STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIII. (1982)

Représentation fonctionnelle des espaces vectoriels topologiques

par

PHILIPPE TURPIN (Orsay)

Abstract. It is shown in this paper that every (F)-normed vector space is an (F)-normed vector subspace of some (F)-normed Riesz space of functions.

As an application, if E and F are Hausdorff linear spaces, Hausdorff linear topologies are given on the tensor product $E\otimes F$, for which the canonical bilinear map $E\times F\to E\otimes F$ is continuous. This solves a problem of L. Waelbroeck.

On montre dans cet article (théorème 2.1) que tout espace vectoriel réel (F)-normé se plonge par une isométrie linéaire dans un espace de Riesz (F)-normé de fonctions continues numériques "presque partout" finies sur un compact extrêmement discontinu Ω, cet espace vérifiant une propriété de type Riesz–Fischer (les sous-ensembles de Ω considérés comme négligeables sont les ensembles maigres, c'est à dire de première catégorie).

Pour cela on observe d'abord que tout espace vectoriel (F)-normé peut être plongé isométriquement dans un espace de Riesz (F)-normé abstrait, puis on applique le théorème de représentation des espaces de Riesz Archimédiens dû à F. Maeda et T. Ogasawara ([3]). Il est ensuite facile de représenter en 2.4 tout espace vectoriel topologique comme un espace de fonctions numériques.

On applique ce résultat aux produits tensoriels topologiques.

L. Waelbroeck demande en [10], [11] s'il existe, sur le produit tensoriel $E\otimes F$ de deux espaces vectoriels topologiques séparés E et F, une topologie vectorielle séparée rendant continue l'application canonique de $E\times F$ dans $E\otimes F$ et il observe que c'est vrai quand E ou F s'injecte continûment dans un espace de fonctions mesurables muni de la topologie de la convergence en mesure.

Le théorème de représentation fonctionnelle 2.1 permet de répondre affirmativement dans tous les cas (3.1 et théorème 3.2).

En fait nous avons déjà établi ce résultat en [6], [7] de façon assez élémentaire. Mais il est ici amélioré (théorème 3.6) quand E est p-normé et F q-normé, $0<p$, $q\leqslant 1$: on construit une r-norme sur $E\otimes F$ rendant continue l'application bilinéaire canonique, pour des valeurs de r meil-

leures qu'en [6], [7]. Précisons qu'on ne peut prendre $r = \inf(p, q)$ en général comme le montre N. J. Kalton ([2]). C'est toutefois possible quand E s'injecte continûment dans un espace p-normé L^p usuel (cf. D. Vogt [9]).

1. Préliminaires.

1.1. Une *(F)-norme* u sur un espace vectoriel X (sur le corps $\boldsymbol{R}$ des réels, comme tous les espaces vectoriels considérés ici) est une application $u\colon X \to \boldsymbol{R}^+$ vérifiant pour $x \in X$, $y \in X$ et $a \in [-1, 1]$ les conditions $u(x+y) \leqslant u(x)+u(y)$, $u(ax) \leqslant au(x)$, $\lim_{a\to 0} u(ax) = 0$ et $u(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Quand on omet cette dernière condition on dit que u est une *(F)-semi-norme*.

Un *espace vectoriel (F)-normé* (X, u) est un espace vectoriel X muni d'une (F)-norme u.

1.2. Si $0 < p \leqslant 1$ une *p-norme* (resp. une *p-semi-norme*) est une (F)-norme (resp. une (F)-semi-norme) u vérifiant $u(ax) = |a|^p u(x)$ pour tout $a \in \boldsymbol{R}$ et tout vecteur x et un *espace vectoriel p-normé* est un espace vectoriel muni d'une p-norme.

1.3. Si X est un *espace de Riesz* (espace vectoriel ordonné réticulé: voir [3]) on pose comme d'habitude $X^+ = \{x \in X \mid x \geqslant 0\}$ et, si $x \in X$, $|x| = \sup(x, -x)$, $x^+ = \sup(x, 0)$, $x^- = (-x)^+$. Un *idéal* (ou *idéal d'ordre*) L de X est un sous-espace vectoriel L de X vérifiant $\{x \in X \mid |x| \leqslant |y|\} \subset L$ pour tout $y \in L$.

Un espace de Riesz *(F)-normé* (resp. *p-normé*) (X, u) est un espace de Riesz X muni d'une (F)-norme (resp. p-norme) u vérifiant $u(x) \leqslant u(y)$ si $|x| \leqslant |y|$.

1.4. Etant donné un espace topologique Ω on note $C^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues x définies sur Ω et à valeurs dans le compact $\overline{\boldsymbol{R}} = [-\infty, +\infty]$ telles que $D(x) = \{\omega \in \Omega \mid x(\omega) \in \boldsymbol{R}\}$ soit un ouvert dense de Ω.

