References

[1] V. Drobot, A. Naparstek and G. Sampson, (L_p, L_q) *mapping properties of convolution transforms*, Studia Math. 55 (1976), 41–70.

[2] W. B. Jurkat and G. Sampson, *The L^p mapping problem for well-behaved convolutions*, ibid. 65 (1979), 227–238.

[3] —, — *On weak restricted estimates and endpoint problems for convolutions with oscillating kernels (I)*, Pac. J. Math. (to appear).

[4] G. Sampson, *A note on weak estimates for oscillating kernels*, Studia Math. 70 (1981).

[5] — *More on weak estimates for oscillating kernels*, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 501–505.

[6] — *More on weak estimates for oscillating kernels (II)*, ibid. 29 (1980), 349–360.

[7] M. Zafran, *Multiplier transformations of weak type*, Ann. of Math. (2) 101 (1975), 34–44.

[8] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2nd ed., Vols. 1 and 2, Cambridge Univ. Press, New York 1959.

Received February 16, 1981 (1663)

STUDIA MATHEMATICA. T. LXXIV. (1982)

Filtres: mesurabilité, rapidité, propriété de Baire forte

par

MICHEL TALAGRAND (Paris)

Résumé. On montre que contrairement à ce qui se passe pour la propriété de Baire il y a peu d'espoir de caractériser la mesurabilité des filtres par des conditions de rapidité. On étudie ensuite divers aspects de la propriété de Baire. En particilier, sous l'hypothèse du continu, il existe un filtre ayant la propriété de Baire forte qui n'est pas mesurable. On étudie enfin quels sont les filtres tels qu'il existe une suite d'ultrafiltres convergent selon ce filtre. De façon surprenante, ils peuvent être relativement réguliers.

Le but de ce travail est de complèter et de préciser un travail précédent [4], dont on conserve la terminologie et les notations. Pour simplifier on appelle filtre sur $\boldsymbol{N}$ un filtre propre, c'est-à-dire contenant les complémentaires de parties finies de $\boldsymbol{N}$. On appelle m la mesure canonique de $K = \{0,1\}^{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})$. Un filtre, étant un ensemble de parties de $\boldsymbol{N}$, est donc un sous-ensemble de K, on peut ainsi parler de filtres mesurables, où définir diverses propriétés topologiques pour les filtres.

I. Mesurabilité et rapidité. Le Théorème 17 de [4] montre qu'un filtre non-mesurable F possède des parties ayant "peu" d'éléments, au sens suivant: F satisfait

(1) Si (I_n) est une partition de $\boldsymbol{N}$ en ensembles finis telle qu'il existe un réel $a > 0$ avec $\sum a^{\operatorname{card} I_n} < +\infty$, alors, pour tout α il existe $x \in F$ avec $\operatorname{card}(I_n \cap x) \leqslant \alpha \operatorname{card} I_n$.

Le problème est posé de savoir si cette propriété entraine la non-mesurabilité de F. Nous allons montrer que sous l'hypothèse du continu (HC) il n'en est rien. Disons qu'un filtre F est *dichotomique* si pour toute partition $(J_n)_n$ de $\boldsymbol{N}$ en ensembles à deux éléments, il existe $x \in F$ avec $\operatorname{card}(J_n \cap x) \leqslant 1$ $\forall n$. Il est facile de voir qu'un filtre dichotomique satisfait (1).

THÉORÈME 1 (HC). *Il existe un filtre dichotomique mesurable.*

L'idée est de montrer qu'un filtre non measurable satisfait des conditions analogues à (1), mais assez différentes pour qu'on puisse les nier sans nier la dichotomie de F.

