STUDIA MATHEMATICA, T. LXXII. (1982)

Mesures ε-idempotentes de norme bornée

par

J. F. MÉLA (Villetaneuse)

Résumé. Une mesure bornée μ sur un groupe abélien localement compact, dont la transformée de Fourier–Stieltjes $\hat{\mu}$ est telle que $|\hat{\mu}^2 - \hat{\mu}| < \varepsilon$, est la somme d'une mesure idempotente et d'une mesure dont la transformée de Fourier–Stieltjes est $< \varepsilon$, à condition que $\|\mu\| < C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$ (th. 1). C'est une version générale et quantitative précise d'un résultat établi par K. De Leeuw et Y. Katznelson pour le cercle. On fait dériver ce résultat de propriétés spectrales de l'algèbre de convolution des mesures. La méthode permet d'obtenir d'autres resultats, d'une part sur les mesures μ qui ont un "trou" dans l'ensemble des valeurs de $|\hat{\mu}|$ (th. 2); d'autre part sur le comportement à l'infini de $\hat{\mu}$ pour une mesure μ quelconque (th. 3).

G désigne un groupe abélien localement compact, Γ son dual (notés multiplicativement), $M(G)$ l'algèbre de convolution des mesures de Radon bornées sur G, d'unité δ, $L^1(G)$ l'idéal de $M(G)$ constitué des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Haar de G.

$M(G)$ est une algèbre de Banach commutative pour la norme $\|\mu\| = \int d|\mu|$. Soit Δ son spectre de Gelfand, dont les éléments sont appelés caractères de l'algèbre. Δ est muni de la topologie faible de $M(G)'$, dite topologie de Gelfand; il est compact pour cette topologie. Notons $\hat{\mu}$ la transformée de Gelfand d'une mesure $\mu \in M(G)$. Le groupe Γ s'identifie avec une partie de Δ, de telle sorte que la restriction de $\hat{\mu}$ à Γ n'est autre que la transformée de Fourier–(Stieltjes) de μ

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma \, d\mu \quad (\gamma \in \Gamma).$$

La topologie de Γ comme dual de G est déterminée par les transformées de Fourier de mesures et coïncide donc avec la topologie induite par la topologie de Gelfand de Δ. Dans la suite nous n'aurons le plus souvent à considérer que l'ensemble des éléments de Δ adhérents à Γ (Γ n'est pas dense dans Δ si G n'est pas discret; c'est le classique "phénomène de Wiener–Pitt") (cf. [9]).

1. Mesures ε-idempotentes décomposables. Une mesure $\mu \in M(G)$ est idempotente si $\mu * \mu = \mu$, ou, de façon équivalente, si sa transformée de Fourier est à valeurs 0, 1.

1.1. Nous considérons ici des mesures qui sont voisines, en transformée de Fourier, de mesures idempotentes. Nous verrons que, si leur norme n'est pas trop grande, elles se décomposent en somme d'une mesure idempotente et d'une mesure petite en transformée de Fourier. La méthode de démonstration conduit à d'autres résultats et met l'accent sur une propriété intéressante des caractères de Γ (th. 3).

1.2. G désigne un groupe abélien localement compact et Γ son dual.

DÉFINITION 1. Soit ε un réel tel que $0<\varepsilon<1/2$. Une mesure $\mu\in M(G)$ est *ε-idempotente* si, pour tout $\gamma\in\Gamma$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)-1|\leqslant\varepsilon$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)|\leqslant\varepsilon$. On dira que μ est ***triviale*** dans le cas où $|\hat{\mu}(\gamma)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $\gamma\in\Gamma$. On dira que μ est ***décomposable*** si elle est la somme d'une mesure idempotente et d'une mesure ε-idempotente triviale.

THÉORÈME 1. (a) *Toute mesure $\mu\in M(G)$, ε-idempotente telle que*

$$\|\mu\|\leqslant|\mathrm{Log}\,\varepsilon|/\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})-2 \tag{1.2.1}$$

est décomposable.

(b) *Si G est compact infini, pour tout ε, $0<\varepsilon<1/2$, il existe une mesure $\mu\in M(G)$, ε-idempotente non décomposable, telle que*

$$\|\mu\|\leqslant 2\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|+6. \tag{1.2.2}$$

Remarques.

1.3. Une première version du th. 1 (a) apparaît dans De Leeuw et Katznelson [1], dans le cas $G=\boldsymbol{T}$, sans majoration précise de $\|\mu\|$. La méthode utilisée ne se généralise pas directement. Elle repose sur un lemme qui fait intervenir l'ordre de $\boldsymbol{Z}$ et dont nous donnerons plus loin une version un peu plus générale (corollaire 3) en prolongement de la méthode utilisée ici.

1.4. Il est tout à fait remarquable que la condition (1.2.1) qui assure que μ est décomposable soit valable quel que soit le groupe G et ne puisse être substantiellement améliorée dans aucun groupe G particulier (sauf les cas triviaux). De façon précise, pour tout groupe G, et pour tout ε, $0<\varepsilon<1/2$, soit $C(\varepsilon,G)$ la borne inférieure des normes des mesures sur G, ε-idempotentes non décomposables. Le th. 1 affirme que, pour tout groupe G qui contient un sous-groupe compact infini, on a:

$$|\mathrm{Log}\,\varepsilon|/\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})-2<C(\varepsilon,G)<2\,|\mathrm{Log}\,\varepsilon|+6.$$

1.5. Dans la démonstration du th. 1, on gagnera à considérer, plus généralement, une mesure μ telle que $d(\hat{\mu}(\Gamma),\boldsymbol{Z})\leqslant\varepsilon$, où d désigne la distance usuelle. Le résultat du th. 1 (a) reste valable, mais ici μ se décompose en somme d'une mesure dont la transformée de Fourier est à valeurs entières, et d'une mesure ε-idempotente triviale.

1.6. Signalons aussi qu'on peut étendre la portée de la méthode développée ici, au cas où l'on suppose que la propriété de la définition 1 n'est vérifiée qu'à l'infini dans Γ (non compact). La conclusion du th. 1 (a) reste valable à condition de remplacer dans la décomposition la

mesure ε-idempotente triviale par une mesure ν telle que $\overline{\lim\limits_{\gamma\to\infty}}|\hat{\nu}(\gamma)|\leqslant\varepsilon$. Pour celà il suffit, dans la démonstration du th. 1 (a), de remplacer Γ par $\bar{\Gamma}\setminus\Gamma$ et de répéter les arguments, ce dont nous nous dispenserons.

