbf{U}$ gegen e.*

Beweis. (3)→(1): Nach (4.3) (d) ist $\mathfrak{R}$ atomar. Nach (4.4) bleibt zu zeigen, daß $j\colon (\mathfrak{R},\mathbf{U})\to(j(\mathfrak{R}),\mathbf{U}_p|j(\mathfrak{R}))$ offen ist. Sei dazu $\mathfrak{U}$ eine abgeschlossene Nullumgebung in $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$. Da $\sum\mathfrak{A}$ ein $\mathbf{U}$-Cauchysystem ist, gibt es eine endliche Teilmenge $\mathfrak{E}_0$ von $\mathfrak{A}$, so daß für jede endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{E}_0$ $\sum_{x\in\mathfrak{E}} x\in\mathfrak{U}$. Für $x\in\mathfrak{R}$ mit $j(x)\in\mathfrak{U}_0 := \mathbf{P}(\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{E}_0)$ ist also $\sum j(x)\subset\mathfrak{U}$; da $\mathfrak{U}$ abgeschlossen ist und $\sum j(x)$ gegen x konvergiert, ist folglich $x\in\mathfrak{U}$. Das beweist $\mathfrak{U}_0\cap j(\mathfrak{R})\subset j(\mathfrak{U})$ und wegen $\mathfrak{U}_0\in\mathbf{U}_p$ $j(\mathfrak{U})\in\mathbf{U}_p|j(\mathfrak{R})$.

(1)→(2) folgt aus (4.3) (b) und (2)→(3) aus (1.2). Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement e, dann folgt wegen $\mathfrak{A} = j(e)$ (4) aus (3); umgekehrt folgt aus (4), daß $\sum\mathfrak{A}$ ein $\mathbf{U}$-Cauchysystem ist und für $x\in\mathfrak{R}$ $x\wedge\sum\mathfrak{A}$ gegen $x\wedge e = x$, also $\sum j(x)$ gegen x bez. $\mathbf{U}$ konvergiert.

Satz (4.6). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ *ist vollständig, s-beschränkt und ($\mathfrak{R}$-)atomar.*

(2) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ *ist kompakt.*

(3) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ *ist lokalkompakt und s-beschränkt.*

Ist $\mathbf{U}$ hausdorffsch, dann sind bei der Bezeichnungsweise von (4.3) weitere äquivalente Aussagen:

(4) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist vollständig, s-beschränkt und total unzusammenhängend.*

(5) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist vollständig,* $\mathfrak{R}$ *besitzt ein Einselement e und* $\sum \mathfrak{A}$ *konvergiert bez.* $\mathbf{U}$ *gegen e.*

(6) $j\colon (\mathfrak{R}, \mathbf{U}) \to (\mathbf{P}(\mathfrak{A}), \mathbf{U}_p)$ *ist ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\mathbf{U}$ hausdorffsch ist. (1)→(5): Nach (1.4) (a) besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement e. Nach (1.2) ist für $x \in \mathfrak{R}$ $\sum j(x)$ Cauchy konvergent und damit konvergent. Also konvergiert $\sum \mathfrak{A} = \sum j(e)$ nach (4.3) (d) gegen e. (5)→(6) folgt aus (4.3) (b) und (4.5). Offenbar gilt (6)→(2), wegen (1.10) (2)→(3), nach ([6], Theorem 8) (3)→(4) und nach (4.2) (4)→(1).

Im nicht hausdorffschen Fall folgt aus (1), (2), (3) von (4.6) nicht, daß $\mathfrak{R}$ eine Boolesche Algebra ist; Beispiel: $\mathfrak{R}_0 := \{E \subset \mathbf{N}\colon E \text{ ist endlich}\}$ mit der trivialen Topologie. Dieses $\mathfrak{R}_0$ und $\mathbf{P}(\mathbf{N})$ sind beide mit der diskreten Topologie lokalkompakt, total unzusammenhängend, atomar, nicht s-beschränkt; $\mathfrak{R}_0$ ist lokal s-beschränkt, $\mathbf{P}(\mathbf{N})$ ist nicht (lokal) s-beschränkt. Zu (2) von (4.6) bemerken wir noch, daß jede kompakte Ringtopologie auf $\mathfrak{R}$ beschränkt, also monoton ist.

Mit (1.8) (b) erhält man aus (4.6)

Satz (4.7). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist s-beschränkt und atomar.*

(2) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist totalbeschränkt.*

(3) $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *ist s-beschränkt und lokaltotalbeschränkt*([4]).

(4) *Es gibt eine Menge* $\mathfrak{A}$, *so daß sich* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})/\mathfrak{N}$ *dicht einbetten läßt in* $\mathbf{P}(\mathfrak{A}) = \{0, 1\}^{\mathfrak{A}}$, *versehen mit der Produkttopologie bez. der diskreten Topologie auf* $\{0, 1\}$.

Bemerkung (4.8). *Gilt die Aussage* (6) *von* (4.6) (*bzw.* (4) *von* (4.7)), *dann ist* $\mathfrak{A}$ *abzählbar* (*bzw. abzählbar wählbar*) *genau dann, wenn* $\mathbf{U}$ *eine abzählbare Basis besitzt.*

Folgerung (4.9). *Die Menge aller atomaren,* (*lokal*) *s-beschränkten, monotonen Ringtopologien auf* $\mathfrak{R}$ *ist ein vollständiges Ideal in* $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$.

Beweis. Offenbar bilden die totalbeschränkten, monotonen Ringtopologien ein vollständiges Ideal in $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$. Im s-beschränkten Fall folgt hieraus die Behauptung mit (4.7). Den lokal s-beschränkten Fall führt man auf den s-beschränkten mit (2.10) zurück.

Entsprechend erhält man aus (2.10) und (4.7)

Folgerung (4.10). *Ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *lokal s-beschränkt und atomar und* $\mathfrak{R}^*$ *ein Teilring von* $\mathfrak{R}$, *dann ist auch* $(\mathfrak{R}^*, \mathbf{U}|\mathfrak{R}^*)$ *atomar.*

([4]) d.h. $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ besitzt eine totalbeschränkte Nullumgebung.

5. Zerlegung von monotonen Ringtopologien. Ist $\mathbf{U}$ lokal s-beschränkt, dann ist nach (3.8) (bzw. (4.9)) das Supremum $\mathbf{U}_l$ (bzw. $\mathbf{U}_a$) aller atomlosen (bzw. atomaren) monotonen Ringtopologien, die gröber als $\mathbf{U}$ sind, atomlos (bzw. atomar); zum Nachweis von $\mathbf{U} = \sup\{\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_a\}$ notieren wir zunächst einen Spezialfall von (1.6).

Satz (5.1). $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *sei lokal s-beschränkt, hausdorffsch und vollständig;* $\mathfrak{C}$ *bezeichne die Zusammenhangskomponente der Null in* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$. *Dann ist* $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ *algebraische und topologische direkte Summe der abgeschlossenen Ideale* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{C}^d$.

