STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIII. (1982)

Spectres joints et prolongement des caractères

par

BERNARD HOST et FRANÇOIS PARREAU (Villetaneuse)

Abstract. Soit G un groupe abelien localement compact. Nous renforçons d'abord les résultats de l'article de G. Brown „Spectral extension and power independence in measure algebras" paru dans cette revue. Nous donnons une condition suffisante pour que le spectre joint de n probabilités sur G soit le polydisque $\boldsymbol{D}^n$.

Ensuite, à partir d'une propriété d'extension voisine, nous montrons que le spectre de $M_0(G)$ est dense dans celui de $M(G)$ si G est métrisable.

0

0.1. Dans cet article, nous étudions certaines propriétés d'indépendance et de prolongement des caractères dans l'algèbre $M(G)$ des mesures de Radon finies sur un groupe abélien localement compact G. Lorsque G est métrisable, ces propriétés permettent d'établir que le spectre de l'idéal $M_0(G)$, formé des mesures dont la transformée de Fourier–Stieltjes tend vers 0 à l'infini, est dense dans le spectre de $M(G)$ (théorème 3).

Une partie des résultats est formulée dans le cadre plus général des algèbres de convolution de mesures. Le livre de référence est celui de Taylor [7], dont nous utilisons les définitions et notations, en particulier pour les notions de L-sous-espace et d'orthogonalité.

Soit M une algèbre de convolution de mesures; on supposera M commutative et munie d'une unité δ de norme 1. $\Delta(M)$ désigne le spectre de l'algèbre M. Pour une mesure μ de M, $\hat{\mu}$ désigne la transformée de Gelfand de μ et le spectre de μ est la partie compacte $\hat{\mu}(\Delta(M))$ de $\boldsymbol{C}$.

Dans [1] et [7] sont établies des conditions suffisantes pour que le spectre d'une mesure de probabilité μ de M soit le disque unite $\boldsymbol{D}$; en particulier si $M = M(G)$, il suffit que μ soit à puissances fortement indépendantes, c'est-à-dire que: pour tout couple (m, n) d'entiers positifs distincts et tout $x \in G$,

$$\mu^n \perp \mu^m * \delta_x.$$

0.2. Dans un article recent ([3]), Brown montre que les généralisations naturelles de ce résultat au cas de plusieurs mesures ne sont pas valables. Pour n mesures $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de M, on appelle *spectre joint* de ces mesures la partie

$$\{(\hat{\mu}_1(\chi), \ldots, \hat{\mu}_n(\chi));\ \chi \in \Delta(M)\} \quad \text{de} \quad \boldsymbol{C}^n;$$

c'est aussi l'ensemble des points $(z_1, \ldots, z_n)$ de $\boldsymbol{C}^n$ tels que les mesures $(\mu_1 - z_1\delta), \ldots, (\mu_n - z_n\delta)$ appartiennent à un même idéal maximal de M.

En fait, Brown construit deux mesures de probabilité sur un groupe abélien localement compact qui sont "fortement polynômialement indépendantes", et même "complètement polynômialement indépendantes" (ces notions sont introduites dans [3]), mais dont le spectre joint n'est pas $\boldsymbol{D}^2$.

Dans la premiere partie de cet article, on établit une condition suffisante pour que le spectre joint de n mesures de probabilité d'une algèbre de convolution de mesures soit $\boldsymbol{D}^n$:

THÉORÈME 1. *Si $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont des mesures de probabilité de l'algèbre de convolution de mesures M, vérifiant: pour tout $(m_1, \ldots, m_n) \in \boldsymbol{N}^n$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$\mu_1^{m_1} * \ldots * \mu_n^{m_n} \perp \mu_i^{m_i+1} * M,$$

alors de spectre joint de $\mu_1, \ldots, \mu_n$ dans M est $\boldsymbol{D}^n$.

Dans le paragraphe 2, on montre que la condition ci-dessus est nécéssaire dans le cas de mesures "tame" sur un groupe abélien compact métrisable; la notion de mesure "tame" a été introduite par Brown dans [2], nous en rappelons la définition dans l'alinéa suivant.

0.3. Si f est une forme linéaire continue sur l'algèbre de convolution de mesures M, et si $\mu \in M$, f_μ désigne l'élément de $L^\infty(\mu)$ defini par:

$$\text{pour tout } g \in L^1(\mu), \qquad \langle f, g\mu \rangle = \int f_\mu g\, d\mu.$$

Si ν est une mesure absolument continue par rapport à μ, $f_\nu = f_\mu$ ν-presque-partout. f_μ est positif si et seulement si, pour toute mesure positive ν absolument continue par rapport à μ, $\langle f, \nu \rangle \geqslant 0$.

f est défini par la donnée des f_μ pour $\mu \in M$, et dans le cas où f est un caractère de l'algèbre M on retrouve la définition des caractères généralisés (cf. [6]).

Pour $\mu \in M$, $\Delta(\mu)$ désigne la partie

$$\{\chi_\mu;\ \chi \in \Delta(M)\} \quad \text{de} \quad L^\infty(\mu).$$

Si G est un groupe abélien localement compact, on dit qu'une mesure μ de $M(G)$ est "tame" si, pour tout caractère χ de $M(G)$, χ_μ est le produit d'une constante par un caractère continu de G.