1.7. Avant d'aller plus loin, il est facile de voir qu'une condition de majoration de $\|\mu\|$ en fonction de ε est indispensable pour qu'une mesure ε-idempotente soit décomposable. Ainsi dans le cas de $\boldsymbol{T}$, considérons la mesure ν définie par le produit de Riesz

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+2\varepsilon\cos 3^j x)\qquad(0<\varepsilon<1/2).$$

et qui est telle que

$$\hat{\nu}(0)=1,$$
$$\hat{\nu}(\pm 3^j)=\varepsilon\qquad(j\geqslant 1),$$
$$|\hat{\nu}(n)|<\varepsilon^2\qquad\text{sinon}.$$

Si m désigne la mesure de Haar de $\boldsymbol{T}$, on vérifie que la mesure $\mu=(1/\varepsilon)(\nu-m)$ est ε-idempotente, mais n'est pas décomposable puisque $|\hat{\mu}(n)-1|\leqslant\varepsilon$ si et seulement si $n=\pm 3^j$ $(j\geqslant 1)$ tandis qu'il n'existe aucune mesure idempotente ayant la même propriété. Ici $\|\mu\|=2/\varepsilon$. On peut beaucoup améliorer ce contre-exemple et obtenir ainsi le th. 1 (b).

2. Mesures ε-quasi-idempotentes.

2.1. Pour deux mesures μ et ν et un caractère $\chi\in\Gamma$, convenons d'écrire

$$\hat{\mu}(\chi)\sim\hat{\nu}(\chi) \tag{2.1.1}$$

si les nombres $|\hat{\mu}(\chi)|$ et $|\hat{\nu}(\chi)|$ sont tous deux $\leqslant\varepsilon$ ou $\geqslant 1-\varepsilon$. On écrira $\hat{\mu}\sim\hat{\nu}$ si la propriété (2.1.1) est vraie pour tout $\chi\in\Gamma$, ou de façon équivalente, pour tout $\gamma\in\Gamma$.

Le théorème 1 (a) revient à démontrer qu'il existe une mesure idempotente η telle que $\hat{\mu}\sim\hat{\eta}$. Nous établirons d'abord le théorème 2 suivant, valable pour une classe de mesures un peu plus générale, que nous introduisons maintenant.

DÉFINITION 2. Soit un réel ε tel que $0<\varepsilon<1/2$. Une mesure $\mu\in M(G)$ est *ε-quasi-idempotente* si, pour tout $\gamma\in\Gamma$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)|\leqslant\varepsilon$, ou bien $|\hat{\mu}(\gamma)|\geqslant 1-\varepsilon$. On dira que μ est *triviale* dans le cas où $|\hat{\mu}(\gamma)|\leqslant\varepsilon$ pour tout $\gamma\in\Gamma$. (Dans cette définition, on pourrait remplacer sans inconvénient $1-\varepsilon$ par 1 comme dans [6]. Nous adoptons ici la définition 2 pour passer plus facilement au cas des mesures ε-idempotentes.)

THÉORÈME 2. *Pour toute mesure $\mu\in M(G)$, ε-quasi-idempotente et telle que*

$$\|\mu\|\leqslant|\mathrm{Log}\,\varepsilon|/\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})-1 \tag{2.1.2}$$

il existe une topologie τ de groupe localement compact sur G, plus fine que la topologie initiale, et une mesure idempotente $\eta \in L^1(G_\tau)$ telle que $\hat{\mu}_\tau \sim \hat{\eta}$. De plus $\eta \neq 0$ si μ n'est pas triviale. (La définition de G_τ et μ_τ est rappelée dans le paragraphe suivant.)

2.2. Rappelons qu'on désigne par G_τ le groupe G avec la topologie τ, et $M(G_\tau)$ les mesures de Radon bornées sur G_τ. $M(G_\tau)$ s'identifie à une sous-algèbre de $M(G)$ dont l'orthogonal est un idéal. Toute mesure $\mu \in M(G)$ se décompose de façon unique sous la forme $\mu = \mu_\tau + \nu$, avec $\mu_\tau \in M(G_\tau)$ et $\nu \perp M(G_\tau)$ (cf. [10], [11]).

DÉFINITION 3. Une mesure $\mu \in M(G)$ est *fortement continue* si $\mu \perp M(G_\tau)$ pour toute topologie τ de groupe localement compact sur G, strictement plus fine que la topologie initiale.

Le théorème 2 a pour conséquence immédiate:

COROLLAIRE 1. *Soit μ une mesure ε-quasi idempotente telle que*

$$\|\mu\| \leqslant |\mathrm{Log}\,\varepsilon| / \mathrm{Log}(1+\sqrt{2}) - 1.$$

Si μ est fortement continue, l'ensemble des γ où $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1-\varepsilon$ est compact.

En effet, si μ est fortement continue, non triviale, on a nécessairement $\mu_\tau = \mu$ dans le th. 2 et $\eta \in L^1(G)$. Par suite $|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ en dehors du compact où $\hat{\eta}(\gamma) = 1$.

COROLLAIRE 2. *Si $G = \boldsymbol{T}$ et μ est une mesure continue ε-quasi-idempotente telle que*

$$\|\mu\| \leqslant |\mathrm{Log}\,\varepsilon| / \mathrm{Log}(1+\sqrt{2}) - 1$$

l'ensemble des γ où $|\hat{\mu}(\gamma)| \geqslant 1-\varepsilon$ est fini.

En effet, la seule topologie de groupe localement compact sur $\boldsymbol{T}$, outre la topologie usuelle, est la topologie discrète.

Remarques.

2.3. Nous vérifierons dans la suite qu'on peut se limiter à considérer les topologies τ définies de la manière suivante:

A tout sous groupe compact H de G, il correspond une topologie τ_H unique, plus fine que la topologie initiale, telle que H soit compact ouvert dans G_{τ_H}. Si H n'était pas ouvert pour la topologie initiale, on obtient une topologie strictement plus fine. Pour cela il est nécessaire que H soit d'indice infini.

Avec cette restriction, on aura une notion un peu plus large de continuité forte pour laquelle le corollaire 1 reste valable. Une mesure $\mu \in M(G)$ est étrangère à $M(G_{\tau_H})$ si et seulement si $|\mu|(xH) = 0$ pour tout $x \in G$.

2.4. Le corollaire 2 est démontré dans De Leeuw et Katznelson [1] sans condition précise sur $\|\mu\|$ et ε. Le corollaire 1 est établi dans Ramsey–Wells [8] par une méthode différente,* mais avec une condition plus restrictive sur $\|\mu\|$ et ε, et une définition un peu différente de la continuité forte qui dans ce contexte rejoint plus ou moins la notre (cf. (2.3) et [11], où les différentes notions de continuité forte sont discutées).

Une première version du th. 2 apparaît dans Glicksberg [2], dans le cas où $\varepsilon = 0$, évidemment sans condition sur $\|\mu\|$. Le résultat de Glicksberg a inspiré la méthode de démonstration développée dans (5).

2.5. La mesure construite en (7) pour démontrer le th. 1 (b) ne vérifie pas la conclusion du th. 2. On ne peut donc pas espérer améliorer beaucoup le th. 2, ni même d'ailleurs le corollaire 2.

3. Le calcul sur les caractères de $M(G)$. On introduit ici sur le spectre de $M(G)$, des opérations et un ordre, en suivant les idées de Šreider et Taylor (cf. [10], [11], [6]). Nous nous bornerons à énoncer, de la façon la plus élémentaire, les définitions et propriétés utilisées plus loin (les vérifications sont immédiates).