Satz (5.2). *Ist* $\mathbf{U}$ *lokal s-beschränkt, dann läßt sich* $\mathbf{U}$ *in eindeutiger Weise darstellen in der Form* $\mathbf{U} = \sup\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$, *wobei* $\mathbf{U}_1$ *eine atomlose und* $\mathbf{U}_2$ *eine atomare monotone Ringtopologie ist; dabei ist* $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_l$ *und* $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_a$.

Beweis. Nach (1.8), (1.9), (2.6) kann $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ als vollständig und hausdorffsch angenommen werden. Bei der Bezeichnungsweise von (5.1) ist $\mathfrak{C}$ zusammenhängend und $\mathfrak{C}^d$ totalunzusammenhängend, also nach (3.4) und (4.2) $\mathbf{U}|\mathfrak{C}$ atomlos und $\mathbf{U}|\mathfrak{C}^d$ atomar. Bezeichnet $\mathbf{U}_t$ die triviale Topologie auf $\mathfrak{R}$, dann ist $(\mathfrak{C}, \mathbf{U}|\mathfrak{C}) \times (\mathfrak{C}^d, \mathbf{U}_t|\mathfrak{C}^d)$ atomlos und daher die monotone Ringtopologie

$$\mathbf{U}_1 = \{(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{C}) \triangle \mathfrak{C}^d\colon \mathfrak{U} \in \mathbf{U}\},$$

bez. der durch $(x, y) \to x \triangle y$ ein topologischer Isomorphismus Φ von $(\mathfrak{C}, \mathbf{U}|\mathfrak{C}) \times (\mathfrak{C}^d, \mathbf{U}_t|\mathfrak{C}^d)$ auf $(\mathfrak{R}, \mathbf{U}_1)$ erklärt ist, atomlos. Entsprechend ist die von

$$\Phi^{-1}\colon \mathfrak{R} \to (\mathfrak{C}, \mathbf{U}_t|\mathfrak{C}) \times (\mathfrak{C}^d, \mathbf{U}|\mathfrak{C}^d)$$

auf $\mathfrak{R}$ induzierte monotone Ringtopologie

$$\mathbf{U}_2 = \{\mathfrak{C} \triangle (\mathfrak{U} \cap \mathfrak{C}^d)\colon \mathfrak{U} \in \mathbf{U}\}$$

atomar. Wegen (5.1) ist $\mathbf{U} = \sup\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$. Diese Darstellung ist auch eindeutig. Ist nämlich $\mathbf{U} = \sup\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$, $\mathbf{V}_1$ eine atomlose und $\mathbf{V}_2$ eine atomare monotone Ringtopologie auf $\mathfrak{R}$, dann ist wegen

$$\mathbf{V}_2|\mathfrak{C} \subset \mathbf{U}|\mathfrak{C} = \mathbf{U}_1|\mathfrak{C}$$

nach (2.9) und (3.8) $\mathbf{V}_2|\mathfrak{C}$ atomlos, andererseits nach (2.9) mit $\mathbf{V}_2$ auch $\mathbf{V}_2|\mathfrak{C}$ atomar, also $\mathbf{V}_2|\mathfrak{C}$ trivial, folglich $\mathbf{V}_2|\mathfrak{C} = \mathbf{U}_2|\mathfrak{C}$ und

$$\mathbf{V}_1|\mathfrak{C} = \sup\{\mathbf{V}_1|\mathfrak{C}, \mathbf{V}_2|\mathfrak{C}\} = \mathbf{U}|\mathfrak{C} = \mathbf{U}_1|\mathfrak{C};$$

ebenso zeigt man, daß

$$\mathbf{V}_1|\mathfrak{C}^d = \mathbf{U}_1|\mathfrak{C}^d \quad \text{und} \quad \mathbf{V}_2|\mathfrak{C}^d = \mathbf{U}_2|\mathfrak{C}^d.$$

Da

$$\Phi\colon (\mathfrak{C}, \mathbf{U}_i|\mathfrak{C}) \times (\mathfrak{C}^d, \mathbf{U}_i|\mathfrak{C}^d) \to (\mathfrak{R}, \mathbf{U}_i)$$

und

$$\Phi\colon (\mathfrak{C}, \mathbf{V}_i|\mathfrak{C}) \times (\mathfrak{C}^d, \mathbf{V}_i|\mathfrak{C}^d) \to (\mathfrak{R}, \mathbf{V}_i)$$

topologische Isomorphismen sind, folgt hieraus $\mathbf{V}_i = \mathbf{U}_i$ $(i = 1, 2)$.

Wegen $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{U}_l \subset \mathbf{U}$, $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{U}_a \subset \mathbf{U}$ ist dann auch $\mathbf{U} = \sup\{\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_a\}$.

FOLGERUNG (5.3). *Ist $(\mathbf{U}_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie lokal s-beschränkter monotoner Ringtopologien auf $\mathfrak{R}$ und $\mathbf{U} = \sup\limits_{\alpha\in A}\mathbf{U}_\alpha$, dann ist*

$$\mathbf{U}_l = \sup_{\alpha\in A}(\mathbf{U}_\alpha)_l \quad \textit{und} \quad \mathbf{U}_a = \sup_{\alpha\in A}(\mathbf{U}_\alpha)_a.$$

Beweis. Wegen

$$\mathbf{U}_\alpha = \sup\{(\mathbf{U}_\alpha)_l, (\mathbf{U}_\alpha)_a\}$$

$(\alpha\in A)$ ist

$$\mathbf{U} = \sup\{\sup_{\alpha\in A}(\mathbf{U}_\alpha)_l, \sup_{\alpha\in A}(\mathbf{U}_\alpha)_a\};$$

nach (3.8), (4.9) ist $\sup\limits_{\alpha}(\mathbf{U}_\alpha)_l$ atomlos und $\sup\limits_{\alpha}(\mathbf{U}_\alpha)_a$ atomar. Die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung liefert mit (5.2) die Behauptung.

6. Wertebereich und Zerlegung lokal *s*-beschränkter Inhalte. In diesem Abschnitt sei

$(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ *ein uniformer Raum,* $\mathbf{V}$ *seine Uniformität;* $+ : (\mathfrak{G},\mathbf{V})\times(\mathfrak{G},\mathbf{V}) \to (\mathfrak{G},\mathbf{V})$ *eine gleichmäßig stetige Operation;* μ: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{G}$ *ein Inhalt (d.h.* $\mu(a\vee b) = \mu(a)+\mu(b)$, *falls* $a, b\in\mathfrak{R}$ *und* $a\wedge b = 0$).

Wir haben den Zielbereich von μ so allgemein gewählt, weil dadurch keine weiteren Schwierigkeiten auftreten, und um zu verdeutlichen, daß der Kern der in diesem Abschnitt genannten Sätze in Aussagen über $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))$ besteht, wobei $\mathbf{V}(\mu)$ die im folgenden definierte monotone Ringtopologie bezeichnet.