1.5. Quand Ω est un compact *extrêmement discontinu* (c'est à dire quand la fermeture de tout ouvert de Ω est un ouvert) on peut définir pour $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, $x \in C^\infty(\Omega)$, $y \in C^\infty(\Omega)$ la combinaison linéaire $ax+by \in C^\infty(\Omega)$, prolongeant la fonction définie de façon évidente sur $D(x) \cap D(y)$. Avec la relation d'ordre ponctuelle usuelle on munit ainsi $C^\infty(\Omega)$ d'une structure d'espace de Riesz. Cet espace est complet pour l'ordre. Voir [3], pp. 322–325.

1.6. D'autre part soit Ω un espace topologique, soit α un σ-idéal de parties de Ω (idéal de l'algèbre de Boole des parties de Ω stable par réunion dénombrable) et soit $\mathscr{L}^0(\Omega, \alpha)$ l'espace de Riesz des fonctions $\Omega \to \boldsymbol{R}$ coïncidant avec une fonction borélienne sur Ω en dehors de quelque élément de α (on dira "*α-presque partout*"). Soit enfin $L^0(\Omega, \alpha)$ l'espace de Riesz quotient de $\mathscr{L}^0(\Omega, \alpha)$ par l'idéal $\mathscr{N}(\alpha)$ des fonctions $\Omega \to \boldsymbol{R}$ nulles α-presque partout.

On dit qu'une suite (x_n) de $L^0(\Omega, \alpha)$ *tend vers* 0 *α-presque partout* quand la condition suivante est satisfaite. Si $\xi_n \in \mathscr{L}^0(\Omega, \alpha)$ représente x_n (c'est à dire $\xi_n \in x_n$) pour tout n, il existe $A \in \alpha$ tel que $\lim_n \xi_n(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega \setminus A$.

Pour qu'une suite (x_n) de $L^0(\Omega, \alpha)$ tende vers 0 α-presque partout il faut et il suffit qu'elle tende vers 0 pour l'ordre, c'est à dire qu'il existe une suite décroissante (y_n) de $L^0(\Omega, \alpha)^+$ vérifiant $\inf_n y_n = 0$ et $|x_n| \leqslant y_n$ pour tout n.

1.7. Si Ω est un compact extrêmement discontinu et si α est le σ-idéal des sous-ensembles maigres de Ω on sait ([1], [5]) que les espaces de Riesz $C^\infty(\Omega)$ et $L^0(\Omega, \alpha)$ sont isomorphes, par l'application qui à tout $x \in C^\infty(\Omega)$ fait correspondre la classe modulo $\mathscr{N}(\alpha)$ de la fonction $\xi \in \mathscr{L}^0(\Omega, \alpha)$ telle que $\xi(\omega) = x(\omega)$ pour $\omega \in D(x)$ et $\xi(\omega) = 0$ ailleurs.

2. La représentation fonctionnelle.

2.1. Théorème. *Soit (E, u) un espace vectoriel (F)-normé. Il existe alors un espace compact extrêmement discontinu Ω, un espace de Riesz (F)-normé $(L, \|\cdot\|)$ complet (pour sa (F)-norme $\|\cdot\|$), L étant un idéal d'ordre de $C^\infty(\Omega)$, et une application linéaire isométrique f de (E, u) dans $(L, \|\cdot\|)$.*

Si (E, u) est un espace vectoriel p-normé, avec $0 < p \leqslant 1$, on peut prendre ci-dessus pour $(L, \|\cdot\|)$ un espace de Riesz p-normé.

2.2. Remarque. Les conditions ci-dessus entraînent pour $(L, \|\cdot\|)$ la propriété suivante (de type Riesz–Fischer). Si (x_n) est une suite de L et si $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, il existe alors un ensemble borélien maigre $A \subset \Omega$ et une fonction $x \in L$ vérifiant $\lim_N \big(x(\omega) - \sum_{n=0}^{N} x_n(\omega)\big) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega \setminus A$ et $\lim_N \|x - \sum_{n=0}^{N} x_n\| = 0$.

En effet, il résulte d'abord de l'hypothèse que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^+$ et $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^-$ convergent dans $(L, \|\cdot\|)$. On peut donc supposer $x_n \geqslant 0$ pour tout n et on vérifie aisément que la limite x des sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} x_n$ pour la norme est leur borne supérieure dans L et donc dans $C^\infty(\Omega)$; d'après 1.6 et 1.7 la suite des $\sum_{n=0}^{N} x_n$ tend alors vers x ponctuellement en dehors de quelque borélien maigre de Ω.