3.1. Pour $\mu \in M(G)$ on identifie $L^1(\mu)$ avec le sous-espace des mesures absolument continues par rapport à μ. La restriction d'une forme linéaire continue χ de $M(G)$ à $L^1(\mu)$ définit un élément χ_μ de $L^\infty(\mu)$ tel que

$$\langle \chi, \nu \rangle = \int \chi_\mu \, d\nu \qquad (\nu \in L^1(\mu)).$$

A tout $\chi \in M(G)'$ correspond ainsi une famille $(\chi_\mu)_{\mu \in M(G)}$ telle que

$$\sup_{\mu \in M(G)} \|\chi_\mu\|_{L^\infty(\mu)} < +\infty, \qquad \chi_\mu = \chi_\nu \ \nu\text{-p.p.} \quad \text{si} \quad \nu \ll \mu$$

et réciproquement.

(3.1.1) On définit le produit d'une forme linéaire χ et d'une mesure μ en posant

$$\chi\mu = \chi_\mu \mu.$$

$M(G)'$ opère ainsi sur l'espace $M(G)$ de telle façon que $\chi\mu \ll \mu$.

(3.1.2) On définit le produit de deux formes linéaires χ et φ, la conjuguée et le module d'une forme linéaire χ, de telle sorte que, pour toute mesure $\mu \in M(G)$, on ait $(\chi\varphi)_\mu = \chi_\mu \varphi_\mu$, $(\overline{\chi})_\mu = \overline{\chi}_\mu$, $|\chi|_\mu = |\chi_\mu|$.

(3.1.3) Pour tout $\chi \in M(G)'$, il existe $\chi_0 \in M(G)'$, tel que $|\chi_0|^2 = |\chi_0|$ et $\chi = \chi_0 |\chi|$.

(3.1.4) On introduit une relation d'ordre sur $M(G)'$ en écrivant $\chi \leqslant \varphi$ si et seulement si, pour toute mesure $\mu \in M(G)$, $\chi_\mu \leqslant \varphi_\mu$.

---

*Cf. aussi [12] dont j'ai eu connaisance après la rédaction de cet article, et où la même méthode est développée pour obtenir une version qualitative du th. 1 (a). De fait je ne crois pas que cette méthode puisse fournir les bonnes estimations.

(3.1.5) Le produit est séparément continu pour la topologie faible de $M(G)'$. La conjugaison est continue, mais l'application $\chi \to |\chi|$ ne l'est pas.

Il est commode dans la suite d'adopter la notation

$$\langle \chi, \mu \rangle = \int \chi d\mu.$$

3.2. Les éléments de Δ sont caractérisés dans $M(G)'$ par la propriété

$$\chi_{\mu * \nu}(xy) = \chi_\mu(x)\chi_\nu(y) \quad \mu \otimes \nu\text{-pp}.$$

pour toutes $\mu, \nu \in M(G)$. On peut ainsi vérifier facilement:

(3.2.1) Pour $\chi \in \Delta$, μ, $\nu \in M(G)$

$$\chi(\mu * \nu) = (\chi\mu) * (\chi\nu), \qquad \chi\delta = \delta.$$

Autrement dit, Δ opère sur l'algèbre $M(G)$ par multiplication.

(3.2.2) Δ est un semi-groupe commutatif pour le produit qui est tel que

$$\widehat{\chi\mu}(\varphi) = \hat{\mu}(\chi\varphi) = \widehat{\varphi\mu}(\chi) \qquad (\chi, \varphi \in \Delta,\ \mu \in M(G)).$$

(3.2.3) Δ est stable pour la conjugaison et le module. Les éléments de Δ sont de module $\leqslant 1$.

(3.2.4) Si δ_x désigne la mesure de Dirac en un point $x \in G$, pour tout $\chi \in \Delta$,

$$|\hat{\delta}_x(\chi)| = \hat{\delta}_x(|\chi|) = 1, \qquad |\chi|\delta_x = \delta_x.$$

3.3. Il est commode de considérer sur $M(G)'$ (et sur Δ), outre la topologie faible, la topologie définie par les semi-normes $\int |\chi|\, d|\mu|$, ($\mu \in M(G)$), que nous appellerons *topologie forte*. Pour cette topologie, l'application $\chi \to |\chi|$ est continue et le produit est continu dans Δ.

On utilisera le résultat suivant:

PROPOSITION 1. *Soit χ_a une suite généralisée qui converge faiblement vers χ dans $M(G)'$ avec $|\chi_a| \leqslant \varphi$, $\varphi \in M(G)'$.*

(a) $|\chi| \leqslant \varphi$.

(b) *Si $|\chi| = \varphi$, χ_a converge fortement vers χ.*

Démonstration de (a). Il suffit de montrer que, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$,

$$\int |\chi|\, d\mu \leqslant \int \varphi\, d\mu.$$

Ecrivons, suivant (3.1.3), $|\chi| = \overline{\chi}_0 \chi$ avec $|\chi_0| \leqslant 1$. Alors

$$\int |\chi|\, d\mu = \int \chi d(\overline{\chi}_0\mu) = \lim \int \chi_a d(\overline{\chi}_0\mu)$$

et

$$\left| \int \chi_a d(\overline{\chi}_0\mu) \right| \leqslant \int |\chi_a|\, d\mu \leqslant \int \varphi\, d\mu.$$

Démonstration de (b). On remarque, pour toute mesure $\mu \geqslant 0$,

$$\left(\int |\chi - \chi_a|\, d\mu\right)^2 \leqslant \left(\int d\mu\right) \int |\chi - \chi_a|^2 d\mu$$

et

$$\lim \int |\chi - \chi_a|^2 d\mu \leqslant \lim \left(2 \int |\chi|^2 d\mu - \int \chi_a d(\overline{\chi}\mu) - \int \overline{\chi}_a d(\chi\mu)\right) = 0.$$

Dans la suite si on ne précise pas la topologie sur Δ, il s'agit de la topologie faible, ou topologie de Gelfand.

4. Une propriété des caractère de Γ.

4.1. La démonstration des théorèmes 1 et 2 repose sur le résultat suivant, intéressant en lui-même, et qui est le coeur du sujet.

LEMME 1. *Soit $\mu \in M(G)$ et $\chi \in \Gamma$. Supposons que l'on ait $|\hat{\mu}(|\chi|^{2n}\chi)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant 1$ et $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant 1 - \varepsilon$. Alors, nécessairement*

$$\|\mu\| > |\mathrm{Log}\,\varepsilon| / \mathrm{Log}(1 + \sqrt{2}) - 1.$$

Plaçons nous en effet dans l'hypothèse du lemme 1.