Nous énonçons ici quelques propriétés des caractères de M utilisées dans la suite.

Si χ et φ sont des caractères de M, il existe un caractère de M, noté $\chi\varphi$, tel que $(\chi\varphi)_\mu = \chi_\mu \varphi_\mu$ pour tout $\mu \in M$.

Si χ est un caractère de M, il existe un caractère de M, noté $\overline{\chi}$, et un caractère de M, noté $|\chi|$, appelé *module de* χ, tels que $(\overline{\chi})_\mu = (\overline{\chi_\mu})$ et $|\chi|_\mu = |\chi_\mu|$ pour tout $\mu \in M$.

De même, si $\chi \in \Delta(M)$, il existe un caractère $|\chi|^0$ de M tel que $|\chi|_\mu^0 = \lim\limits_{s \to 0} |\chi_\mu|^s$ pour tout $\mu \in M$, et un caractère χ_0 de M, appelé *partie polaire de* χ, tel que $|\chi_0| = |\chi|^0$ et $\chi_0 |\chi| = \chi$.

THÉORÈME D'EXTENSION DE BROWN ET MORAN ([4]). *Tout caractère de module 1 de la L-sous-algèbre N de M peut être prolongé en un caractère de M.*

Enfin, nous utiliserons la propriété d'extension suivante, démontrée dans [7] (lemme 4.5.6):

Si la L-sous-algèbre N de M vérifie

$$N * N^\perp \subset N^\perp,$$

tout caractère de N peut être prolongé en un caractère de M.

0.4. Pour deux mesures μ et ν de M, on note $\Delta(\mu, \nu)$ la partie $\{(\chi_\mu, \chi_\nu);\ \chi \in \Delta(M)\}$ de $L^\infty(\mu) \times L^\infty(\nu)$.

Dans le paragraphe 3, on étudie dans le cas $M = M(G)$, où G est un groupe abélien localement compact, une question parallèle à celle du §1, mais relative aux ensembles $\Delta(\mu, \nu)$ au lieu des spectres joints; on établit une condition nécéssaire et suffisante pour que $\Delta(\mu, \nu)$ soit égal à $\Delta(\mu) \times \Delta(\nu)$, pour deux mesures μ et ν de $M(G)$.

Enfin, au paragraphe 4, on utilise ce résultat pour montrer que si G est métrisable le spectre de $M_0(G)$ est dense dans le spectre de G.

1

1.1. Soit A une algèbre de Banach unitaire; la multiplication est notée $*$, et, pour tout élément ω de A, ω^0 désigne l'élément unité de A, noté δ.

LEMME 1. *Soit ω un élément de l'algèbre de Banach unitaire A; on suppose qu'il existe, pour tout $p \geqslant 0$, une forme linéaire g_p sur A, de norme $\leqslant 1$, avec*

$$\langle g_p, \omega^k \rangle = 1 \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant p,$$
$$\langle g_p, \omega^{p+1} * \sigma \rangle = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad \sigma \in A.$$

Alors, le spectre de ω contient le disque unité.

Soit z un complexe tel que $(\omega - z\delta)$ soit inversible et soit $\tau = (\omega - z\delta)^{-1}$; pour tout $p \geqslant 0$,

$$\omega^p + z\omega^{p-1} + \ldots + z^p\delta = \omega^{p+1} * \tau - z^{p+1}\tau,$$

d'où
$$|1+z+\ldots+z^p| = |z^{p+1}|\,|\langle g_p,\tau\rangle| \leqslant |z^{p+1}|\,\|\tau\|,$$
ceci est impossible si $|z|<1$; le spectre de ω contient donc le disque unité.

COROLLAIRE 1. *Si μ est une mesure de probabilité de l'algèbre de convolution de mesures M vérifiant, pour tout $p\geqslant 0$:*
$$\mu^p \perp \mu^{p+1}*M,$$
le spectre de μ dans M est le disque unité.

On applique le lemme 1 à l'élément μ de l'algèbre M: pour tout $p\geqslant 0$, les hypothèses sont vérifiées par la forme g_p nulle sur le L-idéal engendré par μ^{p+1} et telle que, pour toute mesure σ orthogonale à cet idéal, $\langle g_p, \sigma\rangle = \int d\sigma$.

Remarque. Dans le cas où M est l'algèbre $M(G)$ pour un groupe abélien localement compact G, on sait que le spectre de μ est le disque unité dès que μ est une mesure de probabilité à puissances fortement indépendantes. L'intérêt du corollaire 1 est qu'il ne nécéssite aucune hypothèse sur l'algèbre M; en particulier, M n'est pas supposée semi-simple (on peut même supprimer ici l'hypothèse que M est commutative).