2.3. Démontrons le théorème. Soit T un espace vectoriel en dualité séparante avec l'espace vectoriel E, par exemple le dual algébrique de E. Identifiant tout vecteur $x \in E$ avec l'élément $(\langle x, t\rangle)_{t\in T}$ de $\boldsymbol{R}^T$, considérons E comme un sous-espace vectoriel de l'espace de Riesz produit

$\boldsymbol{R}^T$ et soit E_0 l'idéal d'ordre de $\boldsymbol{R}^T$ engendré par E, muni de l'ordre induit par $\boldsymbol{R}^T$: un élément $x = (x^t)_{t\in T}$ de $\boldsymbol{R}^T$ appartient à E_0 si et seulement si on peut trouver une suite finie $(x_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ de E vérifiant $|x| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |x_n|$, c'est à dire $|x^t| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |\langle x_n, t\rangle|$ pour tout $t \in T$.

Posons pour $x \in E_0$

$$u_0(x) = \inf\Big\{\sum_{n=0}^{N} u(x_n)\,\Big|\, N \geqslant 0,\ x_n \in E,\ |x| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |x_n|\Big\}. \tag{1}$$

Il est clair que $u_0\colon E_0 \to \boldsymbol{R}_+$ est une (F)-semi-norme sur E_0 vérifiant $u_0(x) \leqslant u_0(y)$ quand $|x| \leqslant |y|$. On a en outre

$$u_0(x) = u(x) \tag{2}$$

pour tout $x \in E$. Evidemment, $u_0(x) \leqslant u(x)$. L'inégalité inverse provient du fait que si $|x| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |x_n|$ avec $x \in E$ et $x_n \in E$ pour tout n, alors $x = \sum_{n=0}^{N} a_n x_n$ pour des scalaires $a_n \in [-1, 1]$. Supposons en effet que x n'appartienne pas au sous-ensemble de E convexe équilibré et $\sigma(E, T)$-compact

$$C = \Big\{\sum_{n=0}^{N} a_n x_n \mid \forall n,\ -1 \leqslant a_n \leqslant 1\Big\}.$$

Il existe alors $t \in T$ vérifiant

$$\langle x, t\rangle > \sup\{\langle c, t\rangle \mid c \in C\} = \sum_{n=0}^{N} |\langle x_n, t\rangle|$$

et $|x|$ n'est pas majoré par $\sum_{n=0}^{N} |x_n|$.

Soit alors E_1 l'espace de Riesz quotient de E_0 par l'idéal d'ordre $\{x \in E_0 \mid u_0(x) = 0\}$, muni de la (F)-norme quotient u_1. On a

$$u_1(x_1) = u_0(x) \tag{3}$$

si $x \in E_0$ et $x_1 \in E_1$ est la classe de x. On voit que (E_1, u_1) est un espace de Riesz (F)-normé et d'après (2) et (3) l'application canonique de (E, u) dans (E_1, u_1) est une isométrie linéaire.

Soit (E_2, u_2) l'espace (F)-normé complété de (E_1, u_1). On le munit aisément d'une relation d'ordre prolongeant celle de E_1 qui en fasse un espace de Riesz (F)-normé.

Comme tout espace de Riesz (F)-normable, E_2 est archimédien et d'après un théorème d'Ogasawara–Maeda ([3], p. 340) on peut, pour quelque compact extrêmement discontinu Ω, identifier E_2 à un sous-espace de Riesz de $C^\infty(\Omega)$ possédant la propriété suivante: pour tout $x \in C^\infty(\Omega)^+$ on a $x = \sup\{y \in E_2^+ \mid y \leqslant x\}$. Soit alors L l'idéal d'ordre de

$C^\infty(\Omega)$ engendré par E_2 et posons, pour tout $x \in L$,

$$\|x\| = \inf\{u_2(z) \mid z \in E_2^+,\ |x| \leqslant z\}. \tag{4}$$

On constate que $(L, \|\cdot\|)$ est un espace de Riesz (F)-normé (pour l'ordre induit par $C^+(\Omega)$): si $x \in L$ et $\|x\| = 0$ alors $x = 0$ car $u_2(y) = 0$ (d'où $y = 0$) pour tout $y \in E_2^+$ majoré par $|x|$. L'application linéaire canonique $f\colon (E, u) \to (L, \|\cdot\|)$ est isométrique car u_2 est la restriction de $\|\cdot\|$ à E_2.