Ecrivons $\chi = \chi_0|\chi|$ avec $|\chi_0| \leqslant 1$ suivant (3.1.3). Considérons la mesure $\nu = \chi_0\mu$ de norme $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$. On a

$$\hat{\nu}(|\chi|^{2n+1}) = \widehat{\chi_0\mu}(|\chi|^{2n+1}) = \hat{\mu}(|\chi|^{2n+1}\chi_0) = \hat{\mu}(|\chi|^{2n}\chi)$$

et la mesure ν a les propriétés

$$|\hat{\nu}(|\chi|^{2n+1})| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad |\hat{\nu}(|\chi|)| \geqslant 1 + \varepsilon.$$

A tout polynôme impair

$$P_{2m-1}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1} x^{2k-1}$$

tel que $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |P_{2m-1}(x)| = 1$, on fait correspondre $P_{2m-1}(|\chi|)$ élément de $M(G)'$ de module $\leqslant 1$. Ecrivons

$$\int P_{2m-1}(|\chi|)\, d\nu = a_1\hat{\nu}(|\chi|) + \sum_{k=2}^{m} a_{2k-1}\hat{\nu}(|\chi|^{2k-1}),$$

$$\|\nu\| \geqslant \left| \int P_{2m-1}(|\chi|)\, d\nu \right| \geqslant |a_1|(1-\varepsilon) - \varepsilon \sum_{k=2}^{m} |a_{2k-1}|$$

$$\geqslant |a_1| - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} |a_{2k-1}|.$$

On choisira pour P_{2m-1} le polynôme de Chebychev de degré $2m-1$ qui peut s'écrire sur $[0, 1]$

$$P_{2m-1}(x) = (1/2)\left((x + i\sqrt{1-x^2})^{2m-1} + (x - i\sqrt{1-x^2})^{2m-1}\right).$$

On sait de plus que les polynômes de Chebychev satisfont la relation de récurrence

$$P_n(x) = 2x P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) \qquad (n \geqslant 2).$$

Il est facile de montrer, à partir de là, que les P_n ont des coefficients de signes alternés et que

$$|a_1| = 2m-1,$$

$$\sum_{k=1}^{m} |a_{2k-1}| = (1/2)\big((1+\sqrt{2})^{2m-1} + (1-\sqrt{2})^{2m-1}\big)$$

$$< (1/2)(1+\sqrt{2})^{2m-1}.$$

On obtient finalement l'estimation

$$\|\mu\| > \|\nu\| > (2m-1) - (\varepsilon/2)(1+\sqrt{2})^{2m-1},$$

$$\varepsilon > 2(2m-1-\|\mu\|)(1+\sqrt{2})^{-(2m-1)}.$$

Choisissons m tel que

$$\|\mu\| + 1/2 \leqslant 2m-1 < \|\mu\| + 5/2,$$

on aura alors

$$\varepsilon > 5(1+\sqrt{2})^{-\|\mu\|-5/2} > (1+\sqrt{2})^{-\|\mu\|-1}$$

ce qui démontre le lemme 1.

4.2. Le lemme 1 a été établi en vue de la démonstration des théorèmes 1 et 2, mais n'a rien à voir avec les mesures ε-idempotentes. On peut lui donner une forme un peu plus générale si on remplace l'hypothèse $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon$ par $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant \delta > \varepsilon$. Pour une mesure de norme $\|\mu\| \leqslant 1$

$$1 \geqslant \|\mu\| > (2m-1)\delta - (\varepsilon/2)(1+\sqrt{2})^{2m-1},$$

$$\varepsilon/\delta > 2\big(2m-1-(1/\delta)\big)(1+\sqrt{2})^{-(2m-1)}$$

et en choisissant m comme précédemment

$$\varepsilon/\delta > (1+\sqrt{2})^{-1/\delta-1}.$$

On énoncera ce résultat sous la forme suivante:

Théorème 3. *Pour une mesure $\mu \in M(G)$ de norme $\|\mu\| \leqslant 1$ et un caractère $\chi \in \Gamma$, l'hypothèse*

$$|\hat{\mu}(|\chi|^{2n}\chi)| \leqslant \delta(1+\sqrt{2})^{-1/\delta-1} \qquad (n \geqslant 1)$$

implique $|\hat{\mu}(\chi)| \leqslant \delta$.

Comme conséquence de ce théorème, on peut établir le résultat suivant qui précise et généralise un théorème de [1].

Corollaire 3. *On suppose Γ non compact. Soit E une partie de Γ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma E \cap E^{-1}$ soit relativement compact. Pour une mesure $\mu \in M(G)$ de norme $\|\mu\| \leqslant 1$ et pour tout $\delta > 0$, la propriété*

$$\overline{\lim_{\substack{\gamma\to\infty\\ \gamma\notin E}}} |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \delta(1+\sqrt{2})^{-1/\delta-1}$$

implique

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \delta.$$

En effet, sinon il existerait une suite généralisée d'éléments $\gamma_\alpha \in E$, tendant vers l'infini dans Γ, telle que $|\hat{\mu}(\gamma_\alpha)| > \delta$. Soit χ une valeur d'adhérence de γ_α dans Γ. $\bar{\chi}$ est une valeur d'adhérence de $\bar{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha^{-1}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\bar{\gamma}_\alpha \notin E$ à partir d'un certain rang, d'après l'hypothèse faite sur E, et $\gamma\bar{\chi}$ étant une valeur d'adhérence de $\gamma\bar{\gamma}_\alpha$,

$$|\hat{\mu}(\gamma\bar{\chi})| \leqslant \delta(1+\sqrt{2})^{-1/\delta-1}.$$

Cette propriété reste vraie à la limite; pour tout $\varphi \in \Gamma$

$$|\hat{\mu}(\varphi\bar{\chi})| \leqslant \delta(1+\sqrt{2})^{-1/\delta-1}.$$

En particulier si $\varphi = \chi^{n+1}\bar{\chi}^{(n-1)}$, $(n \geqslant 1)$,

$$|\hat{\mu}(|\chi|^{2n}\chi)| \leqslant \delta(1+\sqrt{2})^{-1/\delta-1}$$

ce qui fournit une contradiction d'après le th. 3.

4.3. Remarques. Le résultat de [1] est obtenu en prenant $\Gamma = \boldsymbol{R}$ et $E = \boldsymbol{R}^+$. En utilisant la terminologie de [7], [3], on dira que l'ensemble E du corollaire 3 est un ensemble de continuité. On entend par là, qu'il existe une fonction $\varphi(\delta)$ telle que

$$\overline{\lim_{\substack{\gamma\to\infty\\ \gamma\notin E}}} |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varphi(\delta)$$

implique

$$\overline{\lim_{\gamma\to\infty}} |\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \delta$$

pour une mesure de norme $\leqslant 1$. Bien évidemment l'hypothèse faite sur E dans le corollaire 3 n'est pas nécessaire pour avoir un ensemble de continuité. En fait, on peut caractériser les ensembles de continuité [3].

5. Démonstration du théorème 2.

5.1. Le théorème 2 sera établi à partir du lemme 1 en utilisant une méthode inspirée de Glicksberg [2] (cf. [4], [11]).

Soit μ une mesure ε-quasi-idempotente non triviale satisfaisant la condition (2.1.2). Pour tout $\chi \in \Gamma$, on a $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon$ ou $|\hat{\mu}(\chi)| \leqslant \varepsilon$. Désignons par Λ l'ensemble (non vide) des $\chi \in \Gamma$ tels que $|\hat{\mu}(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon$. Λ et $\Gamma \setminus \Lambda$ sont compacts.