PROPOSITION 1. *Soit p_n, k_n deux suites d'entiers, $(I_n)_{l \leqslant p_n}$ des sous-ensembles deux à deux disjoints de $\boldsymbol{N}$, avec pour $l \leqslant p_n$, $\operatorname{card} I_n^l = k_n$. Supposons qu'il existe un $a > 0$ avec*

$$\sum (1-(1-a)^{k_n})^{p_n} < +\infty.$$

Alors pour tout filtre non mesurable F, il existe $x \in F$ satisfaisant:

(2) $$\forall n \exists l \leqslant p_n,\ x \cap I_n^l = \emptyset.$$

Preuve. Soit A l'ensemble des x satisfaisant (2). Soit m_a la mesure $((1-a)\delta_0 + a\,\delta_1)^{\otimes N}$ sur $\{0,1\}^N$. Un calcul facile montre que $m_a(A) > 0$. D'autre part [4], proposition 11, montre que $m_a^*(F) = 1$, donc $F \cap A \neq \emptyset$.

Un petit lemme combinatoire sera aussi utile:

Lemme 3. *Soient $(H_i)_{i\leqslant n}$ des ensembles finis avec* $\operatorname{card} H_i = 2l_i$. *Soit $\mathscr{C}$ une famille de couples de points distincts de $H = \bigcup_{i\leqslant n} H_i$, telle que si $(a,b) \in \mathscr{C}$, $(a',b') \in \mathscr{C}$, $(a,b) \neq (a',b')$, les points a, b, a', b' soient distincts. Il existe alors un ensemble $L \subset H$ avec* $\operatorname{card}(L\cap H_i) = l_i$ *pour tout i, et tel que pour $(a,b) \in \mathscr{C}$, on n'a pas $a, b \in L$.*

Preuve. On va raisonner par induction sur $\sum_{i\leqslant n} l_i$. Supposons le résultat connu lorsque cette somme est $\leqslant p-1$, et prouvons le pour n. Soit

$$M = \{a \in H;\ \exists b \in H,\ (a,b) \in \mathscr{C}\}.$$

S'il existe i et $a_1, a_2 \in H_i \setminus M$, on pose $L \cap \{a_1, a_2\} = a_1$, $H_i' = H_i \setminus \{a_1, a_2\}$, $H_j' = H_j$ pour $j \neq i$, et on conclu par l'hypothèse de recurrence puisque $\sum \operatorname{card} H_i' = 2(p-1)$. Sinon pour tout i on a $M \cap H_i \neq \emptyset$. Considérons une famille $i_1, \ldots, i_s$ d'éléments distincts de $[1, n]$ tels qu'il existe des $a_r \in H_{i_r}$ pour $r \leqslant s-1$ des $b_r \in H_{i_r}$, $2 \leqslant r \leqslant s$, avec $(a_r, b_{r+1}) \in \mathscr{C}$ pour $1 \leqslant r \leqslant s-1$. On peut choisir cette famille de cardinal maximal.

1er cas. $\{a_1\} = M \cap H_{i_1}$, $\{b_s\} = M \cap H_{i_s}$. Soit $b_1 \in H_{i_1} \setminus \{a_1\}$, $a_s \in H_{i_s} \setminus \{b_s\}$. On prend $H_i' = H_i \setminus \{a_i, b_i\}$ si i est de la fome i_r, $H_r' = H_i$ sinon; on applique l'hypothèse de récurrence aux H_i' puis on prend L tel que

$$L \cap \{a_{i_r}, b_{i_r};\ \ 1 \leqslant r \leqslant s\} = \{a_{i_r};\ 1 \leqslant r \leqslant s\}.$$

2ème cas. Par exemple il existe $a_s \in M \cap H_{i_s} \setminus \{b_s\}$. Soit b_{s+1} tel que $(a_s, b_{s+1}) \in \mathscr{C}$. Par maximalité de s il existe $t < s$ avec $b_{s+1} \in H_{i_t}$. On pose $H_{i_t}' = H_{i_t} \setminus \{a_t, b_{s+1}\}$, $H_{i_r}' = H_{i_r} \setminus \{a_r, b_r\}$ pour $t < r \leqslant s$, $H_i' = H_i$ sinon. On applique l'hypothèse de récurrence aux H_i', puis on prend L tel que

$$L \cap \{a_{i_r};\ t \leqslant r < s,\ b_{i_r}, t < r \leqslant s+1\} = \{a_{i_r};\ t \leqslant r < s\}$$

ce qui termine la preuve.