1.2. LEMME 2. *Soit R un L-idéal de l'algèbre de convolution de mesures M, λ une mesure positive de M, et J le L-espace des mesures σ de M telles que $|\sigma|*\lambda\perp R$. L'orthogonal de J est un idéal de M.*

Soit h la forme linéaire positive sur M, de norme 1, définie par
$$\langle h, \sigma\rangle = \int d\sigma \quad \text{si} \quad \sigma\in R,$$
$$\langle h, \sigma\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \sigma\perp R.$$

Pour toute mesure P de M, $h*P$ désigne la forme linéaire sur M définie par
$$\langle h*P, \sigma\rangle = \langle h, \sigma*P\rangle \quad \text{pour tout } \sigma\in M.$$
Si σ appartient à R, $\sigma*P$ aussi et, si P est une mesure de probabilité, $\langle h*P, \sigma\rangle = \langle h, \sigma*P\rangle = \int d\sigma$; h et $h*P$ coincident donc sur R, d'où $h*P\geqslant h$ et $h*P*\lambda\geqslant h*\lambda$.

J est le L-espaces des mesures σ de M telles que $\langle h*\lambda,\ |\sigma|\rangle = 0$, c'est-à-dire telles que $(h*\lambda)_\sigma = 0$ σ-presque partout. L'orthogonal L de J est donc engendré par les mesures σ de M telles que, pour un $\varepsilon>0$, $(h*\lambda)_\sigma\geqslant\varepsilon$ σ-presque partout.

Soit σ une mesure ayant cette propriété. Pour toutes mesures de probabilité $P\in M$ et $Q\ll\sigma$,
$$\langle h*\lambda,\ P*Q\rangle = \langle h*P*\lambda,\ Q\rangle \geqslant \langle h*\lambda, Q\rangle = \int (h*\lambda)_\sigma dQ \geqslant \varepsilon.$$

Soit $\tau\in M$; toute mesure positive ϱ absolument continue par rapport à $\sigma*\tau$ est limite de combinaisons linéaires à coefficients positifs de mesures $P*Q$ comme ci-dessus, et vérifie encore
$$\langle h*\lambda,\ \varrho\rangle \geqslant \varepsilon\int d\varrho;$$
donc $(h*\lambda)_{\sigma*\tau}\geqslant\varepsilon$ $\sigma*\tau$-presque partout et $\sigma*\tau\in L$. $L = J^\perp$ est donc un idéal.

1.3. LEMME 3. *Soient μ et ν deux mesures de probabilité de l'algèbre de convolution de mesures M, vérifiant: pour tous $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$ et tout $\sigma\in M$,*
$$\mu^p*\nu^q\perp\mu^{p+1}*\sigma.$$
Alors, pour tout complexe z avec $|z|\leqslant 1$, il existe un caractère χ de M tel que $\chi_\nu = 1$ et $\hat{\mu}(\chi) = z$.

On note I l'idéal fermé engendré par $(\delta-\nu)$ dans M, A l'algèbre quotient M/I, où la multiplication est notée $*$ et l'unité δ; ω designe l'image de μ par la projection de M sur A.

Nous allons construire pour tout $p\geqslant 0$ une forme linéaire g_p sur A vérifiant les conditions du lemme 1. On note λ la mesure positive $\sum_{k\geqslant 0} 2^{-k}\nu^k$, J_p le L-espace des mesures σ de M telles que $|\sigma|*\lambda\perp\mu^{p+1}*M$, et L_p l'orthogonal de J_p. Soit f_p la forme linéaire sur M, de norme 1, définie par
$$\langle f_p, \sigma\rangle = \int d\sigma \quad \text{si} \quad \sigma\in J_p,$$
$$\langle f_p, \sigma\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \sigma\in L_p.$$
D'après le lemme 2, L_p est un idéal; donc si $\sigma\in L_p$,
$$(\delta-\nu)*\sigma\in L_p \quad \text{et} \quad \langle f_p, (\delta-\nu)*\sigma\rangle = 0.$$

D'autre part, $\lambda*\nu$ est absolument continue par rapport à λ; donc, si $\sigma\in J_p$, $\sigma*\nu\in J_p$ et $\langle f_p, (\delta-\nu)*\sigma\rangle = \int d\sigma - \int d(\nu*\sigma) = 0$. Comme J_p et L_p sont supplémentaires dans M,
$$\langle f_p, (\delta-\nu)*\sigma\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \sigma\in M.$$
I étant l'idéal engendré par $(\delta-\nu)$, $\langle f_p, \sigma\rangle = 0$ pour tout $\sigma\in I$, donc f_p définit une forme linéaire sur l'espace quotient $M/I = A$, notée g_p, de norme 1. Par hypothèse, pour tout k avec $0\leqslant k\leqslant p$, μ^k appartient à J_p, et donc $\langle g_p, \omega^k\rangle = 1$.

D'autre part, pour toute mesure σ de M, $\mu^{p+1}*\sigma$ est orthogonale à J_p, donc appartient à L_p: donc $\langle g_p, \omega^{p+1}*\tau\rangle = 0$ pour tout $\tau\in A$. On peut donc appliquer le lemme 1 à l'élément ω de A. Comme $\|\omega\|\leqslant 1$, le spectre S de ω dans A est le disque unité.