Λ possède un élément de module minimal. En effet si χ_a est une famille d'éléments de Λ telle que $|\chi_a|$ soit totalement ordonnée, il existe $\chi \in \Lambda$, valeur d'adhérence de χ_a, telle que $|\chi| \leqslant |\chi_a|$ pour tout a, d'après la prop. 1 (a). On conclut par l'axiome de Zorn. Soit donc $\chi_0 \in \Lambda$ tel que $|\chi_0|$ soit minimal. Montrons que $|\chi_0|^2 = |\chi_0|$. En effet, dans le cas contraire, on aurait $|\chi_0|^2 < |\chi_0|$ et plus généralement

$$\big||\chi_0|^{2n}\chi_0\big| < |\chi_0| \qquad (n \geqslant 1)$$

donc

$$|\hat{\mu}(|\chi_0|^{2n}\chi_0)| \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant 1)$$

ce qui fournit une contradiction, d'après le lemme 1.

Ecrivons $h = |\chi_0| = |\chi_0|^2$. On remarquera en particulier que h est un élément de Γ. On considère le groupe

$$\Gamma_h = \{\chi \mid \chi \in \Gamma;\ |\chi| = h\}.$$

Le produit est continu pour la topologie forte (3.3) qui coïncide sur Γ_h avec la topologie faible d'après la prop. 1 (b). Γ_h est donc un groupe topologique. De plus l'ensemble des $\chi \in \Gamma$ tels que $|\chi| \leqslant h$ est un compact (prop. 1 (a)) dans lequel Γ_h est ouvert: car si on avait $\chi = \lim \chi_a$ avec $|\chi| = h$ et $|\chi_a| < h$, χ_a convergerait fortement vers χ (prop. 1 (b)). On en déduirait en particulier que $|\chi_a|^2$ tend vers $|\chi|^2 = h$ (3.3), ce qui est impossible puisque $|\chi_a|^2 < h$, donc $|\chi_a|^2 \in \Gamma \setminus \Lambda$, tandis que $h \in \Lambda$. En conclusion Γ_h est un groupe localement compact.

Tout caractère $\chi \in \Gamma_h$ s'écrit $\chi = \chi_0 h$ (3.1.3), ainsi $\chi = h\chi$ et $h\Gamma$ est dense dans Γ_h. La dualité (G, Γ) est définie par le couplage $\hat{\delta}_x(\gamma)$, $(x \in G,\ \gamma \in \Gamma)$. On vérifie

$$\hat{\delta}_x(h\gamma) = \widehat{h\delta_x}(\gamma) = \hat{\delta}_x(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma) \tag{5.1.1}$$

d'après (3.2.4). L'application $\gamma \to h\gamma$ est un homomorphisme injectif continu, d'image dense, de Γ dans Γ_h. G s'identifie algébriquement avec le dual de Γ_h par le couplage $\hat{\delta}_x(\chi)$, $(x \in G,\ \chi \in \Gamma_h)$. La topologie τ de dual, ainsi définie, est plus fine que la topologie initiale.

Γ_h étant identifié au dual de G_τ, la transformée de Fourier d'une mesure $\nu \in M(G_\tau)$ dans la dualité (G_τ, Γ_h) est définie par

$$\hat{\hat{\nu}}(\chi) = \int \hat{\delta}_x(\chi)\, d\nu(x) \qquad (\chi \in \Gamma_h).$$

En particulier, pour tout $\gamma \in \Gamma$, d'après (5.1.1),

$$\hat{\hat{\nu}}(h\gamma) = \int \hat{\delta}_x(\gamma)\, d\nu(x) = \hat{\nu}(\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

Tout caractère $\chi \in \Gamma_h$ est limite d'une suite généralisée γ_a d'éléments de Γ. On a aussi $\chi = h\chi = \lim h\gamma_a$ et à la limite,

$$\hat{\hat{\nu}}(\chi) = \hat{\nu}(\chi) \qquad (\chi \in \Gamma_h). \tag{5.1.2}$$

$\hat{\hat{\nu}}$ coïncide avec la transformée de Gelfand de ν, comme élément de $M(G)$, restreinte à Γ_h. On en déduit

$$\nu = h\nu \qquad (\nu \in M(G_\tau)). \tag{5.1.3}$$

En effet $h\nu$ est aussi dans $M(G_\tau)$, (3.1.1), et

$$\widehat{h\nu}(\chi) = \hat{\nu}(h\chi) = \hat{\nu}(\chi) \qquad (\chi \in \Gamma_h).$$

Partant d'une mesure quelconque $\mu \in M(G)$, montrons maintenant

$$h\mu \in M(G_\tau). \tag{5.1.4}$$

Il suffit de vérifier que $\widehat{h\mu}(\gamma)$ est continue sur Γ pour la topologie induite par Γ_h lorsqu'on identifie Γ à $h\Gamma$ (cf. [9]). Or ceci résulte simplement de l'égalité

$$\widehat{h\mu}(\gamma) = \widehat{h\mu}(h\gamma).$$

Ecrivons alors

$$\mu = \mu_\tau + \nu$$

avec $\mu_\tau \in M(G_\tau)$ et $\nu \perp M(G_\tau)$; d'après (5.1.3) et (5.1.4),

$$h\mu = \mu_\tau + h\nu$$

avec $h\nu \in M(G_\tau)$. Mais comme $h\nu \ll \nu$ (3.1.1), $h\nu = 0$ et

$$h\mu = \mu_\tau. \tag{5.1.5}$$

Appliquons les résultats précédents à la mesure μ ε-quasi-idempotente non triviale dont nous sommes partis. Vérifions que $\mu_\tau \neq 0$. Plus précisément, pour $\chi \in \Gamma_h$,

$$\hat{\mu}_\tau(\chi) = \widehat{h\mu}(\chi) = \hat{\mu}(h\chi) = \hat{\mu}(\chi)$$

et l'ensemble des $\chi \in \Gamma_h$, où $|\hat{\mu}_\tau(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon$ n'est autre que $\Lambda \cap \Gamma_h \neq \emptyset$. On peut écrire

$$\Lambda \cap \Gamma_h = \Lambda \cap \{\chi \mid \chi \in \Gamma;\ |\chi| \leqslant h\}$$

ce qui montre que $\Lambda \cap \Gamma_h$ est un compact de Γ_h. Il existe donc une mesure idempotente $\eta \in L^1(G_\tau)$ telle que $\hat{\eta}(\chi) = 1$ si et seulement si

$$|\hat{\mu}_\tau(\chi)| \geqslant 1-\varepsilon \qquad (\chi \in \Gamma_h).$$

En particulier, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\hat{\eta}(\gamma) = \widehat{h\eta}(\gamma) = \hat{\eta}(h\gamma) \sim \hat{\mu}_\tau(h\gamma) = \widehat{h\mu}(\gamma) = \hat{\mu}_\tau(\gamma).$$

Remarques.