Montrons que $(L, \|\cdot\|)$ est complet. Il suffit d'établir la convergence de toute série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ de points $x_n \in L^+$ vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. On peut trouver des $z_n \in E_2^+$ tels que $x_n \leqslant z_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_2(z_n) < \infty$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge dans (E_2, u_2). Sa somme z majore la suite (croissante) des $\sum_{n=0}^{N} x_n$, $N \geqslant 0$. Comme Ω est extrêmement discontinu cette suite admet une borne supérieure $x \in L$. Comme $0 \leqslant x - \sum_{n=0}^{N} x_n \leqslant z - \sum_{n=0}^{N} z_n$, on voit que $\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n\|$ tend vers 0.

Enfin, si u est une p-norme, on vérifie successivement que u_0 est une p-semi-norme et que u_1, u_2 et $\|\cdot\|$ sont des p-normes.

2.4. Corollaire. *Soit E un espace vectoriel topologique séparé. Il existe alors une famille d'espaces compacts extrêmement discontinus Ω_i, $i \in I$, une famille d'espaces de Riesz (F)-normés complets $(L_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I$, chaque L_i étant un idéal d'ordre de $C^\infty(\Omega_i)$, et un isomorphisme linéaire-topologique de E sur un sous-espace vectoriel topologique de $\prod_{i\in I} L_i$, pour le produit des topologies des $(L_i, \|\cdot\|_i)$.*

On sait en effet que E est un sous-espace vectoriel topologique d'un produit $\prod_{i\in I} E_i$ d'espaces (F)-normés E_i auxquels on appliquera le théorème 2.1.

3. Application aux produits tensoriels topologiques.

3.1. Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques disons qu'une (F)-semi-norme (resp. une topologie vectorielle) sur $E\otimes F$ est *$\otimes$-continue* (resp. *tensorielle*) quand elle rend continue l'application bilinéaire $(x, y) \to x\otimes y$ de $E\times F$ dans $E\otimes F$.

Le théorème ci-dessous montre que si E et F sont des espaces vectoriels (F)-normés il existe sur $E\otimes F$ une (F)-norme $\otimes$-continue.

On en déduit que si E et F sont des espaces vectoriels topologiques séparés il existe une topologie tensorielle séparée sur $E\otimes F$. En effet, E et F sont des sous-espaces de produits $\prod_{i\in I} E_i$ et $\prod_{j\in J} F_j$ d'espaces vectoriels (F)-normés E_i et F_j et $E\otimes F$ s'injecte dans $\prod_{i,j} E_i\otimes F_j$: le produit de topologies tensorielles séparées sur les $E_i \otimes F_j$ induira sur $E \otimes F$ une topologie tensorielle séparée.

On résout ainsi un problème de L. Waelbroeck ([10], [11]).

3.2. THÉORÈME. *Si (E, u) et (F, v) sont des espaces vectoriels (F)-normés, alors la fonction $u \otimes_\vee v$: $E \otimes F \to \boldsymbol{R}^+$ donnée par*

$$(5)\quad u \otimes_\vee v(z) = \inf\Big\{\sum_{n=0}^{N} u(x_n) \vee v(y_n) \Big|\ N \geqslant 0,\ x_n \in E,\ y_n \in E,\ z = \sum_{n=0}^{N} x_n \otimes y_n\Big\}$$

est une (F)-norme de $E \otimes F$.

Dans la formule (5) on pose $a \vee b = \sup(a, b)$ pour a et b réels. Nous avons démontré le théorème 3.2 en [7] sans aucune représentation fonctionnelle de E ou F. Nous en donnons ci-dessous d'autres preuves. Pour cela nous représentons $E \otimes F$ comme un espace de (classes de) fonctions numériques sur un espace produit $\Omega \times \Sigma$ (en 3.3), puis en 3.4 comme un espace de (classes de) fonctions à valeurs dans F. Chacune de ces représentations nous redonne le théorème 3.2, la seconde permettant d'améliorer en 3.5 les résultats de [6], [7].

3.3. Représentons $E \otimes F$ comme un espace de classes de fonctions numériques. Appliquant 1.7 et le théorème 2.1 plongeons isométriquement (E, u) et (F, v) dans des espaces de Riesz (F)-normés complets $(L^u(\Omega, \alpha), \|\cdot\|_u)$ et $(L^v(\Sigma, \beta), \|\cdot\|_v)$, $L^u(\Omega, \alpha)$ et $L^v(\Sigma, \beta)$ étant des idéaux d'espaces de Riesz $L^0(\Omega, \alpha)$ et $L^0(\Sigma, \beta)$ ou Ω et Σ sont des compacts extrêmement discontinus et α, β sont les σ-idéaux des sous-ensembles maigres de Ω et Σ.