On désigne par Ω le premier ordinal non dénombrable

Preuve du théorème 1. Soient $(I_n^p)_{p\leqslant p_n}$ des ensembles disjoints avec $p_n = 2^{n^2}$ et $\operatorname{card} I_n^p = n$ pour tout n, p. Soit $(J^a)_{a<\Omega}$ une énumération des partitions $J^a = (J_n^a)_n$ de N en ensembles à deux éléments. On va construire par induction pour $\alpha < \Omega$ une suite croissante $(F^a)_{a<\Omega}$ de filtres sur N, à base dénombrable, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées, où l'on pose $r_l = p_{q_l}$

(3) $\forall x \in F^a, \exists (q_l), \forall l, \forall p \leqslant r_l, \operatorname{card}(x \cap I_{q_l}^p) > l.$

(4) Il existe $x \in F^{a+1}$ tel que $\forall n, \operatorname{card}(x \cap J_n^a) \leqslant 1.$

Supposons que la construction a été effectuée pour tout ordinal $\beta > \alpha$. Si α est limite, on pose $F^a = \bigcup_{\beta<a} F^\beta$. Sinon, α est de la forme $\gamma+1$. Soit (x_n) une base dénombrable de F^γ, que l'on peut supposer décroissante. D'après (3), il existe une suite (q_l) avec

$$\forall l, \forall p \leqslant r_l, \operatorname{card}(x_l \cap I_{q_l}^p) \geqslant 2l.$$

En remplaçant au besoin q_l par une sous-suite, on peut supposer que

$$\forall n, l,\ J_n^a \cap \Big(\bigcup_{p\leqslant r_l} I_{q_l}^p\Big) \neq \emptyset \rightarrow J_n^a \cap \Big(\bigcup_{p\leqslant r_{l+1}} I_{q_{l+1}}^p\Big) = \emptyset.$$

Le lemme 3 montre qu'il existe une partie x de N, avec $\operatorname{card}(x \cap J_n^a) \leqslant 1$, pour tout n, telle que

$$\forall l, \forall p \leqslant p_{q_l}, \operatorname{card}(x \cap x_l \cap I_{q_l}^p) \geqslant l.$$

Ceci montre que le filtre F^a engendré par F^γ et x satisfait (3) et (4), ce qui termine la construction.

Le filtre $F = \bigcup_{a<\Omega} F^a$ est dichotomique et satisfait (3). D'après la proposition 2 il est mesurable, ce qui conclut la preuve.

Il y a bien d'autres conditions que (1) ou (2) auquelles on peut penser et qui seront satisfaites par les filtres non mesurables. C'est pourquoi nous sommes très pessimistes sur la possibilité de caractériser les filtres non mesurables par ce type de conditions.

On va conclure ce paragraphe par des remarques sur un aspect autre de la mesurabilité. Etant donné une suite $a = (a_n)$ de réels > 0, soit m_a la mesure $\bigotimes_n ((1-a_n)\delta_0 + a_n\delta_1)$. La proposition 3 G de [1] montre que (sous l'hypothèse du continu) il existe un filtre F avec $m_a^*(F) = 1$ si et seulement si pour tout k, $\sum_n a_n^k = +\infty$. D'où le problème: étant donné un filtre F, quand existe-t-il une suite $a_n \to 0$ avec $m_a^*(F) = 1$? Le résultat mentionné précédemment montre que pour $x \in F$, on doit avoir $\sum_{i\in x} a_i^k = +\infty$ pour tout k. Ceci montre que F n'est pas rapide au sens suivant: il existe une suite (n_k) d'entiers telle que pour tout $x \in F$, il existe une infinité d'entiers k avec $\operatorname{card}(x \wedge [1, n_k]) \geqslant k$. Mais d'autre part, il existe des parties $x \in F$ de densité zéro (c'est-à-dire $\lim_n n^{-1} \operatorname{card}(x \cap [1,n]) = 0$, car l'ensemble des parties de densité zéro est de m_a-mesure 1. Ainsi F contient des parties "petites", mais pas de parties "trop petites". Il est possible de montrer avec les techniques de [4], que l'ensemble des F pour lesquels existe une telle mesure m_a est stable par intersection dénombrable.