5.2. La topologie τ qui s'introduit en 5.1 peut être définie comme on l'a expliqué en 2.3 (si μ est non triviale). Il suffit de vérifier que G_τ contient un sous-groupe compact ouvert. Or ceci est une conséquence de l'existence d'une mesure idempotente non nulle $\eta \in L^1(G_\tau)$. En effet le groupe H support de η, qui est compact, a pour orthogonal le stabilisateur de $\hat{\eta}$ qui est un sous-groupe compact de $\hat{G}_\tau$; H est donc ouvert dans G_τ.

5.3. Dans le cas où μ est une mesure ε-idempotente, ou plus généralement si $d(\hat{\mu}(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant \varepsilon$, la conclusion du th. 2 peut être renforcée. En effet

$$\hat{\mu}_\tau(\gamma) = \widehat{h\mu}(\gamma) = \hat{\mu}(h\gamma) \qquad (\gamma \in \Gamma)$$

ce qui montre que $\hat{\mu}_\tau(\Gamma) \subset \hat{\mu}(\Gamma) = \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$. Ainsi la mesure μ_τ est une mesure qui a la même propriété que μ, et qui est décomposable.

6. Démonstration du théorème 1 (a).

6.1. Dans le cas où μ est une mesure ε-idempotente, ou plus généralement si $d(\hat{\mu}(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant \varepsilon$, il résulte du théorème 2 et de la remarque 5.3, qu'on peut écrire

$$\mu = \mu_1 + \mu_1'$$

avec $d(\hat{\mu}_1(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant \varepsilon$, μ_1 décomposable, μ_1' étrangère à μ_1 et $d(\hat{\mu}_1'(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant 2\varepsilon$. De plus, si μ n'est pas triviale, μ_1 non plus et

$$\|\mu_1'\| = \|\mu\| - \|\mu_1\| \leqslant \|\mu\| - (1-\varepsilon).$$

Supposons que l'on puisse écrire

$$\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_{n-1} + \mu_{n-1}' \tag{6.1.1}$$

avec $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_{n-1}'$, deux à deux étrangères, $d(\hat{\mu}_j(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant 2^{j-1}\varepsilon$ et μ_j décomposable pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$, et $d(\hat{\mu}_{n-1}'(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant 2^{n-1}\varepsilon$. Alors on peut appliquer le théorème 2 à μ_{n-1}' à condition d'avoir

$$2^{n-1}\varepsilon < 1/2, \tag{6.1.2}$$

$$\|\mu_{n-1}'\| \leqslant |\mathrm{Log}\, 2^{n-1}\varepsilon| / \mathrm{Log}(1+\sqrt{2}) - 1. \tag{6.1.3}$$

Dans ce cas μ_{n-1}' s'écrit

$$\mu_{n-1}' = \mu_n + \mu_n'$$

avec μ_n telle que $d(\hat{\mu}_n(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant 2^{n-1}\varepsilon$ et décomposable, μ_n' étrangère à μ_n et telle que $d(\hat{\mu}_n'(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant 2^n\varepsilon$. On peut donc poursuivre la récurrence tant que les conditions (6.1.2) et (6.1.3) sont vérifiées.

On remarque de plus que, si $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont non triviales,

$$\|\mu_n'\| = \|\mu\| - \sum_{j=1}^{n} \|\mu_j\|,$$

$$\|\mu_n'\| \leqslant \|\mu\| - \sum_{j=1}^{n} (1 - 2^{j-1}\varepsilon) = \|\mu\| - n + (2^n - 1)\varepsilon,$$

$$\|\mu_n'\| < \|\mu\| - n + 1 - \varepsilon. \tag{6.1.4}$$

Donc, nécessairement

$$n - 1 < \|\mu\| - \varepsilon.$$

Soit N_0 l'entier défini par

$$N_0 - 2 < \|\mu\| - \varepsilon \leqslant N_0 - 1.$$

Pour un entier $N \leqslant N_0$, on aura certainement μ_N triviale, tandis que $\mu_1 \ldots \mu_{N-1}$ sont non triviales. On en déduit que μ_{N-1}' est elle-même triviale. Dans ce cas, l'écriture (6.1.1) pour $n = N$ prouve que μ se décompose:

$$\mu = \eta + \nu$$

avec $\hat{\eta}(\gamma)$ à valeurs entières ($\gamma \in \Gamma$), et, d'après (6.1.2),

$$|\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} 2^{j-1}\varepsilon = 2^N\varepsilon - \varepsilon < 1 - \varepsilon,$$

ce qui implique aussitôt que $|\hat{\nu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ puisque $d(\hat{\mu}(\Gamma), \mathbf{Z}) \leqslant \varepsilon$. Donc μ est décomposable.

Pour terminer la démonstration du théorème 1 (a), il suffit de vérifier que l'on peut effectivement conduire la récurrence jusqu'au rang N, c'est à dire que les conditions (6.1.2) et (6.1.3) sont vérifiées jusqu'au rang N.

Pour la condition (6.1.2), ce sera le cas si

$$N < |\mathrm{Log}\,\varepsilon| / \mathrm{Log}\, 2$$

et a fortiori si

$$\|\mu\| \leqslant |\mathrm{Log}\,\varepsilon| / \mathrm{Log}\, 2 - 2$$

ce qui est une conséquence évidente de (1.2.1).

Considérons la condition (6.1.3) pour $n \leqslant N$. Puisque $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ sont supposées non triviales, d'après (6.1.4),

$$\|\mu'_{n-1}\| < \|\mu\| - n + 2 - \varepsilon$$

et il suffit de vérifier qu'on a toujours

$$\|\mu\| - n + 2 - \varepsilon < |\mathrm{Log}\,\varepsilon|/\mathrm{Log}(1+\sqrt{2}) - (n-1)\big(\mathrm{Log}\,2/\mathrm{Log}(1+\sqrt{2})\big) - 1$$

ce qui est une conséquence de (1.2.1), comme on s'en assure aisément.

7. Mesures ε-idempotentes non décomposables.

7.1. Les mesures ε-idempotentes non décomposables que nous allons construire sont des moyennes de produits de Riesz, ou encore des produits de Riesz intégraux au sens de [11].