Soit γ le σ-idéal de parties de $\Omega \times \Sigma$ défini de la façon suivante. Pour que $C \subset \Omega \times \Sigma$ appartienne à γ il faut et il suffit que $\{\omega \in \Omega \mid C_\omega \notin \beta\} \in \alpha$ et que $\{\sigma \in \Sigma \mid C^\sigma \notin \alpha\} \in \beta$, en posant $C_\omega = \{\sigma \in \Sigma \mid (\omega, \sigma) \in C\}$ et $C^\sigma = \{\omega \in \Omega \mid (\omega, \sigma) \in C\}$.

$L^0(\Omega, \alpha) \otimes L^0(\Sigma, \beta)$ et donc $E \otimes F$ s'identifient alors de façon classique à des sous-espaces vectoriels de $L^0(\Omega \times \Sigma, \gamma)$.

On a en effet une application linéaire i de $L^0(\Omega, \alpha) \otimes L^0(\Sigma, \beta)$ dans $L^0(\Omega \times \Sigma, \gamma)$ telle que $i(x \otimes y)$ soit la classe modulo $\mathscr{N}(\gamma)$ de la fonction $\xi(\omega)\eta(\sigma)$ de $(\omega, \sigma) \in \Omega \times \Sigma$ si $\xi \in \mathscr{L}^0(\Omega, \alpha)$ et $\eta \in \mathscr{L}^0(\Sigma, \beta)$ représentent $x \in L^0(\Omega, \alpha)$ et $y \in L^0(\Sigma, \beta)$. Cela parce que $A \times \Sigma \cup \Omega \times B \in \gamma$ si $A \in \alpha$ et $B \in \beta$. Et on prouve comme d'habitude que i est injective.

Démontrons alors le théorème 3.1: il suffira de montrer que $z = 0$ si $z \in E \otimes F$ et $u \otimes_\vee v(z) = 0$. Pour tout entier $h \geqslant 0$ on a $z = \sum_{n=0}^{N_h} x_{h,n} \otimes y_{h,n}$ avec $x_{h,n} \in E$, $y_{h,n} \in F$ et $\sum_{n=0}^{N_h} u(x_{h,n}) \vee v(y_{h,n}) \leqslant 2^{-h}$. D'après 2.2 les suites $\sum_{n=0}^{N_h} |x_{h,n}|$ et $\sum_{n=0}^{N_h} |y_{h,n}|$, $h \geqslant 0$, tendent vers 0 α-presque partout et β-presque partout sur Ω et Σ, donc la suite des $\sum_{n=0}^{N_h} x_{h,n} \otimes y_{h,n}$, $h \geqslant 0$, tend vers 0 γ-presque partout sur $\Omega \times \Sigma$, d'où $z = 0$.

3.4. Représentons maintenant $E \otimes F$ comme un espace de classes de fonctions à valeurs dans F. On considère (E, u) plongé isométriquement dans le même espace de Riesz (F)-normé $(L^u(\Omega, \alpha), \|\cdot\|_u)$ que ci-dessus.

Notons $\mathscr{L}_F^0(\Omega, \alpha)$ l'espace vectoriel des fonctions φ: $\Omega \to (F, v)$ dont la restriction au complémentaire de quelque ensemble $A \in \alpha$ soit continue. Notons $L_F^0(\Omega, \alpha)$ l'espace vectoriel quotient de $\mathscr{L}_F^0(\Omega, \alpha)$ par le sous-espace vectoriel $\mathscr{N}_F(\alpha)$ des fonctions $\Omega \to F$ nulles α-presque partout.

Pour tout $a > 0$ soit v_a^j la jauge de $\{y \in F \mid v(y) \leqslant a\}$:

$$(6)\qquad v_a^j(y) = \inf\{b > 0 \mid v(y/b) \leqslant a\}, \qquad y \in F.$$

La fonction v_a^j: $F \to \boldsymbol{R}^+$ est semi-continue inférieurement. On en déduit comme en [1] que la fonction $v_a^j(\varphi)$: $\omega \to v_a^j(\varphi(\omega))$, $\omega \in \Omega$, est un élément de $\mathscr{L}^0(\Omega, \alpha)$ (voir 1.6) si $\varphi \in \mathscr{L}_F^0(\Omega, \alpha)$. On a donc $v_a^j(f) \in L^0(\Omega, \alpha)$ pour tout $f \in L_F^0(\Omega, \alpha)$ si $v_a^j(f)$ est bien sûr la classe modulo $\mathscr{N}(\alpha)$ des $v_a^j(\varphi)$, $\varphi \in f$.

Posons alors

$$(7)\qquad L_F^u(\Omega, \alpha) = \{f \in L_F^0(\Omega, \alpha) \mid \forall a > 0,\ v_a^j(f) \in L^u(\Omega, \alpha)\}$$

et pour $f \in L_F^u(\Omega, \alpha)$

$$(8)\qquad \varrho_a(f) = \|v_a^j(f)\|_u, \qquad a > 0,$$

$$(9)\qquad \|f\|_\varrho = \inf\{a > 0 \mid \varrho_a(f) \leqslant a\}.$$

$L_F^u(\Omega, \alpha)$ est un sous-espace vectoriel de $L_F^0(\Omega, \alpha)$ et $\|\cdot\|_\varrho$ est une (F)-norme sur $L_F^u(\Omega, \alpha)$.