Pour achever la démonstration du lemme 3, on remarque que le spectre de l'algèbre A s'identifie à l'ensemble des caractères χ de M tels que $\hat{\nu}(\chi) = 1$, c'est-à-dire, comme ν est une mesure de probabilité, tels que $\chi_\nu = 1$. Donc

$$\boldsymbol{D} = S = \{\hat{\mu}(\chi);\ \chi \in \Delta(M) \text{ et } \chi_\nu = 1\}.$$

1.4. Demonstration du théorème 1. Soient n un entier positif et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des mesures de probabilité de M vérifiant l'hypothèse du théorème 1, et soit $(z_1, \ldots, z_n)$ un point de $\boldsymbol{D}^n$. Si $n \geqslant 2$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les mesures μ_i et $\nu_i = \left(1/(n-1)\right) \sum_{j \neq i} \mu_j$ vérifient l'hypothèse du lemme 3 et il existe donc un caractère χ_i de M avec $\hat{\mu}_i(\chi_i) = z_i$ et $(\chi_i)_{\mu_j} = 1$ pour tout $j \neq i$. Alors, si χ est le caractère $\chi_1 \ldots \chi_n$ de M, $\chi_{\mu_i} = (\chi_i)_{\mu_i}$ et $\hat{\mu}_i(\chi) = z_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc $(z_1, \ldots, z_n)$ appartient au spectre joint de $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

Remarques. On aurait pu déduire le théorème 1 du corollaire 1: Si μ et ν verifient l'hypothèse du lemme 3, soit J l'idéal fermé engendré par la famille des mesures $(\delta - \sigma)$, où σ décrit l'ensemble des mesures de probabilité absolument continues par rapport à ν. On peut munir l'algèbre quotient M/J d'une structure d'algèbre de convolution de mesures telle que la projection $M \to M/J$ soit un L-homomorphisme. L'image de μ dans M/J vérifie alors l'hypothèse du corollaire 1, ce qui démontre le lemme 3.

L'hypothèse du théorème 1 est très forte; en pratique, pour montrer que des mesures μ_i vérifient cette hypothèse, on est souvent amené à montrer l'existence de caractères χ_i de M avec: $(\chi_i)_{\mu_j} = 1$ pour $j \neq i$ et $(\chi_i)_{\mu_i}$ est une constante de $]0, 1[$. Or il est facile dans ce cas de montrer directement que le spectre joint de ces mesures est $\boldsymbol{D}^n$. Cependant, on montre dans le paragraphe suivant que l'hypothèse du théorème 1 ne peut guère être affaiblie, même dans le cas d'une algèbre $M(G)$.

2

Dans toute la suite, on suppose que $M = M(G)$ est l'algèbre de convolution des mesures de Radon finies sur le groupe abélien localement compact G, et Γ désigne le dual de G.

2.1. Proposition 1. *Soient μ et ν deux mesures de probabilité "tame" sur G avec:*

(a) *le spectre joint de μ, ν est $\boldsymbol{D}^2$;*

(b) *$\{1\}$ est ouvert dans $|\hat{\mu}(\Gamma)|$ et dans $|\hat{\nu}(\Gamma)|$.*

Alors, pour tout couple (m, n) d'entiers positifs, $\mu^m * \nu^n$ est orthogonale à $\mu^{m+1} * M$ et à $\nu^{n+1} * M$.

D'après (b) il existe $a \in]0, 1[$ avec $|\hat{\mu}(\Gamma)| \subset [0, a[\cup \{1\}$, et d'après (a) il existe un caractère χ de M avec

$$\hat{\nu}(\chi) = 1 \quad \text{et} \quad \hat{\mu}(\chi) = a.$$

μ étant "tame", il existe un complexe $b \in \boldsymbol{D}$ et un $\gamma \in \Gamma$ avec $\chi_\mu = b\gamma$; alors, $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant a$, donc $|\hat{\mu}(\gamma)| = 1$ et

$$|\chi|_\mu = |b| = a.$$

D'autre part, comme ν est une mesure de probabilité, $\chi_\nu = 1$.

Pour tout couple (m, n) d'entiers positifs et toute mesure ω de M,

$$|\chi|_{\mu^m * \nu^n} = a^m \quad \text{et} \quad |\chi|_{\omega * \mu^{m+1}} \leqslant a^{m+1}.$$

Donc $\mu^m * \nu^n$ est orthogonale à $\mu^{m+1} * \omega$, et de même elle est orthogonale à $\nu^{n+1} * M$.

2.2. Dans le cas où G est compact métrisable, la seconde hypothèse de la proposition 1 est toujours vérifiée:

Proposition 2. *Si μ est une mesure de probabilité "tame" sur le groupe abélien compact métrisable G, $\{1\}$ est ouvert dans $|\hat{\mu}(\Gamma)|$.*

Soit H l'adhérence de Γ dans $L^1(\mu)$. Muni de la métrique induite par celle de $L^1(\mu)$, H est un groupe métrique complet. L'ensemble K des fonctions constantes appartenant à H est un sous-groupe fermé de H. D'autre part, tout element de H est de la forme χ_μ pour un caractère χ de M; comme μ est "tame", tout élément de H est le produit d'un élément de K et d'un élément de Γ. Comme Γ est dénombrable, K est d'indice dénombrable dans H et, d'apres le théorème de Baire, K est ouvert dans H.

Soit (γ_n) une suite dans Γ avec

$$|\hat{\mu}(\gamma_n)| < 1 \quad \text{pour tout } n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} |\hat{\mu}(\gamma_n)| = 1.$$

En remplaçant la suite (γ_n) par une sous-suite, on peut supposer que $\hat{\mu}(\gamma_n)$ converge vers une limite a de module 1. Comme μ est une mesure de probabilité, la suite (γ_n) converge alors dans $L^1(\mu)$ vers la constante a, qui donc un élément de K. Or, pour tout n, γ_n appartient à $H \setminus K$ car $|\hat{\mu}(\gamma_n)| < 1$, d'où une contradiction.