Wir setzen $\mu(0) =: 0$; dann ist für alle $x\in\mu(\mathfrak{R})$ $x+0 = 0+x = x$. Offenbar bilden die Mengen

$$\mathfrak{B}(\mu) := \{a\in\mathfrak{R}: \forall b\in\mathfrak{R}\wedge a\ \ (\mu(b), 0)\in\mathfrak{B}\}$$

$(\mathfrak{B}\in\mathbf{V})$ eine Filterbasis des Nullumgebungssystems einer monotonen Ringtopologie $\mathbf{V}(\mu)$ auf $\mathfrak{R}$. $\mathbf{V}(\mu)$ ist die gröbste monotone Ringtopologie auf $\mathfrak{R}$, bez. der μ mit $(\mathfrak{G},\mathbf{V})$ als Zielbereich in 0 stetig ist.

$$\mu: (\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))\to(\mathfrak{G},\mathbf{V})$$

ist sogar gleichmäßig stetig. Wir setzen noch

$$\mathfrak{N}(\mu) := \mathfrak{N}(\mathbf{V}(\mu)) = \bigcap \mathbf{V}(\mu)$$

(System der "μ-Nullmengen"). Falls $\mathbf{V}$ separiert, gilt für alle $a, b\in\mathfrak{R}$:

$$a\in\mathfrak{N}(\mu)\leftrightarrow\forall x\in\mathfrak{R}\wedge a\ \ \mu(x) = 0,$$

$$a\triangle b\in\mathfrak{N}(\mu)\to\mu(a) = \mu(b),$$

$$\mathbf{V}(\mu) \text{ ist trivial } \leftrightarrow \mu = 0 \text{ (d.h. } \forall x\in\mathfrak{R}\ \ \mu(x) = 0).$$

Wir notieren einige einfache Regeln.

(6.1). (a) *Ist für jedes $\alpha\in A$ $\mathbf{V}_\alpha$ eine Uniformität auf $\mathfrak{G}$, bez. der die Operation $+$ gleichmäßig stetig ist, und $\mathbf{V} = \sup\limits_{\alpha\in A}\mathbf{V}_\alpha$ (bzw. $\mathbf{V}\subset\sup\limits_{\alpha\in A}\mathbf{V}_\alpha$), dann ist $\mathbf{V}(\mu) = \sup\limits_{\alpha\in A}\mathbf{V}_\alpha(\mu)$ (bzw. $\mathbf{V}(\mu)\subset\sup\limits_{\alpha\in A}(\mathbf{V}_\alpha(\mu))$).*

(b) *Ist für $i = 1, 2$ μ_i: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{G}$ ein Inhalt und $\mu = \mu_1+\mu_2$, dann ist* $\mathbf{V}(\mu)\subset\sup\{\mathbf{V}(\mu_1), \mathbf{V}(\mu_2)\}$.

Für einen Teilring $\mathfrak{R}^*$ von $\mathfrak{R}$ ist $\mathbf{V}(\mu|\mathfrak{R}^*)\subset\mathbf{V}(\mu)|\mathfrak{R}^*$.

(6.2). *Ist $\mathfrak{R}^*$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$ oder ein dichter Teilring von $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))$, dann ist* $\mathbf{V}(\mu|\mathfrak{R}^*) = \mathbf{V}(\mu)|\mathfrak{R}^*$.

μ heiße *s-beschränkt* (*lokal s-beschränkt, atomlos, atomar*) (bez. $\mathbf{V}$), wenn $\mathbf{V}(\mu)$ *s*-beschränkt (lokal *s*-beschränkt, atomlos, atomar) ist.

Offenbar ist μ (lokal) *s*-beschränkt bez. $\mathbf{V}$ genau dann, wenn für jede (ordnungsbeschränkte) Folge (a_n) paarweise disjunkter Elemente aus $\mathfrak{R}$ $(\mu(a_n))$ in $(\mathfrak{G},\mathbf{V})$ gegen 0 konvergiert.

Sei $\mathbf{V}$ separiert; dann ist μ genau dann atomlos und atomar, wenn $\mu = 0$ ist; ferner ist ein $a\in\mathfrak{R}$ mit $\mu(a)+\mu(a)\neq 0$ oder $\mu(a) = 0$ genau dann ein $\mathfrak{N}(\mu)$ — Atom, wenn $\mu(a)\neq 0$ und für alle $b\in\mathfrak{R}$ $\mu(a\wedge b) = 0$ oder $\mu(a\setminus b) = 0$ ist.

FOLGERUNG (6.3). (a) *Ist $\mathfrak{I}$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$ und μ atomlos (atomar) dann ist $\mu|\mathfrak{I}$ atomlos (atomar).*

(b) *Ist $\mathfrak{R}^*$ ein dichter Teilring von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ und μ: $(\mathfrak{R},\mathbf{U})\to(\mathfrak{G},\mathbf{V})$ stetig, so ist μ genau dann atomlos (atomar), wenn $\mu|\mathfrak{R}^*$ atomlos (atomar) ist.*

(c) *$(\mathbf{V}_\alpha)_{\alpha\in A}$ sei eine Familie von Uniformitäten auf $\mathfrak{G}$ mit $\mathbf{V} = \sup\limits_{\alpha\in A}\mathbf{V}_\alpha$, so dass für jedes $\alpha\in A$ $+$ gleichmäßig stetig bez. $\mathbf{V}_\alpha$ ist. Dann ist μ genau dann (lokal) s-beschränkt und atomlos bzw. atomar bez. $\mathbf{V}$, wenn für jedes $\alpha\in A$ μ (lokal) s-beschränkt und atomlos bzw. atomar* bez. $\mathbf{V}_\alpha$ ist.

(a), (b) folgen aus (2.4), (2.9), (6.2) und (c) aus (3.8), (4.9), (6.1) (a).

Bemerkung (6.4). *$(\mathfrak{G}^*, \mathbf{V}^*)$ sei ein weiterer uniformer Raum mit einer gleichmäßig stetigen Operation $+$: $(\mathfrak{G}^*,\mathbf{V}^*)\times(\mathfrak{G}^*,\mathbf{V}^*)\to(\mathfrak{G}^*,\mathbf{V}^*)$ und ν: $\mathfrak{R}\to\mathfrak{G}^*$ ein lokal s-beschränkter atomloser (atomarer) Inhalt. Ist μ ν-stetig, d.h. $\mathbf{V}(\mu)\subset\mathbf{V}^*(\nu)$, dann ist auch μ atomlos (atomar).*

Das folgt unmittelbar aus (3.8), (4.9). In diesem Zusammenhang vergleiche auch [7], Lemmata 2, 3, 4.

Wie Kluvanek ([7], S. 49) nennen wir μ *abgeschlossen* (bez. $\mathbf{V}$), wenn $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))$ vollständig ist. Besitzt $\mathbf{V}$ eine abzählbare Basis, dann ist jedes $(\mathfrak{G},\mathbf{V})$-wertige Maß auf einem σ-Ring abgeschlossen (vgl. Abschnitt 1). Ist μ abgeschlossen, dann ist μ genau dann atomlos (atomar), wenn $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}(\mu)$-atomlos ($\mathfrak{N}(\mu)$-atomar) ist.