On a en effet pour $a > 0$, $a' > 0$, $y \in F$, $y' \in F$

$$v_{a+a'}^j(y+y') \leqslant v_a^j(y) + v_{a'}^j(y')$$

car si $b > v_a^j(y)$ et $b' > v_{a'}^j(y')$ alors $v(y/b) \leqslant a$ et $v(y'/b') \leqslant a'$ d'où

$$v\left(\frac{y+y'}{b+b'}\right) = v\left(\frac{b}{b+b'}\,\frac{y}{b} + \frac{b'}{b+b'}\,\frac{y'}{b'}\right) \leqslant v\left(\frac{y}{b}\right) + v\left(\frac{y'}{b'}\right) \leqslant a + a'$$

et donc $v_{a+a'}^j(y+y') \leqslant b + b'$.

Si f et f' appartiennent à $L_F^0(\Omega, \alpha)$ on a donc $v_{a+a'}^j(f+f') \leqslant v_a^j(f) + v_{a'}^j(f')$ et $L_F^u(\Omega, \alpha)$ est un espace vectoriel. On vérifie aisément que $\|\cdot\|_\varrho$ est une (F)-semi-norme, l'inégalité

$$\varrho_{a+a'}(f+f') \leqslant \varrho_a(f) + \varrho_{a'}(f')$$

donnant la sous-additivité de $\|\cdot\|_\varrho$.

Soit $f \in L_F^u(\Omega, \alpha)$ tel que $\|f\|_\varrho = 0$. Alors $\varrho_a(f) = 0$ pour tout $a > 0$.

Soit $\varphi \in \mathscr{L}^0_F(\Omega, a)$ une fonction représentant f. Comme $\|\cdot\|_u$ est une (F)-norme, $v^j_{1/h}(\varphi) = 0$ a-presque partout pour tout entier $h \geqslant 1$, d'où $\varphi = 0$ a-presque partout. Donc $f = 0$ et $\|\cdot\|_\varrho$ est une (F)-norme.

Remarque. La famille des ϱ_a, $a > 0$, est un exemple d'"échelle modulaire" ("modular scale" en [8]).

Le produit tensoriel $L^u(\Omega, a)\otimes F$ *se plonge canoniquement dans* $L^u_F(\Omega, a)$ *et on a* $\|\cdot\|_\varrho \leqslant \|\cdot\|_u \otimes_\vee v$ *sur* $L^u(\Omega, a)\otimes F$.

Comme $\|\cdot\|_u\otimes_\vee v \leqslant u\otimes_\vee v$ sur $E\otimes F$ cela montre à nouveau que $u\otimes_\vee v$ est une (F)-norme sur $E\otimes F$. On identifie $L^0(\Omega, a)\otimes F$ à un sous-espace vectoriel de $L^0_F(\Omega, a)$ de façon usuelle (grace à 1.7).

Si $x \in L^u(\Omega, a)$ et $y \in F$ alors $v^j_a(x\otimes y) = |x| v^j_a(y)$ appartient à $L^u(\Omega, a)$ pour tout $a > 0$, donc $x\otimes y \in L^u_F(\Omega, a)$ et $L^u(\Omega, a)\otimes F \subset L^u_F(\Omega, a)$. Si en outre $a = \|x\|_u \vee v(y)$ alors $v^j_a(y) \leqslant 1$ d'où $\varrho_a(x\otimes y) = \|x v^j_a(y)\|_u \leqslant \|x\|_u \leqslant a$ et donc $\|x\otimes y\|_\varrho \leqslant a$. On en déduit $\|z\|_\varrho \leqslant \|\cdot\|_u\otimes_\vee v(z)$ pour tout $z \in L^u(\Omega, a)\otimes F$.

3.5. Quand w est une r-semi-norme, avec $0 < r \leqslant 1$, introduisons pour plus de commodité la notation

$$\tilde{w}(x) = w(x)^{1/r}.$$

$\tilde{w}$ est une fonction homogène. C'est la jauge de $\{x \mid w(x) \leqslant 1\}$.