Supposons G compact infini. Rappelons qu'une suite $(\theta_j)_{j\geqslant 1}$ d'éléments distincts et $\neq 1$ de Γ, est dite *dissociée* si aucune relation

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant n} \theta_j^{\varepsilon_j} = 1 \qquad (\varepsilon_j = 0, \pm 1, \pm 2, 1 \leqslant j \leqslant n, n \geqslant 1)$$

n'est vérifiée, sauf si $\theta_j^{\varepsilon_j} = 1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. On sait alors (cf. [9], [11]) que, pour tout s, $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, la suite de mesures

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant n} \big(1 + s(\theta_j + \bar{\theta}_j)\big)\cdot m \qquad (n \geqslant 1)$$

converge vaguement vers une mesure positive de norme 1 sur G, appelée produit de Riesz et noté usuellement

$$\prod_{j=1}^{\infty} \big(1 + s(\theta_j + \bar{\theta}_j)\big).$$

Il existe toujours une suite dissociée dans Γ. Nous ferons la construction dans le cas où il existe une telle suite sans élément d'ordre 2. (Sinon on prendra une suite dont tous les éléments sont d'ordre 2 et l'écriture est encore plus simple comme on l'indique en (7.2).) La suite $\theta'_j = (\theta_j, 1)$ est alors dissociée dans $\Gamma \times \boldsymbol{Z}$. Pour tout s, $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, on considère le produit de Riesz $\nu_s \in M(G \times \boldsymbol{T})$

$$\nu_s = \prod_{j=1}^{\infty} \big(1 + s(\theta'_j + \bar{\theta}'_j)\big)$$

tel que $\hat{\nu}_s\big((\gamma, n)\big) = 0$ sauf si γ et n sont de la forme

$$\gamma = \prod_{1\leqslant j\leqslant m} \theta_j^{\varepsilon_j} \qquad (\varepsilon_j = 0, \pm 1, 1 \leqslant j \leqslant m, m \geqslant 1),$$

$$n = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j$$

auquel cas

$$\hat{\nu}_s\big((\gamma, n)\big) = s^{\sum_{j=1}^{m} |\varepsilon_j|}.$$

On désigne par μ_s la mesure sur G telle que

$$\hat{\mu}_s(\gamma) = \hat{\nu}_s\big((\gamma, 1)\big) \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

On remarque que $\hat{\mu}_s(\gamma) = 0$ sauf si γ est de la forme

$$\gamma = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \theta_j^{\varepsilon_j} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j = 1. \tag{7.1.1}$$

En particulier $\hat{\mu}_s(1) = 0$ et $\hat{\mu}_s(\gamma) = 0$ si $\sum_{j=1}^{m} |\varepsilon_j|$ est pair. De plus

$$\|\mu_s\|_{M(G)} \leqslant \|\nu_s\|_{M(G\times \boldsymbol{T})} = 1.$$

Soit σ une mesure bornée sur $[0, 1/2]$. On considère maintenant la mesure $\mu \in M(G)$ telle que

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int \hat{\mu}_s(\gamma)\, d\sigma(s) \qquad (\gamma \in \Gamma).$$

On vérifie aisément que la formule précédente définit bien une transformée de Fourier de mesure. En effet $\hat{\mu}$ est continue sur Γ et pour tout polynôme trigonométrique $\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_j \gamma_j$,

$$\Big|\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_j \hat{\mu}(\gamma_j)\Big| \leqslant \Big\|\sum_{1\leqslant j\leqslant m} c_j \gamma_j\Big\|_\infty \int d\,|\sigma(s)|$$

ce qui montre en outre que

$$\|\mu\| \leqslant \int d\,|\sigma(s)|.$$

On vérifie aussi que $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ sauf si γ est de la forme (7.1.1) auquel cas

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int s^{\sum_{j=1}^{m} |\varepsilon_j|}\, d\sigma(s).$$

On utilise maintenant le lemme suivant.

Lemme 3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une mesure σ sur $[0, 1/2]$ telle que*

(a) $\int s\, d\sigma(s) = 1$,

(b) $\left|\int s^{2k+1} d\sigma(s)\right| \leqslant \varepsilon$ $(k \geqslant 1)$,

(c) $\int d\,|\sigma(s)| < 2(1/2 + \mathrm{Log}\,2 - \alpha)^{-1} |\mathrm{Log}\,\varepsilon| + 2(1 - \mathrm{Log}\,\alpha)$ *pour tout* α, $0 < \alpha \leqslant \mathrm{Log}\,2 - 1/2$.

En choisissant σ comme dans le lemme 3 avec $\alpha = \operatorname{Log} 2 - 1/2$ la mesure μ correspondante sera ε-idempotente car

$$\hat{\mu}(\theta_j) = 1 \qquad (j \geqslant 1),$$
$$|\hat{\mu}(\gamma)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{sinon}$$

et de norme

$$\|\mu\| \leqslant 2\,|\operatorname{Log}\varepsilon| + 6.$$

Pour avoir le théorème 1 (b) il suffit de vérifier que μ n'est pas décomposable. Si c'était le cas, il existerait une mesure idempotente η telle que

$$\hat{\eta}(\theta_j) = 1 \qquad (j \geqslant 1),$$
$$\hat{\eta}(\gamma) = 0 \qquad \text{sinon},$$

ce qui est impossible puisque (θ_j) est une suite dissociée. Pour s'en convaincre, il suffit de savoir qu'un ensemble dissocié ne peut pas contenir une classe modulo un sous-groupe infini de Γ.

7.2. Dans le cas où $(\theta_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite dissociée ayant tous ses éléments d'ordre 2, on définira μ_s par

$$\mu_s = (1/2)\Big(\prod_{j=1}^{\infty}(1+s\theta_j) - \prod_{j=1}^{\infty}(1-s\theta_j)\Big) \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

et la mesure μ comme précédemment. Ici $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ sauf si

$$\gamma = \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_{2k-1}} \qquad (k \geqslant 1)$$

auquel cas

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int s^{2k-1}\, d\sigma(s).$$

La fin de la démonstration est sans changement. Remarquons cependant qu'on peut choisir la mesure σ à support dans $[0,1]$ ce qui améliore un peu le résultat final (cf. remarque 7.4).

7.3. Le lemme 3 est indépendant du reste. Il relève de la théorie de l'approximation la plus classique. Mais comme nous n'avons pas trouvé de démonstration dans les livres, nous en donnons ici une démonstration. On peut le faire dériver du résultat suivant.

LEMME 4. *Soit un entier $m > 1$. Il existe une mesure σ sur $[0,1]$, telle que*

(a) $\int s\, d\sigma(s) = 1$,

(b) $\int s^{2k-1}\, d\sigma(s) = 0 \ (2 \leqslant k \leqslant m)$,

(c) $\int d|\sigma(s)| = 2m-1$,

(d) $\left|\int s^{2k+1}\, d\sigma(s)\right| < 2(2m-1)\exp\big(-(2m-1)^2/(2k-1)\big) \ (k \geqslant m)$.

Les conditions (a), (b), (c) expriment que la distance uniforme sur $[0,1]$ de la fonction s au sous espace engendré par $(s^{2k-1})_{2\leqslant k\leqslant m}$ est $\geqslant 1/(2m-1)$. Elle est en fait exactement égale à $1/(2m-1)$. En effet, il résulte de la théorie de l'approximation de Chebychev (cf. [5]) que le polynôme en $s^3, \ldots, s^{2m-1}$ de meilleure approximation de s sur $[0,1]$ n'est autre que

$$s + \big((-1)^m/(2m-1)\big)P_{2m-1}(s)$$

où P_{2m-1} désigne le polynôme de Chebychev d'ordre $2m-1$.