3

Pour deux mesures μ et ν de M, on note $\Delta(\mu, \nu)$ la partie $\{(\varphi_\mu, \varphi_\nu);\ \varphi \in \Delta(M)\}$ de $L^\infty(\mu) \times L^\infty(\nu)$. On cherche maintenant des conditions suffisantes pour que $\Delta(\mu, \nu)$ soit l'ensemble produit $\Delta(\mu) \times \Delta(\nu)$. Ces notations et les resultats qui suivent peuvent facilement être généralisés à une suite finie de mesures.

3.1. Théorème 2. *Soient μ et ν deux mesures de $M(G)$ telles que pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe un caractère χ de $M(G)$ avec $\chi_\mu = 1$ et $\chi_\nu = \gamma$. Alors,*

$$\Delta(\mu, \nu) = \Delta(\mu) \times \Delta(\nu).$$

Soit $\varphi \in \Delta(M)$. On va construire un caractère ψ de M avec $\psi_\mu = 1$ et $\psi_\nu = \varphi_\nu$. Le disque unité $\boldsymbol{D}$ de $\boldsymbol{C}$ étant considéré comme semi-groupe, on munit l'espace $\boldsymbol{D}^\Gamma$ de la structure de semi-groupe produit. $M(\boldsymbol{D}^\Gamma)$ designe l'algèbre de convolution des mesures de Radon sur $\boldsymbol{D}^\Gamma$; cette algèbre contient $M(\boldsymbol{T}^\Gamma)$.

On note F l'homomorphisme naturel $(\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ de G dans $\boldsymbol{T}^\Gamma$. Si $\omega \in M$, $F(\omega)$ désigne la mesure image de ω par l'application F; $F(\omega)$ est une mesure sur $\boldsymbol{T}^\Gamma$ donc sur $\boldsymbol{D}^\Gamma$.

Soit G' l'image de G par F, munie de la topologie telle que F soit un homéomorphisme de G sur G'; $M(G)$ est identifié par F à la L-sous-algèbre $M(G')$ de $M(\boldsymbol{D}^\Gamma)$. Cette algèbre vérifie

$$M(G')*M(G')^\perp \subset M(G')^\perp.$$

En effet, si σ est une mesure de $M(G')$ et τ une mesure de $M(\boldsymbol{D}^\Gamma)$ orthogonale à $M(G')$, pour tout compact K de G', $|\tau|(xK) = 0$ pour tout x de G', donc $|\sigma*\tau|(K) = 0$ et $\sigma*\tau$ est orthogonale à $M(G')$.

On en déduit (cf. 0.3) que tout caractère de $M(G')$ peut être prolongé en un caractère de $M(\boldsymbol{D}^\Gamma)$. Il existe donc un caractère θ de $M(\boldsymbol{D}^\Gamma)$ tel que,

$$\text{pour tout } \omega \in M, \quad \hat{\omega}(\varphi) = F(\omega)\hat{\ }(\theta).$$

3.2. On construit maintenant un homomorphisme H de $M(G)$ dans $M(\boldsymbol{D}^\Gamma)$, de facon que $\psi = \theta\circ H$ ait les propriétés demandées. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on choisit un caractère $\tilde{\gamma}$ de M avec $\tilde{\gamma}_\mu = 1$ et $\tilde{\gamma}_\nu = \gamma$; pour toute mesure $\omega \in M$, on choisit des représentants boréliens des $\tilde{\gamma}_\omega$, et soit H_ω l'application $(\tilde{\gamma}_\omega)_{\gamma\in\Gamma}$ de G dans $\boldsymbol{D}^\Gamma$. Pour toute fonction continue f sur $\boldsymbol{D}^\Gamma$, $f\circ H_\omega$ est borélienne; il existe une mesure de Radon unique $H(\omega)$ sur $\boldsymbol{D}^\Gamma$ vérifiant

$$\int f\, dH(\omega) = \int f\circ H_\omega\, d\omega$$

pour toute fonction continue f sur $\boldsymbol{D}^\Gamma$.

On vérifie que H est un homomorphisme d'algèbres de $M(G)$ dans $M(\boldsymbol{D}^\Gamma)$: Soient ω et σ deux mesures sur G et $\tau = |\omega|+|\sigma|$. Pour tout $\chi \in \Delta(M)$,

$$\chi_\omega = \chi_\tau \qquad \omega\text{-presque partout},$$

$$\chi_\sigma = \chi_\tau \qquad \sigma\text{-presque partout},$$

$$\chi_{\omega+\sigma} = \chi_\tau \qquad \omega+\sigma\text{-presque partout};$$

donc, pour toute fonction continue f sur $\boldsymbol{D}^\Gamma$, $f\circ H_\omega = f\circ H_\tau$ ω-presque partout, de même pour σ et $\omega+\sigma$, et

$$\int f\, dH(\omega+\sigma) = \int f\circ H_\tau\, d(\omega+\sigma) = \int f\, dH(\omega) + \int f\, dH(\sigma);$$