II. Propriété de Baire. On rappelle que l'on dit qu'un sous-ensemble d'un espace topologique a *la propriété de Baire* s'il est égal à un ensemble ouvert modulo un ensemble maigre. Un filtre à la propriété de Baire si et seulement s'il est maigre.

On dit qu'un ensemble possède la *propriété de Baire forte* si sa trace sur tout fermé possède la propriété de Baire relativement à ce fermé.

Dans $\{0,1\}^N$ il y a une famille de fermés qui joue un role particulièrement important vis à vis des filtres. Ce sont les fermés de la forme

$$A_I = \{x \in \{0,1\}^N,\ i \in I \Rightarrow x_i = 1\}$$

pour une partie I de N. On dira qu'un filtre possède la *propriété de Baire complète* si sa trace sur chaque A_I possède la propriété de Baire. Ceci est équivalent au fait que pour toute partie $I \notin F$, le filtre engendré par I^c et F soit maigre. Il est interessant de noter qu'un filtre ayant la propriété de Baire complète possède la propriété de Baire dans une famille d'ensembles sensiblement plus générale que les A_I.

PROPOSITION 4. *Soit (J_i) une partition de N et pour chaque i soit L_i un sous-ensemble fini de $\{0,1\}^{J_i}$. Soit F un filtre ayant la propriété de Baire complète, et posons $L = \prod_i L_i$. Alors soit $L \subset F$, soit F est maigre dans L.*

Preuve. Supposons $L \not\subset F$, et soit $y \in L \setminus F$. Le filtre engendré par F et $y^c = N \setminus y$ est non trivial, donc maigre. D'après le théorème 21 de [4], il existe une suite disjointe (I_k) d'ensembles finis tels que pour tout $x \in F$ on ait $x \cap y^c \cap I_k \neq \emptyset$ pour k assez grand. Il existe donc une suite n_p croissante d'entiers telle que pour $x \in F$ on ait

$$x \cap y^c \cap \bigcup_{n_p < i \leqslant n_{p+1}} J_i \neq \emptyset$$

pour p assez grand. Si π_i désigne la projection canonique de K sur $\{0,1\}^{J_i}$, on a donc

$$\forall x \in F,\ \exists p,\ \forall q \geqslant p,\ \exists i \in]n_q, n_{q+1}],\ \pi_i(x) \neq \pi_i(y).$$

Il suffit pour conclure de vérifier que l'ensemble des x ayant cette propriété est maigre dans L, ce qui est clair.

Etant donné un filtre F et des filtres (F_n) sur N, nous rappelons que l'on nomme *somme de F_n selon F* le filtre $G = \sum_F F_n$ sur $N \times N$ donné par

$$x \in G \Leftrightarrow \{n;\ \{k;\ x_{n,k} = 1\} \in F_n\} \in F.$$

PROPOSITION 5. (a) *Si chaque F_n possède la propriété de Baire complète, il en est de même de $G = \sum_F F_n$.*

(b) *Si F n'est pas maigre, G ne possède pas la propriété de Baire forte. Il existe donc un filtre possèdant la propréte de Baire complète sans possèder la propriété de Baire forte.*

Preuve. (a): Soit x une partie de $N \times N$ dont le complémentaire x^c n'appartient pas à G. Alors si

$$y = \{n;\ \{k;\ x_{n,k} = 0\} \notin F_n\},$$

le complémentaire de y n'appartient pas à F. Soit F' le filtre engendré par y et F, et pour chaque $n \in y$ soit F'_n engendré par F_n et $\{k;\ x_{n,k} = 1\}$. Alors $G' = \sum_F F'_n$ est le filtre engendré par G et x. Puisque $\{n;\ F'_n \text{ maigre}\} \in F'$, G' est maigre d'après les résultats de [4].