D'autre part, on peut donner une estimation de $\int s^{2k+1}\, d\sigma(s)$ pour $k \geqslant m$, à partir de l'identité.

$$s^{2k-1} = (1/2^{2k-2})\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1}^{j} P_{2(k-j)-1}(s).$$

Ecrivons:

$$\int s^{2k+1}\, d\sigma(s) = (1/2^{2k-2})\sum_{j=0}^{k-1} C_{2k-1}^{j}\int s^2 P_{2(k-j)-1}(s)\, d\sigma(s),$$

$$\left|\int s^{2k+1}\, d\sigma(s)\right| \leqslant \big((2m-1)/2^{2k-2}\big)\sum_{j=0}^{k-m} C_{2k-1}^{j}.$$

On obtient (d) en utilisant la majoration suivante:

LEMME 5.

$$(1/2^{2k-1})\sum_{j=0}^{k-m} C_{2k-1}^{j} \leqslant \exp\big(-(2m-1)^2/2(2k-1)\big).$$

Pour la commodité du lecteur, nous donnerons du lemme 5 une démonstration probabiliste simple. Soient $X_1, \ldots, X_{2k-1}$ des variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec probabilité $1/2$. Tout revient à calculer la probabilité pour que $\sum_{j=1}^{2k-1} X_j \geqslant 2m-1$. On peut majorer facilement cette probabilité en écrivant

$$\exp\big((2m-1)^2/(2k-1)\big)P\Big(\sum_{j=1}^{2k-1} X_j \geqslant 2m-1\Big) \leqslant E\Big(\exp\Big(\big((2m-1)/(2k-1)\big)\sum_{j=1}^{2k-1} X_j\Big)\Big)$$

et en calculant

$$E\Big(\exp\Big(\big((2m-1)/(2k-1)\big)\sum_{j=1}^{2k-1} X_j\Big)\Big) = \big(ch\,\big((2m-1)/(2k-1)\big)\big)^{2k-1} \leqslant \exp(1/2)\big((2m-1)^2/(2k-1)\big).$$

Démonstration du lemme 3. Considérons la mesure $\sigma'(s) = 2\sigma(s/2)$. Elle vérifie encore les propriétés (a) et (b) du lemme 4. De plus

$$\int d|\sigma'| = 2(2m-1);$$

pour tout $k \geqslant m$,

$$\left|\int s^{2k+1} d\sigma'(s)\right| \leqslant 2^{-(2k-1)}\cdot(2m-1)\cdot\exp\left(-(1/2)\left((2m-1)^2/(2k-1)\right)\right)$$

et le maximum du second membre étant atteint pour $k = m$,

$$\left|\int s^{2k+1} d\sigma'(x)\right| \leqslant (2m-1)e^{-(1/2+\mathrm{Log}\,2)(2m-1)} \leqslant (1/\alpha e)e^{-(1/2+\mathrm{Log}\,2-\alpha)(2m-1)}$$

quel que soit α, $0 < \alpha \geqslant \frac{1}{2}+\mathrm{Log}\,2$.

Etant donné ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, soit m le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que

$$|\mathrm{Log}\,\varepsilon| < (1/2+\mathrm{Log}\,2-\alpha)(2m-1)+\mathrm{Log}\,\alpha+1.$$

On vérifie alors, pour $\alpha \leqslant \mathrm{Log}\,2-1/2$,

$$2(2m-1) \leqslant 2(1/2+\mathrm{Log}\,2-\alpha)^{-1}|\mathrm{Log}\,\varepsilon| - 2(1+\mathrm{Log}\,\alpha)+4$$

ce qui établit (c) et termine la démonstration.

7.4. Remarques. On peut évidemment renforcer la condition (1.2.2) du th. 1 (b). Tout d'abord en utilisant toute la force du lemme 3, on voit que, pour toute constante $C > 2(1/2+\mathrm{Log}\,2)^{-1}$, et pour ε assez petit, on peut construire une mesure μ ε-idempotente non décomposable de norme $\|\mu\| \leqslant C|\mathrm{Log}\,\varepsilon|$. Dans le cas où le groupe Γ contient une infinité d'éléments d'ordre 2, on peut faire la construction indiquée en 7.2 et choisir la mesure σ du lemme 3 à support dans $[0, 1]$. On vérifiera sans peine, en employant la même méthode, qu'on peut alors prendre $C = \sqrt{e}$.

D'autre part, on peut espérer améliorer le lemme 3. Mais il s'agit d'un problème de théorie de l'approximation qui sort un peu de notre sujet. Nous nous bornerons à remarquer que, si l'on désigne par $A(\varepsilon, k)$ la masse minima d'une mesure σ sur l'intervalle I satisfaisant aux conditions

$$\left|\int s\,d\sigma(s)-1\right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left|\int s^{2k+1} d\sigma(s)\right| \leqslant \varepsilon \quad (k \geqslant 1),$$

on peut aisément vérifier en relisant les calculs des paragraphes 4 et 7 que pour tout groupe G contenant un sous-groupe compact infini,

$$A(\varepsilon, [0,1])-1 \leqslant C(\varepsilon, G) \leqslant A(\varepsilon, [0, 1/2])$$

où $C(\varepsilon, G)$ est la constante introduite en 1.4. Dans le cas où Γ contient une infinité d'éléments d'ordre 2, on aura même

$$A(\varepsilon, [0,1])-1 \leqslant C(\varepsilon, G) \leqslant A(\varepsilon, [0,1]).$$

Bibliographie

[1] K. de Leeuw and Y. Katznelson, *The two sides of a Fourier–Stieltjes transform and almost idempotent measures*, Israel J. Math. (1970), 213–229.

[2] I. Glicksberg, *Fourier–Stieltjes transforms with an isolated value*, Conference on Harmonic Analysis, Maryland 1971, Lecture Notes in Math. 266, Springer-Verlag.

[3] B. Host et F. Parreau, *Ensembles de Rajchman et ensembles de continuité*, note aux C. R. Acad. Sci. Paris.

[4] —, — *Sur un problème de Glicksberg: les idéaux fermés de type fini de $M(G)$*, Ann. Inst. Fourier 38 3 (1978), 143–164.

[5] G. Lorentz, *Approximation of functions*, Holt-Rinehart and Winston.

[6] J. F. Méla, Séminaire Bourbaki, vol. 78–79, exposé n° 534.

[7] L. Pigno, *Transforms which almost vanish at infinity*, à paraître.

[8] T. Ramsey and B. Wells, *Fourier–Stieltjes transforms of strongly continuous measures*, Michigan Math. J. 24 (1977), 13–19.

[9] W. Rudin, *Fourier Analysis on groups*, Interscience Tracts 12.

[10] J. L. Taylor, *Measure algebras*, C. B. M. S. 16 (1973).

[11] Séminaire sur l'analyse harmonique des mesures, Villetaneuse 1978, à paraître.

[12] L. Pigno and B. Smith, *Almost idempotent measures on compact abelian groups* (à paraître).

CENTRE SCIENTIFIQUE ET POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-NORD
AV. J. B. CLÉMENTE, 93430 VILLETANEUSE
FRANCE

Received June 22, 1979 (1557)