donc H est linéaire. De même, si $\tau = |\omega|*|\sigma|$, pour tout $\chi \in \Delta(M)$, $\chi_\tau(xy) = \chi_\omega(x)\chi_\sigma(y)$ $\omega\otimes\sigma$-presque partout (propriété des caractères généralisés, cf. [6]); donc, pour toute fonction f continue sur $\boldsymbol{D}^\Gamma$, $f\circ H_{\omega*\sigma} = f\circ H_\tau$ $\omega*\sigma$-presque partout et $f\circ H_\tau(xy) = f\big(H_\omega(x)H_\sigma(y)\big)$ $\omega\otimes\sigma$-presque partout; d'où $H(\omega)*H(\sigma) = H(\omega*\sigma)$. Donc H est un homomorphisme d'algèbres.

On définit le caractère ψ de $M(G)$ par:

$$\text{pour tout } \omega \in M(G), \quad \hat{\omega}(\psi) = H(\omega)\hat{\ }(\theta).$$

Si $\omega \ll \mu$, $\tilde{\gamma}_\omega = 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $H(\omega) = \left(\int d\omega\right)\delta$ (δ désigne ici la masse de Dirac en l'unité 1 de $\boldsymbol{D}^\Gamma$); d'où $\hat{\omega}(\psi) = \hat{\delta}(\theta)\int d\omega = \int d\omega$; donc $\psi_\mu = 1$.

Si $\omega \ll \nu$, $\tilde{\gamma}_\omega = \gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $H(\omega) = F(\omega)$; d'où $\hat{\omega}(\psi) = F(\omega)\hat{\ }(\theta) = \hat{\omega}(\varphi)$; donc $\psi_\nu = \varphi_\nu$.

De même, pour $\varphi' \in \Delta(M)$, on peut construire un caractère ψ' de M avec $\psi'_\mu = \varphi'_\mu$ et $\psi'_\nu = 1$. Alors $(\psi\psi')_\mu = \varphi'_\mu$ et $(\psi\psi')_\nu = \varphi_\nu$. Ceci prouve $\Delta(\mu,\nu) = \Delta(\mu)\times\Delta(\nu)$.

3.3. Remarque. L'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ pour lesquels il existe un caractère χ de M avec $\chi_\mu = 1$ et $\chi_\nu = \gamma$ est un sous-groupe fermé de Γ. Il suffit donc de supposer qu'il existe un tel caractère pour une famille d'éléments de Γ engendrant un sous-groupe dense de Γ.

Exemple. Soit $G = \boldsymbol{T}$; on note $e(n)$ le caractère de $\boldsymbol{T}$ associé à l'entier n. Il suffit donc de vérifier l'hypothèse du théorème 2 pour $\gamma = e(1)$. Soient μ et ν les produits de Riesz sur $\boldsymbol{T}$:

$$\mu = \prod_{k>0}\big(1+\operatorname{Re} e(4^k)\big) \quad \text{et} \quad \nu = \prod_{k>0}\big(1+\operatorname{Re} e(4^k-1)\big).$$

Soit χ un caractère de $M(\boldsymbol{T})$ adhérant à la suite $\big(e(4^n)\big)$ et χ_0 la partie polaire de χ. D'apres [2],

$$(\chi_0)_\mu = 1 \quad \text{et} \quad (\chi_0)_\nu = e(1).$$

Donc $\Delta(\mu,\nu) = \Delta(\mu)\times\Delta(\nu)$.

On rappelle que deux mesures de probabilité μ et ν sur G sont dites polynômialement indépendantes si, pour tous entiers positifs a, b, c et d les mesures $\mu^a*\nu^b$ et $\mu^c*\nu^d$ sont étrangères sauf si $a = c$ et $b = d$. Il existe alors, pour tous complexes z et z' de module 1, un caractère φ de M avec $\varphi_\mu = z$ et $\varphi_\nu = z'$ (cf. [3]). On en déduit facilement:

Corollaire 2. *Soient μ et ν deux mesures de probabilité polynômialement indépendantes sur G, et F une partie de Γ engendrant un sous-groupe dense de Γ. Si pour tout $\gamma \in F$ le rayon spectral de $\mu*\gamma\nu$ est 1,*

$$\Delta(\mu,\nu) = \Delta(\mu)\times\Delta(\nu).$$

3.4. Pour une mesure μ de M, $N(\mu)$ désigne la L-algèbre unitaire engendrée par μ.

Pour deux mesures μ et ν de M, l'algèbre $N(\mu)\otimes N(\nu)$ s'identifie à la L-algèbre unitaire engendrée dans $M(G\times G)$ par les mesures $\mu\otimes\delta$ et $\delta\otimes\nu$. Soit p la restriction à $N(\mu)\otimes N(\nu)$ du L-homomorphisme de $M(G\times G)$ dans $M(G)$ induit par la multiplication $G\times G\to G$ (cf. [7], chap. 2 et 3).

L'image de $N(\mu)\otimes N(\nu)$ par p est la L-algèbre unitaire $N(\mu,\nu)$ engendrée par μ et ν.