Si $0 < p, q, r \leqslant 1$ et si u (resp. v) est une p-semi-norme (resp. une q-semi-norme) sur E (resp. F) on voit que la fonction $u\otimes_r v\colon E\otimes F \to \boldsymbol{R}^+$ donnée par

$$u\otimes_r v(z) = \inf\Big\{\sum_{n=0}^{N} \tilde{u}(x_n)^r \tilde{v}(y_n)^r \,\Big|\, N \geqslant 0,\ x_n \in E,\ y_n \in F,\ z = \sum_{n=0}^{N} x_n\otimes y_n\Big\}$$

est la plus grande des r-semi-normes w sur $E\otimes F$ vérifiant $\tilde{w}(x\otimes y) \leqslant \tilde{u}(x)\tilde{v}(y)$ pour tout $(x, y) \in E\times F$. Elle est donc $\otimes$-continue pour u et v.

On a $u\otimes_\vee v = u\otimes_s v$ si $s = pq(p+q)^{-1}$. En effet il résulte de $s/p + s/q = 1$ que $u\otimes_\vee v(az)$ est, pour $a > 0$ et $z \in E\otimes F$, la borne inférieure des $\sum_{n=0}^{N} u(a^{s/p}x_n) \vee v(a^{s/q}y_n)$ tels que $z = \sum_{n=0}^{N} x_n\otimes y_n$. Donc $u\otimes_\vee v$ est s-homogène, c'est la plus grande s-semi-norme w vérifiant $w(x\otimes y) \leqslant u(x)\vee v(y)$ pour tout $(x, y) \in E\times F$, condition équivalente à $\tilde{w}(x\otimes y) \leqslant \tilde{u}(x)\tilde{v}(y)$.

Le résultat ci-dessous est donc déjà une conséquence du théorème 3.2 (établi en [6], [7] sans représentation fonctionnelle) dans le cas particulier où on a $r \leqslant pq(p+q)^{-1}$.

3.6. Théorème. *Si u (resp. v) est une p-norme sur E (resp. une q-norme sur F) alors $u\otimes_r v$ est une r-norme sur $E\otimes F$ pour tout r vérifiant.*

$$0 < r \leqslant pq(p+q-pq)^{-1} \tag{10}$$

Par exemple, quand u et v sont deux p-normes, $u\otimes_r v$ est une r-norme pour $r = p(2-p)^{-1}$, mais pas en général pour $r = p$ ([2]) et j'ignore si $u\otimes_r v$ est une r-norme pour tout $r < p$.

Démonstration. Reprenons la construction de 3.4, $\|\cdot\|_u$ étant maintenant une p-norme de Riesz sur $L^u(\Omega, a)$: voir le théorème 2.1.

Comme v est une q-norme de F on a pour $y \in F$ et $a > 0$

$$v^j_a(y) = \inf\{b > 0 \mid v(y) \leqslant b^q a\} = a^{-1/q}\tilde{v}(y)$$

d'où

$$L^u_F(\Omega, a) = \{f \in L^0_F(\Omega, a) \mid \tilde{v}(f) \in L^u(\Omega, a)\}$$

et comme on l'a vu en 3.4 (ou grace à (11) ci-dessous) $L^u_F(\Omega, a)$ est un sous-espace vectoriel de $L^0_F(\Omega, a)$ contenant $E\otimes F$. De plus la (F)-norme $\|\cdot\|_\varrho$ de 3.4 est une $pq(p+q)^{-1}$-norme car on a $\|f\|_\varrho = \|\tilde{v}(f)\|_u^{q/(p+q)}$. En fait la topologie qu'elle définit est r-convexe si r vérifie (10).

Montrons en effet que sous la condition (10) la fonctionnelle

$$w(f) = \left(\|\tilde{v}(f)\|_u\right)^{r/p}, \quad f \in L^u_F(\Omega, a),$$

est une r-norme sur $L^u_F(\Omega, a)$.

Il suffit pour cela de prouver que $w(af+bg) \leqslant 1$ si $f, g \in L^u_F(\Omega, a)$ et $a > 0$, $b > 0$ vérifient $w(f) \leqslant 1$, $w(g) \leqslant 1$ et $a^r + b^r = 1$: étant r-homogène, w sera alors sous-additive.

On a donc $\|\tilde{v}(f)\|_u \leqslant 1$ et $\|\tilde{v}(g)\|_u \leqslant 1$. L'inégalité

$$\tilde{v}(af+bg) \leqslant \left(a^r a^{q-r} v(f) + b^r b^{q-r} v(g)\right)^{1/q}$$

entraîne par convexité de la fonction $t \to t^{1/q}$

$$\tilde{v}(af+bg) \leqslant a^{r+1-r/q}\tilde{v}(f) + b^{r+1-r/q}\tilde{v}(g) \tag{11}$$

et, $\|\cdot\|_u$ étant une p-norme de Riesz de $L^u(\Omega, a)$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{v}(af+bg)\|_u &\leqslant a^{p(r+1-r/q)}\|\tilde{v}(f)\|_u + b^{p(r+1-r/q)}\|\tilde{v}(g)\|_u\\ &\leqslant a^r\|\tilde{v}(f)\|_u + b^r\|\tilde{v}(g)\|_u \leqslant 1\end{aligned}$$

car (10) entraîne $r \leqslant p(r+1-r/q)$, d'où $w(af+bg) \leqslant 1$.