SATZ (6.5). *Vor.: μ sei lokal s-beschränkt und atomlos. Beh.:*

(a) $\mu(\mathfrak{R})$ *ist fast-zusammenhängend.*

(b) *Ist* $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ *vollständig, dann ist* $\overline{\mu(\mathfrak{R})}$ *zusammenhängend.*

(c) *Ist* μ *abgeschlossen, dann ist* $\mu(\mathfrak{R})$ *zusammenhängend.*

Beweis. Nach Voraussetzung und (3.6) ist $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))$ fast-zusammenhängend, also wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von μ auch $\mu(\mathfrak{R})$ fast-zusammenhängend. Falls $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ vollständig, ist daher $\overline{\mu(\mathfrak{R})}$ zusammenhängend. Ist μ abgeschlossen, ist nach (3.4) $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))$ zusammenhängend, also auch $\mu(\mathfrak{R})$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend.

(6.5) (b) verallgemeinert ([2], Theorem 3) von Constantinescu; die wesentlichste Zusatzvoraussetzung in ([2], Theorem 3) ist die Kompaktheit von $\overline{\mu(\mathfrak{R})}$.

([9], Theorem 4) von Landers und aufgrund von ([4], Corollary 1.3) auch ([2], Corollary 6) von Constantinescu ist im wesentlichen äquivalent dazu, daß $\mathbf{V}(\mu)$ wegzusammenhängend ist, falls μ ein atomloses Maß auf einem σ-Ring $\mathfrak{R}$ ist und $\mathbf{V}(\mu)$ eine abzählbare Basis besitzt; da jeder zusammenhängende, lokal zusammenhängende, vollständige metrische Raum wegzusammenhängend ist (s. [8], S. 254), folgt das auch mit (3.4). Daß dabei die Abzählbarkeitsvoraussetzung an $\mathbf{V}(\mu)$ wesentlich ist, zeigt das Beispiel (7.7).

So wie (6.5) beweist man mit (4.6), (4.7):

Satz (6.6). *Vor.*: μ *sei s-beschränkt und atomar. Beh.*:

(a) $\mu(\mathfrak{R})$ *ist totalbeschränkt.*

(b) *Ist* $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ *vollständig, dann ist* $\overline{\mu(\mathfrak{R})}$ *kompakt.*

(c) *Ist* μ *abgeschlossen, dann ist* $\mu(\mathfrak{R})$ *kompakt.*

Aus (6.1)(b), (3.8), (4.9) folgt unmittelbar:

Satz (6.7). *Ist für* $i = 1, 2$ μ_i: $\mathfrak{R} \to \mathfrak{G}$ *ein (lokal) s-beschränkter atomloser bzw. atomarer Inhalt und* $\mu = \mu_1 + \mu_2$, *dann ist auch* μ *(lokal) s-beschränkt und atomlos bzw. atomar.*

Satz (6.8). $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ *sei separiert und vollständig und* μ *lokal s-beschränkt. Dann läßt sich* μ *in eindeutiger Weise darstellen als Summe* $\mu = \mu_l + \mu_a$ *eines atomlosen lokal s-beschränkten Inhalts* μ_l *und eines atomaren lokal s-beschränkten Inhalts* μ_a *mit* $\mu_l(0) = \mu_a(0) = 0$. *Es ist*

$$\mathbf{V}(\mu_l) = \mathbf{V}(\mu)_l, \quad \mathbf{V}(\mu_a) = \mathbf{V}(\mu)_a, \quad \mathbf{V}(\mu) = \sup\{\mathbf{V}(\mu_l), \mathbf{V}(\mu_a)\}.$$

Beweis. $\mathbf{W}$ sei die feinste lokal s-beschränkte monotone Ringtopologie auf $\mathfrak{R}$. $\mathbf{W}$ ist hausdorffsch: Da jeder Boolesche Ring zu einem Mengenring isomorph ist, kann $\mathfrak{R}$ für eine geeignete Menge Ω in das Produkt $\{0, 1\}^{\Omega}$ eingebettet werden. Die Produkttopologie auf $\{0, 1\}^{\Omega}$ induziert auf $\mathfrak{R}$ eine hausdorffsche, monotone Ringtopologie, welche s-beschränkt und daher gröber als $\mathbf{W}$ ist. Also ist auch $\mathbf{W}$ hausdorffsch. Sei nun $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{W}})$ die vollständige Hülle von $(\mathfrak{R}, \mathbf{W})$, $\mathfrak{C}$ die Zusammenhangskomponente der 0 in $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{W}})$, P_l und P_a die durch

$$P_l(x \triangle y) := x, \quad P_a(x \triangle y) := y$$

$(x \in \mathfrak{C},\ y \in \mathfrak{C}^d)$ erklärten Projektion (s. (5.1)) und $\tilde{\mu}$ die stetige Fortsetzung von μ auf $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{W}})$.

Existenz: Für den Inhalt $\tilde{\mu} \circ P_l$ ist $\mathbf{V}(\tilde{\mu} \circ P_l) | \mathfrak{C}^d$ trivial, wegen der Stetigkeit von $\tilde{\mu}$ und (6.2)

$$\mathbf{V}(\tilde{\mu} \circ P_l) | \mathfrak{C} = \mathbf{V}(\tilde{\mu} | \mathfrak{C}) = \mathbf{V}(\tilde{\mu}) | \mathfrak{C} \subset \tilde{\mathbf{W}} | \mathfrak{C} = \tilde{\mathbf{W}}_l | \mathfrak{C}$$

(s. Abschnitt 5). Da also

$$\mathbf{V}(\tilde{\mu} \circ P_l) | \mathfrak{C}^d \subset \tilde{\mathbf{W}}_l | \mathfrak{C}^d$$

und

$$\mathbf{V}(\tilde{\mu} \circ P_l) | \mathfrak{C} \subset \tilde{\mathbf{W}}_l | \mathfrak{C},$$

ist

$$\mathbf{V}(\tilde{\mu} \circ P_l) \overset{\sim}{\subset} \mathbf{W}_l,$$

folglich nach (3.8) $\tilde{\mu} \circ P_l$ atomlos und nach (6.3) (b) $\mu_l := \tilde{\mu} \circ P_l | \mathfrak{R}$ atomlos; ferner nach (6.2)

$$\mathbf{V}(\mu_l) = \mathbf{V}(\tilde{\mu} \circ P_l) | \mathfrak{R} \subset \mathbf{V}(\tilde{\mu}) | \mathfrak{R} = \mathbf{V}(\mu),$$

folglich

$$\mathbf{V}(\mu_l) \subset \mathbf{V}(\mu)_l.$$

Entsprechend zeigt man, daß $\mu_a := \tilde{\mu} \circ P_a | \mathfrak{R}$ atomar und $\mathbf{V}(\mu_a) \subset \mathbf{V}(\mu)_a$ ist. Offenbar ist $\mu = \mu_l + \mu_a$, ferner nach (6.1) (b) und (5.2)

$$\mathbf{V}(\mu) = \sup\{\mathbf{V}(\mu_l), \mathbf{V}(\mu_a)\}, \quad \mathbf{V}(\mu_l) = \mathbf{V}(\mu)_l, \quad \mathbf{V}(\mu_a) = \mathbf{V}(\mu)_a.$$