PROPOSITION 3. *Soient μ et ν deux mesures de $M(G)$. L'homomorphisme $p\colon N(\mu)\otimes N(\nu)\to N(\mu,\nu)$ est injectif si et seulement si pour tout $\gamma\in\Gamma$ il existe un caractère χ de $M(G)$ avec $\chi_\mu=1$ et $\chi_\nu=\gamma$.*

Supposons p injectif, et soit $\gamma\in\Gamma$. Comme p est un homomorphisme d'algèbres, on définit un caractère χ de $N(\mu,\nu)$ par:

$$\hat{\omega}(\chi)=\big(p^{-1}(\omega)\big)^{\wedge}(1,\gamma)\qquad\text{pour tout } \omega\in N(\mu,\nu).$$

Alors $\chi_\mu=1$ et $\chi_\nu=\gamma$. Pour tous m, n positifs, $(|\mu|^m*|\nu|^n)^{\wedge}(|\chi|)=\|\mu\|^m\|\nu\|^n$, d'où $|\chi|_{|\mu|^m*|\nu|^n}=1$ $|\mu|^m*|\nu|^n$-presque partout. Donc χ est un caractère de module 1 de la L-algèbre $N(\mu,\nu)$, et d'après le théorème d'extension de Brown et Moran χ peut être prolongé en un caractère de $M(G)$.

Réciproquement, supposons que pour tout $\gamma\in\Gamma$ il existe un caractère $\tilde{\gamma}$ de $M(G)$ avec $\tilde{\gamma}_\mu=1$ et $\tilde{\gamma}_\nu=\gamma$. Pour $\omega\in N(\mu)\otimes N(\nu)$, $\gamma\in\Gamma$ et $\alpha\in\Gamma$,

$$p(\omega)^{\wedge}(\alpha\tilde{\gamma})=\hat{\omega}(\alpha,\alpha\gamma)$$

(il suffit de le vérifier pour les mesures $\omega=\sigma\otimes\delta$ avec $\sigma\ll\mu$ et pour les mesures $\omega=\delta\otimes\tau$ avec $\tau\ll\nu$). Si $p(\omega)=0$, $\hat{\omega}(\alpha,\alpha\gamma)=0$ pour tous α et γ de Γ, donc $\omega=0$.

COROLLAIRE 3. *Soient μ et ν deux mesures de $M(G)$. $\Delta(\mu,\nu)=\Delta(\mu)\times\Delta(\nu)$ si et seulement si l'homomorphisme $p\colon N(\mu)\otimes N(\nu)\to N(\mu,\nu)$ est injectif.*

Remarque. On retrouve une condition d'indépendance des mesures μ et ν, de même qu'au paragraphe 1. De plus, la condition du corollaire 3 est une condition locale, c'est-à-dire une condition sur la L-sous-algèbre engendrée par μ et ν. C'est vrai aussi pour la condition du corollaire 2, et pour l'hypothèse du théorème 2 d'après le théorème d'extension de Brown et Moran. Elles sont donc plus faciles à vérifier que l'hypothèse du théorème 1, qui fait intervenir l'algèbre M entière.

4

On rappelle que $M_0(G)$ designe l'idéal des mesures de $M(G)$ dont la transformée de Fourier–Stieltjes tend vers 0 à l'infini. Le spectre de $M_0(G)$ est identifié a l'ensemble des caractères de $M(G)$ qui ne sont pas identiquement nuls sur $M_0(G)$.

THÉORÈME 3. *Si G est un groupe abélien localement compact métrisable, le spectre de $M_0(G)$ est dense dans le spectre de $M(G)$.*

On suppose G métrisable.

PROPOSITION 4. *Si $\mu\in M(G)$ et $\chi\in\Delta\big(M(G)\big)$, il existe une mesure de probabilité ν de $M_0(G)$ et $\varphi\in\Delta\big(M(G)\big)$ avec*

$$\varphi_\mu=\chi_\mu\quad\text{ et }\quad\varphi_\nu=1.$$

Le théorème se déduit de la proposition. Soient en effect $\chi\in\Delta(H)$ et V un voisinage de χ dans $\Delta(M)$. Il existe des mesures $\mu_1,\ldots,\mu_n$ de M et $\varepsilon>0$ tels que V contienne le voisinage

$$W=\{\varphi\in\Delta(M);\quad\forall i\in\{1,\ldots,n\}\ |\hat{\mu}_i(\varphi)-\hat{\mu}_i(\chi)|<\varepsilon\}.$$

Soit $\mu=\sum|\mu_i|$. Le caractère φ donne par la proposition appartient à W, donc à V, et au spectre de $M_0(G)$ car $\hat{\nu}(\varphi)\neq 0$.

Démonstration de la proposition. On utilise le résultat suivant, démontré dans [5] (Th. 2.1):

LEMME 4. *Si ω est une mesure positive singulière de $M(G)$ avec $\omega^2\ll\omega$, il existe une mesure de probabilité ν de $M_0(G)$, symétrique, à puissances indépendantes, et telle que l'homomorphisme $p\colon N(\omega)\otimes N(\nu)\to N(\omega,\nu)$ soit injectif.*

Soient $\mu\in M$ et $\chi\in\Delta(M)$, et soit $\lambda=\exp(|\mu|)$. L'ensemble $\{\psi_\lambda;\ \psi\in\Delta(M)\setminus\Gamma,\ \psi\geqslant 0\}$ est faiblement fermé dans $\Delta(\lambda)$ et contient $|\chi_\lambda|$. Soit h_λ un élément maximal de cet ensemble, avec $h_\lambda\geqslant|\chi_\lambda|$. Le caractère h^0 défini dans l'introduction appartient à $\Delta(M)\setminus\Gamma$ et vérifie $(h^0)^2_\lambda=(h^0)_\lambda=\lim_{\varepsilon\to 0}h^\varepsilon_\lambda\geqslant h_\lambda$; donc $h^2_\lambda=h_\lambda$.