On voit en outre aisément que w vérifie

$$\tilde{w}(x\otimes y) = \tilde{u}(x)\tilde{v}(y), \quad x \in E,\ y \in F$$

d'où

$$w(z) \leqslant u\otimes_r v(z), \quad z \in E\otimes F$$

et $u\otimes_r v$ est donc une r-norme.

3.7. Un espace localement quasi-convexe est un sous-espace vectoriel topologique d'un produit d'espaces localement bornés. Comme un espace localement borné séparé est p-normable pour quelque $p > 0$ ([4]), et inversement, on a le corollaire suivant du théorème 3.6.

PROPOSITION. *Si E et F sont des espaces localement quasi-convexes séparés, il existe alors sur $E \otimes F$ une topologie tensorielle localement quasi-convexe séparée.*

Références

[1] J. Dixmier, *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone*, Summa Brasil. Math. 11 (1951), 151–182.
[2] N. J. Kalton, *An example in the theory of bilinear maps*, preprint.
[3] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, Vol. I, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, London 1971.
[4] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Polish Scientific Publishers, Varsovie 1972.
[5] M. H. Stone, *Boundedness properties in function lattices*, Canad. J. Math. 1 (1949), 176–186.
[6] Ph. Turpin, *Sur certains produits tensoriels topologiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 291 (1980), 405–407.
[7] — *Produits tensoriels d'espaces vectoriels topologiques*, à paraître dans Bull. Soc. Math. France.
[8] — *Fubini inequalities and Bounded Multiplier Property in generalized modular spaces*, Comment. Math., Tomus specialis in honorem Ladislai Orlicz, I, pp. 331–353, PWN, Varsovie 1978.
[9] D. Vogt, *Integrations theorie in p-normierten Räumen*, Math. Ann. 173 (1967), 219–232.
[10] L. Waelbroeck, *The tensor product of a locally pseudo-convex and a nuclear space*, Colloquium on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras, Studia Math. 38 (1970), 101–104.
[11] — *Topological vector spaces*, Summer School on Topological Vector Spaces, pp. 1–40, Lecture Notes in Mathematics 331, Springer, Berlin 1973.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUE (BÂT. 425)
91405 ORSAY, FRANCE

Received February 25, 1980
Revised version May 15, 1981 (1605)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXXIII. (1982)

Analytic functionals on fully nuclear spaces

by

SEÁN DINEEN (Dublin)

Abstract. In this paper we study bounded linear functionals on $(H(U), \tau)$ (analytic functionals), where U is an open polydisc in a fully nuclear space with a basis. Our main result is that $(H(U), \tau_0)$ is a bornological space whenever U is an open polydisc in a certain class of Fréchet nuclear spaces with a basis. Apart from this result, we show that certain spaces of holomorphic functions and analytic functionals have a basis and are nuclear. An interesting feature of our results is the direct correspondence which we find between known results not hitherto seen as being connected.

We use the notation of [8] for the theory of holomorphic functions on fully nuclear spaces. We refer to [14] and [16] for the general theory of locally convex spaces, to [13] and [21] for the theory of nuclear spaces, to [10], [11], [18] and [19] for the theory of holomorphic functions on locally convex spaces. Further results on the theory of holomorphic functions on nuclear spaces are to be found in [2], [3], [4], [5], [6] and [24].

We begin by recalling some definitions from [8].

A *fully nuclear space* is a locally convex space E such that E and E'_β (the strong dual of E) are both complete reflexive nuclear spaces. This implies that the strong dual of a fully nuclear space is fully nuclear. Fréchet nuclear spaces are fully nuclear and the product of a countable set of fully nuclear spaces is also fully nuclear. If E is fully nuclear and has a Schauder basis, then it has an equicontinuous and hence an absolute basis.

Let P denote a collection of non-negative sequences such that for each $r \in N$ there exists $(a_n)_n \in P$ where $a_r > 0$.

The *sequence space* $\Lambda(P)$ is the set of all sequences of complex numbers, $(z_n)_n$, such that

$$\sum_n |z_n| a_n < \infty \quad \text{for all } a = (a_n)_{n=1}^\infty \in P.$$

We endow $\Lambda(P)$ with the topology generated by the semi-norms p_a, $a = (a_n)_n \in P$, where

$$p_a(\{z_n\}_n) = \sum_n |z_n| a_n.$$