(b): Soit $A = \{x;\ \forall n, \forall k, x_{n,k} = x_{n,1}\}$. Il est clair que

$$A \cap G = \{x;\ \forall n, \forall k, x_{n,k} = x_{n,1}, \{n;\ x_{n,1} = 1\} \in F\}$$

donc $A \cap G$ est homéomorphe à F, ce qui suffit.

Remarques. (a) On peut naturellement se poser bien des questions vis à vis de la stabilité des diverses propriétés de Baire vis à vis des opérations sur les filtres. Le but de la proposition précédente est uniquement de donner un exemple clair de filtre ayant la propriété de Baire complète sans avoir la propriété de Baire forte.

(b) La raison pour laquelle nous trouvons interessant de considérer ces deux types de propriété de Baire, est que la propriété de Baire forte est plus naturelle du point de vue topologique, mais que la propriété de Baire complète est plus naturelle du point de vue des filtres, et également beaucoup plus parlante du point de vue „géométrique".

La proposition suivante est une extension d'un résultat de [4], qui fait exactement pendant à la proposition 28 du même travail. On renvoie à [3] pour l'axiome de Martin (AM).

PROPOSITION 7 (AM). *Il existe un filtre non mesurable ayant la propriété de Baire forte.*

Preuve. Soit Ω_1 le premier ordinal ayant la puissance du continu. Soit $(L_a)_{a<\Omega_1}$ une énumération des compacts de K de mesure positive, et $(A_a)_{a<\Omega}$ une énumération des compacts parfaits de K.

Tout d'abord, comme il est facile de voir, et est utilisé et démontré dans la preuve de la proposition de [4], il existe une suite k_n d'entiers tels que pour tout $a > 0$, et toute suite I_n d'ensembles disjoints de N, tels que $\operatorname{card} I_n \geqslant a k_n$, on a m.p.s.

$$\lim_n \inf (\operatorname{card} I_n)^{-1} \operatorname{card}(x \cap I_n) \geqslant \tfrac{1}{3}.$$

On va construire par induction sur $a < \Omega_1$ une suite croissante de filtres F_a, des suites d'ensembles disjoints $(I_n^a)_n$ de N, des fermés $B_a \subset A_a$, et

icm©

si $B_\alpha \neq \emptyset$, des suites $(y^{\alpha,n})_n$ de B_α, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

(5) F_α a une base de cardinal $\leqslant \sup(\aleph_0, \operatorname{card}\alpha)$.
(6) $\forall x \in F_\alpha, \exists a_x > 0, \forall \beta \leqslant \alpha, \lim_n \inf k_n^{-1} \operatorname{card}(x \cap L_n^\beta) \geqslant a_x$.
(7) $\exists x_\alpha \in F_\alpha \cap L_\alpha$.
(8) Le complémentaire de F_α est maigre dans $A_\alpha \setminus B_\alpha$.
(9) $(y^{\alpha,n})$ est dense dans B_α si $B_\alpha \neq \emptyset$.
(10) $\forall n, y^{\alpha,n} \cap I_n^\alpha = \emptyset$.
(11) $\forall n, \operatorname{card} I_n^\alpha = k_n$.

Le premier pas étant analogue au cas général, supposons la construction effectuée pour tout ordinal $\beta < \alpha$. Soit $F'_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$. Ce filtre a une base Y de cardinal $\leqslant \sup(\aleph_0, \operatorname{card}\alpha)$. Pour chaque $y \in Y$, d'après (6) et la propriété des k_n, on a pour m presque tout x:

$$\forall \beta < \alpha, \forall y \in Y, \lim_n \inf k_n^{-1} \operatorname{card}(x \cap y \cap I_n^\beta) > \tfrac{1}{3} a_y.$$

Le théorème 3 de [3] montre qu'il existe $x_\alpha \in L_\alpha$, tel que pour $\beta < \alpha$ et $y \in Y$, on ait $\lim_n \inf k_n^{-1} \operatorname{card}(x_\alpha \cap y \cap I_n^\beta) \geqslant \tfrac{1}{3} a_y$.

