STUDIA MATHEMATICA, T. LXX. (1981)

Charakterisierung der Unterräume und Quotientenräume der nuklearen stabilen Potenzreihenräume von unendlichem Typ

von

DIETMAR VOGT und MAX JOSEF WAGNER (Wuppertal)

Abstract. Complete characterizations are given of the classes of all subspaces quotient spaces, projected subspaces of a nuclear stable infinite type power series space in terms of conditions (DN), (Ω) and certain types of nuclearity.

Die vorliegende Arbeit setzt die in den Arbeiten [20] und [21] der beiden Verfasser begonnenen Untersuchungen fort. Sie gibt eine vollständige interne Charakterisierung der Unterräume, Quotientenräume, sowie projizierten Teilräume eines vorgelegten nuklearen, stabilen Potenzreihenraumes $\Lambda_\infty(\alpha)$ von unendlichem Typ. Zur Charakterisierung verwendet werden dabei die schon in [20], [21] betrachteten Eigenschaften (DN) und (Ω), sowie die in [15] von Ramanujan und Terzioğlu eingeführte $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität. Diese kann im Fall der Unterräume und projizierten Teilräume durch die in [17] von Robinson behandelte $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität (im Sinne von [6]) ersetzt werden.

Fragt man spezieller nach allen Kötheräumen, die Unterraum, Quotientenraum bzw. projizierter Teilraum eines vorgelegten stabilen Potenzreihenraumes sind, so wurden entsprechende Charakterisierungen von verschiedenen Autoren angegeben: für den Fall der Unterräume von $\Lambda_\infty(\alpha)$ von Alpseymen [1], der Unterräume von $\Lambda_1(\alpha)$ von Dubinsky [5], der projizierten Teilräume von $\Lambda_\infty(\alpha)$ von Dubinsky [3] (siehe auch [2], [12]). Eine vollständige Lösung der angesprochenen Fragestellung (sogar im nicht nuklearen Fall) ist in Wagner [21] gegeben. Die in diesen Arbeiten (sowie in [4], [7]) verwendeten Methoden sind wesentlich verschieden von den hier verwendeten. Sie beruhen auf konkreten Rechnungen mit Hilfe der definierenden Matrizen.

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Methoden sind sehr ähnlich denjenigen in [20] und [21]. Sie sind von der Existenz einer Basis völlig unabhängig. Man beachte im Vergleich zu [20] und [21] die Rolle der Ergebnisse in § 2. Diese sind auch über den Rahmen dieser Arbeit hinaus der Beachtung wert. Entsprechend allgemein ist die Formulierung gehalten.

1. Im folgenden soll $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ immer eine strikt monoton wachsende Folge positiver reeller Zahlen bedeuten, die den beiden folgenden Bedingungen genügt

$$\sup_n \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_n} < +\infty \quad \text{(Stabilität)},$$

$$\sup_n \frac{\log n}{\alpha_n} < +\infty \quad \text{(Nuklearität von } \Lambda_\infty(\alpha)).$$

Dann ist

$$\Lambda_\infty(\alpha) := \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \colon \sum_n |\xi_n| \varrho^{\alpha_n} < +\infty \text{ für alle } \varrho > 0\},$$

versehen mit den Normen

$$\|\xi\|_k := \sum_n |\xi_n| \varrho_k^{\alpha_n},$$

wo $0 < \varrho_k \nearrow +\infty$, ein (von der Wahl der ϱ_k unabhängiger) nuklearer (F)-Raum.

Ist E ein linearer Raum, sind weiter $V \subset U$ absolutkonvexe Mengen, $F \subset E$ linearer Teilraum, so sei

$$\delta(V, U; F) = \inf\{\delta\colon V \subset \delta U + F\},$$

$$\delta_n(V, U) = \inf\{\delta(V, U; F)\colon \dim F \leqslant n\}.$$

δ_n heißt n-ter (Kolomogorowscher) Durchmesser von V bzgl. U (s. [14], [19]).