Eindeutigkeit: μ_1 bzw. μ_2 sei ein lokal s-beschränkter atomloser bzw. atomarer $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$-wertiger Inhalt auf $\mathfrak{R}$ und $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Nach (6.3) (b) ist die stetige Fortsetzung $\tilde{\mu}_1$ von μ_1 auf $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{W}})$ atomlos und daher nach (6.3) (a) $\tilde{\mu}_1 | \mathfrak{C}^d$ atomlos; andererseits ist wegen

$$\mathbf{V}(\tilde{\mu}_1 | \mathfrak{C}^d) = \mathbf{V}(\tilde{\mu}_1) | \mathfrak{C}^d \subset \tilde{\mathbf{W}} | \mathfrak{C}^d$$

nach (4.2), (2.3), (4.9) $\tilde{\mu}_1 | \mathfrak{C}^d$ atomar; insgesamt $\tilde{\mu}_1 | \mathfrak{C}^d = 0$. Ebenso zeigt man, daß $\tilde{\mu}_2 | \mathfrak{C} = 0$. Daraus folgt, daß

$$\mu_1 = \tilde{\mu} \circ P_l | \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \tilde{\mu} \circ P_a | \mathfrak{R}$$

ist.

Dieser Eindeutigkeitsbeweis ist die einzige Stelle dieses Abschnitts, die sich für gruppenwertige Inhalte vereinfachen ließe. Im Existenzbeweis könnte man statt $(\tilde{\mathfrak{R}}, \tilde{\mathbf{W}})$ auch die vollständige Hülle von $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))/\mathfrak{N}(\mu)$

betrachten. Statt der Vollständigkeit von $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ kann man in (6.8) auch voraussetzen, daß μ abgeschlossen ist. Ist μ s-beschränkt und abgeschlossen, dann gibt es ein $c \in \mathfrak{R}$, so daß für alle $x \in \mathfrak{R}$ $\mu_l(x) = \mu(x \wedge c)$ und $\mu_a(x) = \mu(x \setminus c)$; $(c \wedge \mathfrak{R}) \triangle \mathfrak{N}(\mu)$ ist dabei die Zusammenhangskomponente von 0 in $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))$.

Traynor hat in ([14], Abschnitt 3.1) für s-beschränkte, gruppenwertige Inhalte auf Mengenringen eine Zerlegung $\mu = \mu_1 + \mu_2$ "into atomless and nearly atomic parts" angegeben. Wir vergleichen diese nun mit der Zerlegung in (6.8). Bei gleicher Bezeichnungsweise wie im Beweis von (6.8) kann $\mathfrak{C}^d$ nach (4.6) mit einer Potenzmenge $\mathbf{P}(\mathfrak{A})$ identifiziert werden. Mit

$$a_0 := \{\alpha \in \mathfrak{A}\colon \{\alpha\} \in \mathfrak{R} \triangle \mathfrak{N}(\tilde{\mu})\}, \qquad a := \mathfrak{A}$$

ist für $x \in \mathfrak{R}$

$$\mu_1(x) = \tilde{\mu}(x \setminus a_0), \qquad \mu_2(x) = \tilde{\mu}(x \wedge a_0)$$

und

$$\mu_l(x) = \tilde{\mu}(x \setminus a), \qquad \mu_a(x) = \tilde{u}(x \wedge a).$$

Als Beispiel sei

$$\mathfrak{R} := \{A \subset \mathbf{N}\colon A \text{ oder } \mathbf{N} \setminus A \text{ ist endlich}\},$$

für $A \in \mathfrak{R}$ $\mu(A) = \sum_{n \in A} 1/2^n$, falls A endlich, und $\mu(A) = 1 + \sum_{n \in A} 1/2^n$, falls $\mathbf{N} \setminus A$ endlich ist. Dann ist $\mu_l = 0$, $\mu_a = \mu$; für $A \in \mathfrak{R}$ $\mu_1(A) = 0$ (falls A endlich), $\mu_1(A) = 1$ (falls $\mathbf{N} \setminus A$ endlich), $\mu_2(A) = \sum_{n \in A} 1/2^n$. Für jedes $\mathfrak{R}(\mu)$-Atom in $\mathfrak{R}$ ist zwar $\mu_1(A) = 0$, aber μ_1 ist atomar, $\mathbf{N}$ ist ein $\mathfrak{R}(\mu_1)$-Atom.

Um (6.8) mit dem Zerlegungssatz von Sobczyk und Hammer ([13], Theorem 4.1) vergleichen zu können, geben wir noch eine weitere Zerlegung des atomaren Teils μ_a an.

Satz (6.9). *Sei $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ separiert und vollständig, μ s-beschränkt und atomar. Dann gibt es eine Schar $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Inhalten auf $\mathfrak{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für jedes $\alpha \in A$ ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}(\mu_\alpha)$ (und damit $\mu_\alpha(\mathfrak{R})$) zweielementig.*

(2) *Zu endlich vielen verschiedenen Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ gibt es paarweise disjunkte Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{R}$, so dass $\mu_{\alpha_i}(x \setminus a_i) = 0$ für $x \in \mathfrak{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

(3) *Für je drei verschiedene Indizes $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ist $(\mu_\alpha + \mu_\beta) + \mu_\gamma = \mu_\alpha + (\mu_\beta + \mu_\gamma)$ und $\mu_\alpha + \mu_\beta = \mu_\beta + \mu_\alpha$.*

(4) *Es ist $\mu = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$ (d.h.: Für $x \in \mathfrak{R}$ konvergiert das gerichtete System der endlichen Partialsummen $\left(\sum_{\alpha \in E} \mu_\alpha(x)\right)_{E \in \mathbf{E}}$ ($\mathbf{E} = \{E \subset A\colon E$ ist endlich$\}$) gegen $\mu(x)$).*

(5) $\mathbf{V}(\mu) = \sup_{\alpha \in A} \mathbf{V}(\mu_\alpha)$.

Beweis. Durch die Quotientenbildung $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))/\mathfrak{N}(\mu)$ kann der Beweis darauf reduziert werden, daß $\mathbf{V}(\mu)$ hausdorffsch ist. $(\mathfrak{R}, \mathbf{V}(\mu))$ kann dann bei der Bezeichnungsweise von (4.7) für eine Menge $\mathfrak{A}$ dicht eingebettet werden in $(\mathbf{P}(\mathfrak{A}), \mathbf{U}_p)$. $\tilde{\mu}$ sei die stetige Fortsetzung von μ auf $(\mathbf{P}(\mathfrak{A}), \mathbf{U}_p)$ und $\tilde{\mu}_\alpha$ durch $\tilde{\mu}_\alpha(x) := \tilde{\mu}(x \wedge \{\alpha\})$ $(\alpha \in \mathfrak{A},\ x \in \mathbf{P}(\mathfrak{A}))$ definiert. Man prüft leicht nach, daß die Inhalte $\mu_\alpha := \tilde{\mu}_\alpha | \mathfrak{R}$ $(\alpha \in A := \mathfrak{A})$ die gewünschten Eigenschaften haben.