Il en résulte que le filtre F_α engendré par F'_α et x_α vérifie (5) (6), (7).

Soit V_α le plus grand ouvert de A_α dans lequel le complémentaire de F_α est maigre et $B_\alpha = A_\alpha \setminus V_\alpha$. Il est facile de voir que B_α est parfait. Puisque F_α à une base de cardinal $< \operatorname{card}\boldsymbol{R}$, F_α est réunion de moins de $\operatorname{card}\boldsymbol{R}$ fermés. Le théorème 7 de [3] montre que $F_\alpha \cap B_\alpha$ possède la propriété de Baire, donc est maigre dans B_α. Il existe donc une suite $(y^{\alpha,n})_n$ dense dans B_α, avec $y^{\alpha,n} \notin F_\alpha$. Soit H_n le complémentaire de $y^{\alpha,n}$. Le théorème 4 de [3] montre qu'il existe une partie I de $\boldsymbol{N}$, telle que $I \cap H_n$ soit infinie pour tout n, et que pour tout $x \in F_\alpha$, $(\boldsymbol{N} \setminus x) \cap I$ soit finie. Soit alors I_n^α une suite disjointe d'ensembles finis, avec $I_n^\alpha \subset I \cap H_n \setminus [1, n]$ et $\operatorname{card} L_n^\alpha = k_n$. Pour $x \in F$, on a $I_n^\alpha \subset x$ pour n assez grand, donc les conditions (8) à (11) sont vérifiées, ce qui termine la construction.

Posons $F = \bigcup_{\alpha<\Omega_1} F_\alpha$. D'après (7), F rencontre tout compact de mesure > 0, donc n'est pas mesurable. Soit A un compact parfait de K et α tel que $A = A_\alpha$. D'après (8), le complémentaire de F est maigre dans $A_\alpha \setminus B_\alpha$. Montrons que F est maigre dans B_α. D'après (6):

$$\forall x \in F, \exists p, \forall n \geqslant p, x \cap I_n^\alpha \neq \emptyset.$$

Mais l'ensemble des $x \in F$ satisfaisant cette condition est un K_σ de K, qui est maigre dans A_α puisque les fermés $\{x;\ \forall n \geqslant p, x \cap I_n^\alpha \neq \emptyset\}$ ne contiennent qu'un nombre fini d'éléments de la suite $(y^{\alpha,n})$, qui est dense dans A_α. La preuve est terminée.

III. Sur la tribu engendrée par les ultrafiltres. Dans [4], on considère la tribu sur K engendrée par les ultrafiltres. Un problème naturel est de savoir si l'ensemble des ultrafiltres est un système minimal de générateurs pour cette tribu, autrement dit, si $(U_n)_{n\geqslant 1}$ sont des ultrafiltres et si U est distinct des U_n, est il possible que U appartienne à la tribu engendrée par les $(U_n)_{n\geqslant 1}$? Ceci équivaut au fait que U soit adhérent aux U_n et à l'existence d'un ensemble borélien B de K, tel que si on pose:

$$H((U_n), U) = \{y \in K;\ \exists x \in K, x \in U, x \in U_n \Leftrightarrow y_n = 1\},$$
$$S((U_n)) = \{y \in K;\ \exists x \in K, x \in U_n \Leftrightarrow y_n = 1\},$$

on ait $H((U_n), U) = S((U_n)) \cap B$. On a le résultat plus précis suivant:

Proposition 8. *Supposons U adhérent aux U_n. Soit B un sous-ensemble de K tel que $H((U_n), U) = S((U_n)) \cap B$. Alors B n'a pas la propriété de Baire forte, et n'est pas universellement mesurable. Ainsi l'ensemble des ultrafiltres est un système générateur minimal de la tribu qu'il engendre.*