Ist E absolutkonvexer linearer Raum, so soll das Wort "Nullumgebung" in Zukunft synonym sein mit "absolutkonvexe Nullumgebung" und $\mathfrak{U}$ die Menge der (absolutkonvexen) Nullumgebungen bedeuten.

Die folgende Definition stammt aus [15], wobei wir die 3 im Beweis von [15], Cor. 3.5 aufgeführte äquivalente Eigenschaft verwenden.

1.1. Definition. Ein lokalkonvexer Raum E heißt *$\Lambda_N(\alpha)$-nuklear*, falls zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ und jedem $R > 1$ ein $V \in \mathfrak{U}$ existiert mit $\lim_n R^{\alpha_n} \delta_n(V, U) = 0$.

In einer anderen Formulierung heißt das, daß $(\Lambda_\infty(\alpha))^\times \subset \Delta(E)$, wo $(\Lambda_\infty(\alpha))^\times$ den Köthedual (s. [10]) und $\Delta(E)$ die diametrale Dimension (s. [19]) bedeutet (s. [15], Cor. 3.5, Beweis).

Aus [15] übernehmen wir weiter die folgenden für uns wichtigen Ergebnisse, deren Beweis auch ohne die dort vorausgesetzte Nuklearität von $\Lambda_1(\alpha)$ richtig bleibt. Es genügt die hier vorausgesetzte Nuklearität von $\Lambda_\infty(\alpha)$.

1.2. Satz ([15], Prop. 3.2). *$\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität vererbt sich auf Unterräume, Quotientenräume und Produkte.*

1.3. Satz ([15], Cor. 2.13). *$\Lambda_\infty(\alpha)$ ist $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear.*

1.4. Satz ([15], Cor. 3.5(*)). *Sei E ein metrisierbarer, lokalkonvexer $\Lambda_N(\alpha)$-nuklearer Raum, dann ist E isomorph einem Unterraum von $(\Lambda_\infty(\alpha))^{\mathbf{N}}$.*

Aus 1.2, 1.3 erkennen wir, daß die $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität allen Unterräumen und Quotientenräumen von $\Lambda_\infty(\alpha)$ gemeinsam ist, sie ist die für den Grundraum typische Eigenschaft. Die im folgenden aufgeführten Bedingungen werden in [20] und [21] als (zusammen mit der Nuklearität) charakterisierend für die Unterräume bzw. Quotientenräume von s $(= \Lambda_\infty(\alpha)$, $\alpha_n = \log n)$ erwiesen.

Sei im folgenden E ein (F)-Raum, $\|\ \|_1 \leqslant \|\ \|_2 \leqslant \ldots$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ eine Nullumgebungsbasis.

1.5. Definition. E hat die Eigenschaft (DN), falls folgendes gilt: Es existiert eine stetige Norm $\|\ \|$, so daß es zu jedem k ein p und $C > 0$ gibt mit $\|\ \|_k^2 \leqslant C\|\ \|\ \|\ \|_{k+p}$.

1.6. Definition. E hat die Eigenschaft (Ω), falls folgendes gilt: Zu jedem p existiert ein q, so daß es zu jedem k ein n und $C > 0$ gibt mit

$$U_q \subset Cr^n U_k + \frac{1}{r} U_p$$

für alle $r > 0$.

Man erkennt sofort, daß die Bedingungen (DN) und (Ω) nicht von dem speziellen Halbnormensystem, bzw. der speziellen Nullumgebungsbasis abhängen. Das folgende Lemma ist sehr leicht zu beweisen:

1.7. Lemma. (DN) *vererbt sich auf Unterräume,* (Ω) *auf Quotientenräume.*

Aus [20], Cor. 2.4 und [21], Satz 2.5 erhalten wir

1.8. Satz. *$\Lambda_\infty(\alpha)$ hat die Eigenschaften* (DN) *und* (Ω).

Aus 1.7, 1.8 folgt insbesondere, daß die Eigenschaft (DN) allen Unterräumen, die Eigenschaft (Ω) allen Quotientenräumen eines Potenzreihenraumes von unendlichem Typ zukommt.