Ist $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ separiert und vollständig und μ s-beschränkt, besitzt nach (6.8), (6.9) μ eine Darstellung der Form $\mu = \mu_l + \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha$; dabei ist μ_l ein atomloser, s-beschränkter Inhalt und $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie atomarer, s-beschränkter Inhalte mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von (6.9). Hat $\mathbf{V}(\mu)$ oder sogar $\mathbf{V}$ eine abzählbare Basis, dann ist A höchstens abzählbar (vgl. (4.8) und den Beweis von (6.9)); im Spezialfall, daß μ ein $[0, \infty[$-wertiger Inhalt ist, erhält man also gerade die in ([13], Theorem 4.1) angegebene Zerlegung.

Satz (6.10). *Sei $\mathbf{V}^*$ eine separierte Uniformität auf $\mathfrak{G}$, bez. der $+$ gleichmäßig stetig ist; $\mathbf{V}^* \subset \mathbf{V}$; $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ vollständig und μ lokal s-beschränkt bez. $\mathbf{V}$. Dann ist μ atomlos (atomar) bez. $\mathbf{V}$ genau dann, wenn μ atomlos (atomar) bez. $\mathbf{V}^*$ ist.*

Beweis. Wir betrachten nur den atomlosen Fall. Sei $\mu = \mu_l + \mu_a$ die Zerlegung gemäß (6.8) bez. $\mathbf{V}$. Dann ist wegen $\mathbf{V}^*(\mu_l) \subset \mathbf{V}(\mu_l)$, $\mathbf{V}^*(\mu_a) \subset \mathbf{V}(\mu_a)$ nach (3.8), (4.9) μ_l auch atomlos bez. $\mathbf{V}^*$ und μ_a atomar bez. $\mathbf{V}^*$. Ist μ atomlos bez. $\mathbf{V}^*$, dann liefert die Eindeutigkeit der Zerlegung $\mu = \mu_l + \mu_a = \mu + 0$, dass $\mu^l = \mu$ und $\mu_a = 0$ ist; man wendet dabei (6.8) für die vollständige Hülle von $(\mathfrak{G}, \mathbf{V}^*)$ an. Wegen $\mu = \mu_l$ ist μ atomlos bez. $\mathbf{V}$.

Die umgekehrte Implikation folgt aus (3.8).

Statt der Vollständigkeit von $(\mathfrak{G}, \mathbf{V})$ kann man in (6.10) auch voraussetzen, daß μ abgeschlossen ist bez. $\mathbf{V}$.

Die Sätze dieses Abschnitts zeigen, daß bei unserem Begriff von atomlosen bzw. atomaren Inhalten entsprechende pathologische Situationen, wie sie Hoffmann-Jørgensen in den beiden Bemerkungen ([5], S. 16) und in der Bemerkung ([5], S. 16) beschreibt, nicht auftreten können.

Zur Erläuterung sei μ ein Maß auf einem δ-Ring $\mathfrak{R}$ mit Werten in einem lokalkonvexen hausdorff-topologischen reellen Vektorraum $\mathfrak{G}, \mathbf{V}$ seine Uniformität; $u_\alpha \in \mathfrak{G}'$, $\alpha \in A$, eine Schar von stetigen Funktionalen, welche die schwache Topologie auf $\mathfrak{G}$ erzeugt, und $\mathbf{V}(\sigma)$ die zugehörige Uniformität; $\mathbf{V}_\alpha$ die von u_α auf $\mathfrak{G}$ erzeugte Uniformität; und $\mathbf{U}_0$ die übliche Uniformität auf dem Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen. Dann sind äquivalent:

(1) μ ist atomlos (atomar) bez. $\mathbf{V}$.

(2) μ ist atomlos (atomar) bez. $\mathbf{V}(\sigma)$.

(3) Für jedes $\alpha \in A$ ist μ atomlos (atomar) bez. $\mathbf{V}_\alpha$.

(4) Für jedes $\alpha \in A$ ist $u_\alpha \circ \mu$ atomlos (atomar) bez. $\mathbf{U}_0$.

Wegen $\mathbf{U}_0(u_\alpha\circ\mu) = \mathbf{V}_\alpha(\mu)$ sind (3) und (4) äquivalent. (2)$\leftrightarrow$(3) folgt aus (6.3) (c) wegen $\mathbf{V}(\sigma) = \sup\limits_{\alpha\in A}\mathbf{V}_\alpha$. Da die schwache Topologie der vollständigen Hülle von $(\mathfrak{G},\mathbf{V})$ auf $\mathfrak{G}$ wieder die schwache Topologie induziert, kann zum Nachweis von (1)$\leftrightarrow$(2) $(\mathfrak{G},\mathbf{V})$ als vollständig angenommen werden; dann folgt (1)$\leftrightarrow$(2) aber unmittelbar aus (6.10).

7. Ergänzungen. In den folgenden Beispielen bezeichne $\mathbf{U}_0$ die übliche Uniformität auf $\mathbf{R}$, für eine Menge I $\mathbf{U}_p$ die zugehörige Produktuniformität auf $\mathfrak{G} := \{f\colon I\to\mathbf{R}\} = \mathbf{R}^I$ und μ_L das Lebesgue-Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ der Lebesgue-meßbaren Teilmengen von $\mathbf{R}$.

(7.1). $\mathfrak{R}$ sei eine atomlose σ-Algebra auf einer Menge I (z.B. ein überabzählbares Produkt einer mindestens vier-elementigen σ-Algebra). Wir fassen $\mathbf{P}(I) = \{0,1\}^I$ als Teilmenge von $\mathfrak{G}$ auf. Dann ist $\mathbf{U} := \mathbf{U}_p|\mathfrak{R}$ hausdorffsch, totalbeschränkt, also s-beschränkt und atomar; folglich:

(a) $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomlos $\not\leftrightarrow$ $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist atomlos (vgl. (2.3)).

(b) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist atomar $\not\leftrightarrow$ $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomar (vgl. (2.3)).

(c) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist totalbeschränkt (vgl. (4.7)) $\not\leftrightarrow$ Die in (4.5) betrachtete Abbildung j ist injektiv.

(d) $\mu\colon \mathfrak{R}\to(\mathfrak{G},\mathbf{U}_p)$, $\mu(A) := \chi_A$, ist (wegen $\mathbf{U}_p(\mu) = \mathbf{U}$) s-beschränkt und atomar $\not\leftrightarrow$ $\mu(\mathfrak{R})$ ist kompakt (vgl. (6.6)).