Preuve. Elle est très simple. On construit par induction sur n une suite I_n de parties infinies de $\boldsymbol{N}$, telles que $n \in I_n$, $I_n \notin U$, et que si p est le plus petit entier tel que $\bigcup_{i\leqslant n-1} I_i \notin U_p$, on a $I_n \in U_p$. Ainsi (I_n) est une partition de $\boldsymbol{N}$, chaque $U_p, p \geqslant 1$ contient un des I_n, et U ne contient aucun I_n. Soit Φ l'application injective de K dans K qui à x associe $y = \Phi(x)$ donné par

$$y_n = 1 \Leftrightarrow \text{l'unique } p \text{ tel que } n \in I_p \text{ vérifie } x_p = 1.$$

Il est clair que $\Phi^{-1}(S((U_n))) = K$ et que $\Phi^{-1}(H((U_n), U))$ est un ultrafiltre V. On a donc $\Phi^{-1}(B) = V$, qui n'a pas la propriété de Baire, et n'est pas m-mesurable, ce qui termine la preuve.

Il se pose maintenant la question suivante: Soit U_n une suite d'ultrafiltres distincts. Pour quels filtres F est ce que $\lim_F U_n$ existe? Suivant les lignes du théorème 8, on a

Théorème 9. *Soit F un filtre que l'on suppose soit universellement mesurable, soit ayant la propriété de Baire forte. Soit U_n une suite d'ultrafiltres telle que $U = \lim_F U_n$ existe alors $\{n;\ U_n = U\} \in F$.*

Preuve. Si $I = \{n;\ U_n = U\} \notin F$, considérons le filtre G engendré par $\boldsymbol{N} \setminus I$ et F. On a $G = G_1 \times \{0,1\}^I$, ou $G_1 = \{x \subset \boldsymbol{N} \setminus I;\ x \cup I \in F\}$. Ainsi G est soit universellement mesurable, soit à la propriété de Baire forte suivant le cas. Puisque $H((U_n), U) = S((U_n)) \cap G$, le résultat découle du théorème précédent.

Le résultat précédent montre que F ne peut être très régulier si $\lim_F U_n$ existe pour une suite d'ultrafiltres distincts. Toutefois, le résultat suivant montre que F n'est pas nécessairement très pathologique. Il montre aussi que le théorème 9 n'est guère améliorable.

Proposition 10 (AM). *Il existe une suite (U_n) d'ultrafiltres distincts et un filtre F, de sorte que $U = \lim_F U_n$ existe, et que pour partie I de $\boldsymbol{N}$ dont le*

icm©

complémentaire n'appartient pas F, le filtre engendré par I et F est maigre et mesurable.

Preuve. Soit L un compact parfait métrisable totalement discontinu. Soit φ une surjection de βN sur L. D'après le lemme de Zorn il existe un compact $M \subset \beta N \setminus N$ tel que $\varphi(M) = L$, et que pour tout compact $M' \subset M$, $M' \neq M$, on ait $\varphi(M') \neq L$.

Soit (U_n) une suite de M telle que si $d_n = \varphi(U_n)$ la suite (d_n) soit dense dans L. Soit d un point de L différent des d_n. Soit $(N_\alpha)_{\alpha<\Omega_1}$ une énumération des fermés rares de L. Par induction sur $\alpha < \Omega_1$ on va construire des sous-ensembles H_α ouvert-fermés de $L' = L \setminus \{d\}$, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout α:

(12) Pour $\beta < \alpha$, d n'est pas adhérent à $H_\alpha \setminus H_\beta$.

(13) d est adhérent à H_α.

(14) $H_\alpha \cap N_\alpha = \emptyset$.