Damit ist die eine Richtung unserer Hauptergebnisse 3.2, 3.4, 3.5 praktisch schon bewiesen. Für die andere Richtung wird der folgende Liftingsatz benötigt. Er ergibt sich aus [21], Satz 1.4 in Verbindung mit [20], Satz 1.3:

1.9. Satz *Sei $0 \to E \to G \xrightarrow{q} F \to 0$ eine exakte Sequenz nuklearer (F)-Räume, E habe die Eigenschaft (Ω). Sei H ein nuklearer (F)-Raum*

(*) Leichte Modifikation für den metrisierbaren Fall.

mit Eigenschaft (DN) *und* $\varphi \in L(H, F)$. *Dann existiert ein* $\psi \in L(H, G)$, *so daß* $\varphi = q \circ \psi$, *d.h.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r, "q"] & F \arrow[r] & 0 \\ & & & H \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[u, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

2. Die Beweise der Charakterisierungssätze in [20] und [21] beruhen neben Liftingsätzen und dem Satz von T. Komura und Y. Komura [8] wesentlich auf der verhältnismäßig leicht zu beweisenden Tatsache, daß eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to s \to s \to s^{\mathbf{N}} \to 0$$

existiert. Der Beweis dafür (s. [20], Lemma 1.6) benutzte Hilfsmittel aus der Analysis ($\mathscr{D}[a, b] \cong s$) und Tensorprodukte. Er läßt sich hier nicht übertragen.

Im folgenden wird für allgemeinere Potenzreihenräume eine andere Konstruktion angegeben. Die Ergebnisse werden genügend weit gefaßt, um gegebenenfalls auch für entsprechende Arbeiten über Potenzreihenräume vom endlichen Typ zur Verfügung zu stehen.

Wir werden also in diesem Abschnitt auch die Räume

$$\Lambda_r(a) = \Big\{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots): \sum_n |\xi_n| \varrho^{a_n} < +\infty \text{ für alle } 0 < \varrho < r\Big\}$$

betrachten, $0 < r < +\infty$. Diese sind, versehen mit den Normen

$$\|\xi\|_k = \sum_n |\xi_n| \varrho_k^{a_n},$$

wo $0 < \varrho_k \nearrow r$ (von der Wahl der ϱ_k unabhängige) (F)-Räume, die nicht notwendig nuklear sind. Man beachte dazu die Generalvoraussetzung über a in §1.

Ist noch allgemeiner $A = (a_{n,m})_{n \in \mathbf{N}^\nu, m \in \mathbf{N}}$ eine unendliche Matrix, $0 \leqslant a_{n,m} \leqslant a_{n,m+1}$, $\sup_m a_{n,m} > 0$ für alle $n = (n_1, \ldots, n_\nu)$, m, dann setzen wir

$$\lambda(A) = \Big\{\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}^\nu}: \|\xi\|_m := \sum_n |\xi_n| a_{n,m} < +\infty \text{ für alle } m\Big\}.$$

$\lambda(A)$, versehen mit den Normen $\| \ \|_m$, ist ein (F)-Raum.

Das folgende Lemma entnehmen wir ohne Beweis aus [22], wobei wir die Formulierung an unsere Verwendung anpassen (s. auch [22a]).