(e) Bezeichnet $\mathbf{U}_d$ die diskrete Topologie auf $\mathfrak{R}$, dann ist $(\mathfrak{R},\mathbf{U}_d)$ vollständig und atomlos, obwohl $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ atomar und $\mathfrak{N}(\mathbf{U}) = \mathfrak{N}(\mathbf{U}_d) = (0)$ ist.

(7.2). $\mathfrak{R}$ sei die von den in $]0,1[$ enthaltenen Intervallen mit rationalen Eckpunkten erzeugte Algebra, $I = [0,1[\cap\mathbf{Q}$, $\mu\colon\mathfrak{R}\to(\mathfrak{G},\mathbf{U}_p)$ das durch $(\mu(A))(0) = \mu_L(A)$, $(\mu(A))(x) = \chi_A(x)$ $(x\in I\setminus\{0\}, A\in\mathfrak{R})$ erklärte Maß und $\mathbf{U} = \mathbf{U}_p(\mu)$. ($\mathbf{U}$ ist also s-beschränkt und hausdorffsch.) Dann ist $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$-atomar, aber $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ nicht atomar (vgl. (2.3)).

Beweis. Wir setzen μ auf die σ-Algebra $\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{A}\cap\mathbf{P}(]0,1[)$ fort: $(\mu_1(A))(0) = \mu_L(A)$, $(\mu_1(A))(x) = \chi_A(x)$ $(x\in I\setminus\{0\},\ A\in\mathfrak{R}_1)$. Da $\mathfrak{R}_1$ bez. $\mathbf{U}_1 := \mathbf{U}_p(\mu_1)$ vollständig, ist der Abschluß $\overline{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ in $(\mathfrak{R}_1,\mathbf{U}_1)$ vollständig. Offenbar ist

$]0,1[\setminus\mathbf{Q}$ aus $\overline{\mathfrak{R}}$ und enthält kein $\mathfrak{N}(\mathbf{U}_1|\overline{\mathfrak{R}})$-Atom in $\overline{\mathfrak{R}}$. Also ist $(\overline{\mathfrak{R}},\mathbf{U}_1|\overline{\mathfrak{R}})$ und damit auch $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ nicht atomar.

Daß $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$-atomar ist, ist trivial.

(7.3). $\mathfrak{R}$ sei wie in (7.2) gewählt, $\mu := \mu_L|\mathfrak{R}$ und $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0(\mu)$. Dann ist $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ s-beschränkt, atomlos und $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}$-atomlos; ferner $\mu(\mathfrak{R}) = \mathbf{Q}\cap\,]0,1[$ total unzusammenhängend und daher $(\mathfrak{R},\mathbf{U})/\mathfrak{N}$ total unzusammenhängend. Folglich:

(a) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist s-beschränkt und atomlos und $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomlos $\not\rightarrow(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist zusammenhängend (vgl. (3.3), (3.4)).

(b) μ ist s-beschränkt und atomlos $\not\rightarrow\mu(\mathfrak{R})$ ist zusammenhängend (vgl. (6.5)).

(c) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})/\mathfrak{N}$ ist total unzusammenhängend und s-beschränkt $\not\rightarrow\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomar oder $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist atomar (vgl. (4.1), (4.2)).

(7.4). M sei eine überabzählbare Menge,

$$\mathfrak{R} = \mathbf{P}(M),$$
$$\mathfrak{N} = \{A\in\mathfrak{R}\colon A \text{ ist höchstens abzählbar}\},$$
$$\mathbf{U} := \{\mathfrak{M}\subset\mathfrak{R}\colon \mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}\}$$

das von $\mathfrak{N}$ auf $\mathfrak{R}$ erzeugte Hauptfilter. Dann ist $(\mathfrak{R},\mathbf{U})/\mathfrak{N}$ diskret; $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomlos; $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist vollständig, atomlos und nicht lokal s-beschränkt; folglich:

(a) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})/\mathfrak{N}$ ist total unzusammenhängend und vollständig $\not\rightarrow\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomar oder $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist atomar (vgl. (4.1), (4.2)).

(b) $(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist vollständig und atomlos und $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{N}$-atomlos $\not\rightarrow(\mathfrak{R},\mathbf{U})$ ist zusammenhängend oder nur fast-zusammenhängend (vgl. (3.3), (3.4)).

(c) Aus der Aussage (1) in (3.1) folgt i.allg. nicht die Aussage (2) in (3.1).

(7.5). Sei

$$\mathfrak{N}_1 = \{A\in\mathfrak{A}\colon \mu_L(A)<\infty\},$$
$$\mathfrak{R} = \mathfrak{N}_1\cup\{\mathbf{R}\setminus A\colon A\in\mathfrak{N}_1\},$$

$\mathbf{U}_1$ das von $\mathfrak{N}_1$ auf $\mathfrak{R}$ erzeugte Hauptfilter und $\mathbf{U}_2$ das von

$$\{\{A\in\mathfrak{R}\colon \mu_L(A)<\varepsilon\}\colon \varepsilon>0\}$$

erzeugte Filter. Dann ist $(\mathfrak{R},\mathbf{U}_1)$ vollständig, s-beschränkt und atomar; $(\mathfrak{R},\mathbf{U}_2)$ ist vollständig und atomlos; folglich:

$$\mathbf{U}_2 \text{ ist atomlos und } \mathbf{U}_1\subset\mathbf{U}_2 \not\rightarrow \mathbf{U}_1 \text{ ist atomlos (vgl. (3.8))}.$$

(7.6). Sei $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}\cap\mathbf{P}([0,1])$, $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_0(\mu_L|\mathfrak{R})$ und $\mathbf{U}_2$ die diskrete Topologie auf $\mathfrak{R}$. Dann ist $(\mathfrak{R},\mathbf{U}_1)$ vollständig, s-beschränkt und atomlos; $(\mathfrak{R},\mathbf{U}_2)$ ist vollständig und atomar; folglich:

$$\mathbf{U}_2 \text{ ist atomar und } \mathbf{U}_1\subset\mathbf{U}_2\not\rightarrow\mathbf{U}_1 \text{ ist atomar (vgl. (4.9))}.$$

(7.7). I sei eine überabzählbare Menge; für $x\in I$ und $A\subset I\times[0,1]$ bezeichne A_x den Schnitt $A_x := \{y\in[0,1]\colon (x,y)\in A\}$. Ferner sei

$$\mathfrak{R}_0 := \{A\subset I\times[0,1]\colon \forall x\in I\ A_x\in\mathfrak{A}\},$$

$\mu_0(A) := (\mu_L(A_x))_{x\in I}$ für $A\in\mathfrak{R}_0$,

$$\mathfrak{R} := \{A\in\mathfrak{R}_0\colon \{x\in I\colon \mu_L(A_x)\notin\{0,1\} \text{ ist abzählbar}\}\}$$

und $\mu := \mu_0|\mathfrak{R}$.