Supposons la construction effectuée pour tout $\beta < \alpha$. Soit (V_n) une énumération des ouverts-fermés compacts non vides de L' qui ne rencontrent pas N_α. Soit (W_n) une base décroissante de voisinages de d. Pour $\beta < \alpha$, et pour $p \in N$, soit

$$A_\beta = \{n;\ V_n \subset H_\beta\}, \qquad B_p = \{n;\ V_n \subset W_p \setminus N_\alpha\}$$

grace à (12) et (13), on voit sans peine qu'aucun B_p n'est recouvert par un nombre fini de complémentaire d'ensembles A_β. Le théorème 4 de [3] montre qu'il existe une partie infinie I de N telle que $I \cap B_p \neq \emptyset$ pour tout p et que $I \setminus A_\beta$ soit finie pour tout β. Soit $i_p \in I \cap B_p$. Il est clair que $H_\alpha = \bigcup_p V_{i_p}$ est un ouvert-fermé de L' satisfaisant (12) à (14). La construction est terminée.

Pour $\alpha < \Omega_1$, soit

$$M_\alpha = \{U \in M;\ \varphi(U) = d,\ U \in \overline{\{U_n;\ d_n \in H_n\}}\}.$$

D'après (12), (13), la suite M_α est une suite décroissante de fermés de M. Soit $U \in \bigcap_\alpha M_\alpha$. On va montrer que si F est le filtre sur N engendré par les ensembles $\{n;\ I \in U_n\}$ pour $I \in U$, alors F possède les propriétés décrites dans l'énoncé. Cela suffira puisque clairement $U = \lim_F U_n$.

Soit $I \subset N$ tel que $N \setminus I \notin F$. Soit

$$J = \{n;\ d_n \in \mathring{T},\ T = \overline{\{d_p;\ p \in I\}}\}.$$

On va montrer que $N \setminus J \notin F$. Il suffit pour cela de voir que $N \setminus (I \setminus J) \in F$. Soit $N = \overline{\{d_p;\ p \in I \setminus J\}}$. Par construction cet ensemble est rare. D'après (14), il existe donc α avec $H_\alpha \cap N = \emptyset$. Puisque $\varphi^{-1}(H_\alpha)$ et $\varphi^{-1}(L' \setminus H_\alpha)$ sont deux ouverts disjoints de βN, il existe $J' \subset N$ avec $d_p \in H_\alpha \Leftrightarrow J' \in U_p$. Puisque $V \in M_\alpha$, on a $J' \in F$ d'où le résultat puisque $J' \subset N \setminus (I \setminus J)$.

Il suffit donc de montrer que le filtre G engendré par F et J est maigre et mesurable. Soit W un voisinage ouvert et fermé de U. La minimalité de M montre que $L \setminus \varphi(M \setminus W)$ est dense dans $\varphi(W)$. Puisque $N \setminus J \notin F$, il existe $n \in J$ avec $U_n \in W$, i.e. $d_n \in \varphi(W)$. Il existe alors un voisinage V de d_n tel que $V \subset \overline{\{d_p;\ p \in J\}}$ et $V \subset L \setminus \varphi(M \setminus W)$. Si on pose $C_V = \{p \in J;\ d_p \subset V\}$, on a $U_p \in W$ pour $p \in C_V$. Il existe donc une famille (C_n) de parties infinies de N telles que si $x \in G$, il existe n avec $C_n \subset x$. Ceci montre bien sur que G est maigre et négligeable, ce qui termine tout.

Bibliographie

[1] D. H. Fremlin, M. Talagrand, *A decomposition theorem for additive set functions with applications to Pettis integrals and ergodic means*, Math. Z. 168 (1979), 117–142.

[2] K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press, 1976.

[3] R. Schoenfield, *Martin's Axiom*, Amer. Math. Monthly 32 (1975), 610–617.

[4] M. Talagrand, *Filtres non mesurables et compacts de fonctions mesurables*, Studia Math. 67 (1980), 13–43.

EQUIPE D'ANALYSE-TOUR 46
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, Place Jussieu, 75230-Paris Cedex 05

Received February 18, 1981 (1666)