2.1. Lemma ([22]; §5, Lemma 1, S. 48). *Seien* $A = (a_{n,m})_{n \in \mathbf{N}^\nu, m \in \mathbf{N}}$, $B = (b_{k,m})_{k \in \mathbf{N}^\mu, m \in \mathbf{N}}$ *Matrizen wie oben,* M_k, $k \in \mathbf{N}^\mu$, *disjunkte Teilmengen von* $\mathbf{N}^\nu$ *und* $\inf_{n \in M_k} a_{n,m} = b_{k,m}$ *für alle* m *und* k. *Dann wird durch*

$$q(\xi) := \Big(\sum_{n \in M_k} \xi_n\Big)_{k \in \mathbf{N}^\mu}$$

für $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}^\nu}$ *eine stetige lineare und surjektive Abbildung von* $\lambda(A)$ *auf* $\lambda(B)$ *gegeben.*

Wir werden nun unter Verwendung von 2.1 eine exakte Sequenz konstruieren, die uns bei geeigneter Wahl der Vorgaben und Interpretation der entstehenden Größen $\tilde{A}_k$, $\tilde{A}_K$ in den von uns gewünschten Fällen das gesuchte Resultat liefern wird.

2.2. Lemma. *Sei* $\tilde{A} = (a_{i,j,k;m})_{i,j,k \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}}$ *eine unendliche Matrix wie oben, es sei weiter* $\tilde{A}_k := (a_{1,j,k;m})_{j \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}}$, $\tilde{A}_K = (a_{i,j,k;m} + a_{i+1,j,k;m})_{i,j,k \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}}$, *und es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1) $$a_{i,j,k;k} = 1 \quad \text{für alle } i, j, k;$$

(2) $$a_{i,j,k;m} \geqslant a_{i+1,j,k;m} \quad \text{für alle } m \leqslant k,$$
$$a_{i,j,k;m} \leqslant a_{i+1,j,k;m} \quad \text{für alle } m \geqslant k;$$

(3) $$\lim_i a_{i,j,k;m} = 0 \quad \text{für alle } m < k;$$

(4) *Zu jedem* m *existiert ein* $s(m)$, *so daß*

$$\sup_{j,k} \sum_i \frac{a_{i,j,k;m}}{a_{i,j,k;s(m)}} < +\infty.$$

Dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to \lambda(\tilde{A}_K) \to \lambda(\tilde{A}) \to \prod_{k=1}^{\infty} \lambda(\tilde{A}_k) \to 0.$$

Beweis. (1) Für $x = (x_{i,j,k}) \in \lambda(\tilde{A})$ setzen wir

$$q(x) = \Big(\sum_i x_{i,j,k}\Big)_{j,k \in \mathbf{N}}.$$

Definieren wir weiter

$$b_{j,k;m} := \inf_i a_{i,j,k;m} = \begin{cases} 0 & \text{für } m < k, \\ a_{1,j,k;m} & \text{für } m \geqslant k \end{cases}$$

— letztere Gleichung gilt wegen Voraussetzung (2) und (3) — dann ist nach 2.1 q eine surjektive, stetige lineare Abbildung von $\lambda(A)$ auf $\lambda(B)$, $B = (b_{j,k;m})_{j,k \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}}$. Man wähle zum Beweis $M_{j,k} = \{(i, j, k): j, k \in \mathbf{N}\}$. Offenbar ist $\lambda(B) = \prod_k \lambda(\tilde{A}_k)$.

(2) Nach Konstruktion von q ist

$$\operatorname{Kern} q = \Big\{(x_{i,j,k}): \sum_i x_{i,j,k} = 0 \text{ für alle } j, k\Big\}.$$

Wir wollen Kern q mit $\lambda(\tilde{A}_K)$ identifizieren und setzen dazu $g_{i,j,k} := e_{i,j,k} - e_{i+1,j,k} \in \operatorname{Kern} q$, wobei die $e_{i,j,k}$ die Einheitsvektoren in $\lambda(\tilde{A})$ sind. Wir zeigen zunächst, daß für $x = (x_{i,j,k}) \in \operatorname{Kern} q$ und $\eta_{i,j,k} = \sum_{\nu=1}^{i} x_{\nu,j,k}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} T_n x =: \lim_{n\to+\infty} \sum_{i,j,k\leqslant n} \eta_{i,j,k} g_{i,j,k} = x.$$