Dann ist $\mathfrak{R}$ eine σ-Algebra, $\mu\colon \mathfrak{R}\to(\mathfrak{G}, \mathbf{U}_p)$ ein Maß, $\mathbf{U} := \mathbf{U}_p(\mu)$ s-beschränkt; $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ ist zusammenhängend, aber nicht weg-zusammenhängend.

Beweis. Wir beweisen nur die letzten beiden Aussagen. Offenbar ist

$$\mathfrak{R}^* := \{A \in \mathfrak{R}_0\colon \{x \in I\colon A_x \neq \emptyset\} \text{ ist endlich}\}$$

ein dichter Teilring von $(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$. $(\mathfrak{R}^*, \mathbf{U}|\mathfrak{R}^*)$ ist weg-zusammenhängend; denn für $A \in \mathfrak{R}^*$ ist durch $f(t) := A\cap(I\times[0, t])$ eine stetige Abbildung $f\colon [-1, 1]\to\mathfrak{R}^*$ mit $f(-1) = \emptyset$ und $f(1) = A$ definiert. Mit $\mathfrak{R}^*$ ist daher auch $\mathfrak{R}$ bez. $\mathbf{U}$ zusammenhängend.

$(\mathfrak{R}, \mathbf{U})$ ist nicht weg-zusammenhängend: Wäre nämlich $f\colon [0, 1]\to\mathfrak{R}$ eine stetige Abbildung mit $f(0) = \emptyset$ und $f(1) = I\times[0, 1]$, dann wäre

$$I_0 := \bigcup_{r\in\mathbf{Q}\cap[0,1]} \{x \in I\colon \mu_L(f(r)_x) \notin \{0, 1\}\}$$

abzählbar, also $I\setminus I_0 \neq \emptyset$, und für ein $x_0 \in I\setminus I_0$ einerseits durch

$$g(t) := \mu_L\big(f(t)_{x_0}\big) = \big(\mu(f(t))\big)(x_0)$$

eine stetige Abbildung $g\colon [0, 1]\to\mathbf{R}$ definiert, anderseits $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ und $g(r) \in \{0, 1\}$ für $r \in \mathbf{Q}\cap[0, 1]$, ein Widerspruch.

(7.8). Sei $\mathbf{U}$ eine lokal s-beschränkte monotone Ringtopologie auf einem σ-Ring $\mathfrak{R}$, die von einer Schar $(\mu_a^*)_{a\in A}$ $[0, \infty]$-wertiger äußerer Maße erzeugt wird, und für $a \in A$

$$\mathfrak{N}_a = \{A \in \mathfrak{R}\colon \mu_a^*(A) = 0\}.$$

Dann ist nach (2.3), (3.8), (4.9) $\mathbf{U}$ genau dann atomlos (atomar), wenn für jedes $a \in A$ $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{N}_a$-atomlos ($\mathfrak{N}_a$-atomar) ist.

(7.9). Die Äquivalenz (1)$\leftrightarrow$(2) des Satzes (4.6) zeigt, daß der Wertebereich eines nicht atomaren Inhalts nur unter entsprechenden Voraussetzungen an die Struktur des Zielbereichs kompakt sein kann; denn, wie wir im folgenden zeigen, wird jede monotone Ringtopologie $\mathbf{U}$ auf einem Booleschen Ring von einem Inhalt mit Werten in einem geeigneten hausdorff-topologischen Vektorraum erzeugt: Da jeder Boolesche Ring zu einem Mengenring isomorph ist, kann $\mathfrak{R}$ als Mengenring angenommen werden. Entsprechend der Topologie der Maßkonvergenz definiert man auf dem $\mathbf{R}$-Vektorraum $\mathfrak{E}$ reellwertiger Funktionen, der von den charakteristischen Funktionen χ_A, $A \in \mathfrak{R}$, erzeugt wird, eine Vektorraumtopologie, indem man die Mengen $\{f \in \mathfrak{E}\colon \{x\colon |f(x)| > \varepsilon\} \in \mathfrak{U}\}$ $(\varepsilon > 0,\ \mathfrak{U} \in \mathbf{U})$ zur Nullumgebungsbasis erklärt. Der Quotientenraum $\mathfrak{E}/\overline{\{0\}}$ ist ein hausdorff-topologischer Vektorraum. Ist $\mathbf{V}$ seine Uniformität und ein Inhalt

$$\mu\colon \mathfrak{R}\to\mathfrak{E}/\overline{\{0\}}$$

durch $\mu(A) := \chi_A + \overline{\{0\}}$ definiert, dann ist der durch $\hat{\mu}(A\triangle\mathfrak{N}) := \mu(A)$ definierte Inhalt

$$\hat{\mu}\colon (\mathfrak{R}, \mathbf{U})/\mathfrak{N}\to\mathfrak{E}/\overline{\{0\}}$$

eine Einbettung und daher $\mathbf{U} = \mathbf{V}(\mu)$.

8. Literaturverzeichnis

[1] C. Constantinescu, *Atoms of group valued measures*, Comment. Math. Helv. 51 (1976), 191–205.

[2] — *The range of atomless group valued measures*, ibid. 51 (1976), 207–213.

[3] L. Drewnowski, *Topological rings of sets, continuous set functions, integration*, I und II, Bull. Acad. Polon. Sci, Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), 269–276 und 20 (1972), 277–286.

[4] — *On control submeasures and measures*, Studia Math. 50 (1974), 203–224.

[5] J. Hoffmann-Jørgensen, *Vector measures*, Math. Scand. 28 (1971), 5–32.

[6] J. Kaplansky, *Topological rings*, Amer. J. Math. 69 (1947), 153–183.

[7] J. Kluvanek, *The range of a vector-valued measure*, Math. Systems Theory 7 (1973), 44–54.

[8] K. Kuratowski, *Topology*, vol II, Academic Press, New York and London 1968.

[9] D. Landers, *Connectedness properties of the range of vector and semimeasures*, Manuscripta Math. 9 (1973), 105–112.

[10] J. S. Low, *The range of a vector measure with values in a Montel space*, Math. Systems Theory 5 (1971), 145–147.

[11] A. Liapounoff, *On completely additive vector functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR 4 (1940), 465–478.

[12] K. Musial, *Absolute continuity and the range of group valued measure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), 105–113.

[13] A. Sobczyk and P. C. Hammer, *A decomposition of additive set functions*, Duke Math. J. 11 (1944), 839–846.

[14] T. Traynor, *Decomposition of group-valued additive set functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22, 3 (1972), 131–140.

[15] J. Tweddle, *The range of a vector-valued measure*, Glasgow Math. Ass. Proc. 13 (1972), 64–68.

[16] H. Weber, **R**-*Freie Integrationstheorie*, I und II, J. Reine Angew. Math. 289 (1977), 30–54 und 290 (1977), 1–23.

[17] — *Fortsetzung von Maßen mit Werten in uniformen Halbgruppen*, Arch. Math. 27 (1976), 412–423.

Fachbereich Mathematik, Universität Konstanz
Postfach 7733, D-7750 KONSTANZ, BDR

Received September 17, 1979
Revised version November 18, 1980 (1583)