La mesure $\omega=h_\lambda\lambda$ vérifie l'hypothèse du lemme 4; soit ν une mesure de probabilité de $M_0(G)$ associée à ω comme dans le lemme. D'après le corollaire 3, $\Delta(\omega)\times\Delta(\nu)=\Delta(\omega,\nu)$.

Comme ν est à puissances indépendantes, il existe un caractère ψ de M avec $\psi_\nu=i$. Il existe donc un caractère θ de M avec $\theta_\omega=h_\omega$ et $\theta_\nu=i$. $\theta\notin\Gamma$ car ν est symétrique et $\hat{\nu}(\theta)$ imaginaire, et d'autre part $|\theta|_\lambda\geqslant h_\lambda$. Donc, par définition de h, $|\theta|_\lambda=h_\lambda$.

Il existe aussi un caractère $\psi'\in\Delta(M)$ avec $\psi'_\omega=\chi_\omega$ et $\psi'_\nu=1$. Alors, $(|\theta|\psi')_\mu=\chi_\mu$ et $(|\theta|\psi')_\nu=1$.

Nous remercions particulièrement J. F. Méla pour ses remarques, et pour le soin qu'il a apporté a relire le manuscrit de cet article.

Bibliographie

[1] W. J. Bailey, G. Brown & W. Moran, *Spectra of independent power measures*, Proc. Camb. Philos. Soc. 72 (1972), 27.

[2] G. Brown, *Riesz products and generalized characters*, Proc. London Math. Soc. (3) 30 (1975), 209.

[3] G. Brown, *Spectral extension and power independence in measure algebras*, Studia Math. 70 (1981), 81–99.
[4] G. Brown & W. Moran, *On the Shilov boundary of a measure algebra*, Bull. Lond. Math. Soc. 3 (1971), 197.
[5] G. Brown, C. C. Graham & W. Moran, *Translation and symmetry in $M(G)$*, Symposia Math. 22 (1977), 371.
[6] Y. A. Sreider, *The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution*, Mat. Sb. 27 (1950) 297 (Amer. Math. Soc. Transl. 81).
[7] J. L. Taylor, *Measure algebras*, Regional conference series n° 16, Amer. Math. Soc. 1973.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
C.S.P., UNIVERSITÉ PARIS-NORD
93430 VILLETANEUSE, FRANCE

Received August 2, 1979
Revised version June 25, 1980 (1567)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIII (1982)

On domination and extensions of Banach algebras

by

V. MÜLLER (Praha)

Abstract. The paper studies connections between the domination property in a Banach algebra and existence of an extension with given properties. Two examples of Banach algebras are exhibited giving negative answers to problems of Żelazko.

Introduction. The concept of domination in commutative Banach algebras was introduced and studied by W. Żelazko in [4], [5] and [6]. We say that u is *dominated by* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (where $u, v_1, \ldots, v_n$ are elements of an unital commutative Banach algebra A) if $|ux| \leqslant K\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i x|$ for some constant $K \geqslant 0$ and for every $x \in A$.

A unital Banach algebra B is said to be an *isometric extension of* A if there exists a unit preserving isometric isomorphism from A into B. In this case we consider A as a subalgebra of B and write $A \subset B$.

If $A \subset B$, $u, v_1, \ldots, v_n \in A$ and $u = \sum_{i=1}^{n} v_i b_i$ for some elements $b_i \in B$, then $|ux| \leqslant (\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_i|)\cdot\sum_{i=1}^{n}|v_i x|$, so that u is dominated by $v_1, \ldots, v_n$. The converse statement is true in some particular cases ([1], [5]) but not in general ([2]). In the present paper we extend the result of [2].

In Section I we exhibit an example of a commutative finite-dimensional Banach algebra A with $e_1, e_2, e_3 \in A$ such that e_1 is dominated by e_2, e_3 and $e_1 \notin e_2 B + e_3 B$ in any commutative algebra B without topology containing A as a subalgebra. This gives a negative answer to Problem 4 of [6] and also simplifies the example of [2].

In Section II we give an example of a unital commutative Banach algebra A with $u, v, w \in A$ such that u is dominated by v, w and dist $(u, vB + wB) = |u|_A$ in any isometric extension B of A. This gives a negative answer to Problem 6 of [6]. (Problem 6 of [6] was raised in this weaker form: Let A be a commutative Banach algebra, $x \in A$ and I an ideal in A. Let x be approximately dominated by I, i.e. for each $\varepsilon > 0$ there exist elements $x_1, \ldots, x_n \in I$ such that $xz \leqslant \sum_{j=1}^{n}|x_j z| + \varepsilon|z|$ for all $z \in A$.