Hierzu berechnen wir:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \eta_{i,j,k} g_{i,j,k} &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\nu=1}^{i} x_{\nu,j,k}\Big) e_{i,j,k} - \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\nu=1}^{i} x_{\nu,j,k}\Big) e_{i+1,j,k} \\ &= x_{1,j,k} e_{1,j,k} + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(\sum_{\nu=1}^{i+1} x_{\nu,j,k}\Big) e_{i+1,j,k} - \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\nu=1}^{i} x_{\nu,j,k}\Big) e_{i+1,j,k} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{i,j,k} e_{i,j,k} - \Big(\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu,j,k}\Big) e_{n+1,j,k}\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{i=1}^{n} \eta_{i,j,k} g_{i,j,k} \Big\|_m &= \sum_{i=1}^{n} |x_{i,j,k}|\, a_{i,j,k;m} + \Big| \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu,j,k} \Big|\, a_{n+1,j,k;m} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_{i,j,k}|\, a_{i,j,k;m} + \Big| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} x_{\nu,j,k} \Big|\, a_{n+1,j,k;m} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_{i,j,k}|\, a_{i,j,k;m} + \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |x_{\nu,j,k}|\, a_{\nu,j,k;m} & \text{für } m \geqslant k \\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} |x_{\nu,j,k}|\, a_{\nu,j,k;m} & \text{für } m < k \end{cases} \\ &\leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_{i,j,k}|\, a_{i,j,k;m}.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Summation über j, k: $\|T_n x\|_m \leqslant 2\|x\|_m$, d.h. die T_n sind gleichstetig. Wir müssen daher nur noch zeigen: $T_n x \to x$ für x aus einer totalen Menge in Kern q. Eine solche wird gebildet durch die $x \in \operatorname{Kern} q$ der Form $x = \sum_i \xi_i e_{i,j,k}$. In diesem Falle ist für $m \geqslant k$:

$$\begin{aligned}\|x - T_n x\|_m &= \sum_{i=n+2}^{\infty} |\xi_i|\, a_{i,j,k;m} + \Big| \xi_{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \Big|\, a_{n+1,j,k;m} \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|\, a_{i,j,k;m} + \Big| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \xi_\nu \Big|\, a_{n+1,j,k;m} \leqslant 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|\, a_{i,j,k;m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

(3) Wegen $\|g_{i,j,k}\|_m = a_{i,j,k;m} + a_{i+1,j,k;m}$ konvergiert für jedes $\xi = (\xi_{i,j,k}) \in \lambda(\tilde{A}_K)$ die Reihe $\iota\xi := \sum_{i,j,k} \xi_{i,j,k} g_{i,j,k}$, und die durch $\xi \to \iota\xi$ gegebene Abbildung ist stetig linear von $\lambda(\tilde{A}_K)$ nach $\lambda(\tilde{A})$.

Ist $x = \iota\xi$, dann lassen sich die $\xi_{i,j,k}$ aus den $x_{i,j,k}$ eindeutig berechnen $(\xi_{i,j,k} = \sum_{\nu=1}^{i} x_{\nu,j,k})$, also ist ι injektiv. Klar ist weiter, daß Bild $\iota \subset \operatorname{Kern} q$.

Zu zeigen bleibt: Bild $\iota \supset \operatorname{Kern} q$. Für $x \in \operatorname{Kern} q$ setzen wir daher $\eta_{i,j,k} = \sum_{\nu=1}^{i} x_{\nu,j,k}$. Wenn wir zeigen: $\eta := (\eta_{i,j,k}) \in \lambda(\tilde{A}_K)$, dann folgt aus (2) $\iota\eta = x$, d.h. $x \in$ Bild ι.

Sei also $x \in \operatorname{Kern} q$ und η in der angegebenen Weise definiert. Das folgende bleibt richtig, wenn an den durch $\boldsymbol{i}$ markierten Stellen i durch $\boldsymbol{i+1}$ ersetzt wird. Wir erhalten:

$$|\eta_{\boldsymbol{i},j,k}|\, a_{\boldsymbol{i},j,k;m} = \begin{cases} \Big| \displaystyle\sum_{\nu=i+1}^{\infty} x_{\nu,j,k} \Big|\, a_{\boldsymbol{i},j,k;m} \leqslant \displaystyle\sum_{\nu=i+1}^{\infty} |x_{\nu,j,k}|\, a_{\nu,j,k;m} & \text{für } m \geqslant k, \\ \Big| \displaystyle\sum_{\nu=1}^{i} x_{\nu,j,k} \Big|\, a_{\boldsymbol{i},j,k;m} \leqslant \displaystyle\sum_{\nu=1}^{i} |x_{\nu,j,k}|\, a_{\nu,j,k;m} & \text{für } m < k \end{cases}$$

und hieraus durch Summation über j, k

$$\sum_{j,k} \sup_i |\eta_{i,j,k}|\, a_{\boldsymbol{i},j,k;m} \leqslant \|x\|_m.$$

Unter Verwendung von Voraussetzung (4) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} |\eta_{i,j,k}|\, a_{\boldsymbol{i},j,k;m} &= \sum_{j,k} \Big(\sum_i |\eta_{i,j,k}|\, a_{\boldsymbol{i},j,k;s(m)} \frac{a_{\boldsymbol{i},j,k;m}}{a_{\boldsymbol{i},j,k;s(m)}} \Big) \\ &\leqslant \sum_{j,k} \big(\sup_i |\eta_{i,j,k}|\, a_{\boldsymbol{i},j,k;s(m)}\big) \sum_i \frac{a_{\boldsymbol{i},j,k;m}}{a_{\boldsymbol{i},j,k;s(m)}} \leqslant C\, \|x\|_{s(m)}\end{aligned}$$

wo

$$C = \sup_{j,k} \sum_i \frac{a_{\boldsymbol{i},j,k;m}}{a_{\boldsymbol{i},j,k;s(m)}}.$$

Addieren wir die durch Einsetzen von $\boldsymbol{i} = i$ und $\boldsymbol{i} = i+1$ entstehenden Ungleichungen, so erhalten wir

$$\sum_{i,j,k} |\eta_{i,j,k}| (a_{i,j,k;m} + a_{i+1,j,k;m}) \leqslant 2C\, \|x\|_{s(m)}, \quad \text{d.h. } \eta \in \lambda(\tilde{A}_K).$$

2.3. Satz. *Sei $A = (a_{n,m})_{n,m\in N}$ eine unendliche Matrix, die die folgenden Bedingungen* (a)–(d), *sowie* (e_1) *oder* (e_2) *erfüllt:*

(a) $a_{n,1} > 0$ *für alle* n;

(b) $$\frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}} \geq \frac{a_{n+1,m}}{a_{n+1,m+1}} \quad \textit{für alle } n, m;$$

(c) $$\lim_n \frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}} = 0 \quad \textit{für alle } m;$$

(d) *Zu jedem* m *existiert* $s(m)$, *so daß*

$$\sum_\nu \frac{a_{2^\nu m}}{a_{2^\nu, s(m)}} < +\infty;$$

(e$_1$) $a_{n,m} \leq a_{n+1,m}$ *für alle* n, m *und zu jedem* m *existiert* $r(m)$, $C_m > 0$, *so daß* $a_{2n,m} \leq C_m\, a_{n,r(m)}$ *für alle* n;

(e$_2$) $a_{n,m} \geq a_{n+1,m}$ *für alle* n, m *und zu jedem* m *existiert* $r(m)$, $C_m > 0$, *so daß* $a_{n,m} \leq C_m a_{2n,r(m)}$ *für alle* n.

Dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to \lambda(A) \to \lambda(A) \to \lambda(A)^N \to 0.$$

Beweis. Wir setzen $\tilde{A} = (a_{i,j,k;m})_{i,j,k \in N;\, m \in N}$, wo

$$a_{i,j,k;m} = \frac{a_{n(i,j,k);m}}{a_{n(i,j,k);k}}$$

und

$$n(i,j,k) = 2^{i-1} + \left(2^{k-1} + (j-1)2^k - 1\right)2^i$$

ür $i, j, k \in N$.

Da $(i,j,k) \mapsto n(i,j,k)$ eine Bijektion von N^3 auf N ist, wird durch $\xi = (\xi_n) \mapsto (\xi_{n(i,j,k)} a_{n(i,j,k),k})_{i,j,k \in N}$ ein Isomorphismus $\lambda(A) \cong \lambda(\tilde{A})$ hergestellt.

Da weiter $j \leq n(1,j,k) \leq 2^{k+1}j$, erhalten wir durch wiederholte Anwendung von (e$_1$) mit geeignetem $R(m) > m$ und $\tilde{C}_m$:

$$a_{j,m} \leq a_{n(1,j,k),m} \leq a_{2^{k+1}j,m} \leq \tilde{C}_m a_{j,R(m)}$$

und analog aus (e$_2$):

$$a_{j,m} \leq \tilde{C}_m a_{2^{k+1}j,R(m)} \leq \tilde{C}_m a_{n(1,j,k),R(m)} \leq \tilde{C}_m a_{j,R(m)}.$$

In beiden Fällen stellt also $\xi = (\xi_n)_n \mapsto (\xi_j a_{n(1,j,k),k})_j$ einen Isomorphismus $\lambda(A) \cong \lambda(\tilde{A}_k)$ her für jedes k.

Zur Identifikation von $\lambda(\tilde{A}_K)$ benutzen wir im Falle (e$_1$) die folgende Ungleichung

$$\frac{a_{n,m}}{a_{n,k}} \leq \frac{a_{n,m}}{a_{n,k}} + \frac{a_{2n,m}}{a_{2n,k}} \leq 2\frac{a_{2n,m}}{a_{n,k}} \leq 2C_m \frac{a_{n,r(m)}}{a_{n,k}}$$

und im Falle (e$_2$)

$$C_m^{-1}\frac{a_{n,m}}{a_{2n,k}} \leq \frac{a_{n,r(m)}}{a_{n,k}} + \frac{a_{2n,r(m)}}{a_{2n,k}} \leq 2\frac{a_{n,r(m)}}{a_{2n,k}}.$$

Setzen wir $n = n(i,j,k)$ und beachten, daß $2n = n(i+1,j,k)$, so erhalten wir im ersten Falle

$$\frac{a_{n,m}}{a_{n,k}} \leq a_{i,j,k;m} + a_{i+1,j,k;m} \leq 2C_m \frac{a_{n;r(m)}}{a_{n,k}}.$$

Durch $(\xi_n) \to (\xi_{n(i,j,k)} a_{n(i,j,k),k})$ wird also ein Isomorphismus $\lambda(A) = \lambda(\tilde{A}_K)$ hergestellt. Analog ist im zweiten Fall

$$C_m^{-1}\frac{a_{n,m}}{a_{2n,k}} \leq a_{i,j,k;r(m)} + a_{i+1,j,k;r(m)} \leq 2\frac{a_{n,r(m)}}{a_{2n,k}},$$

und $(\xi_n) \mapsto (\xi_{n(i,j,k)} a_{n(i+1,j,k),k})$ stellt einen Isomorphismus $\lambda(A) \cong \lambda(\tilde{A}_K)$ her.

In beiden Fällen erhalten wir also eine exakte Sequenz

$$0 \to \lambda(A) \to \lambda(A) \to \lambda(A)^N \to 0,$$

falls wir für die $a_{i,j,k;m}$ die Voraussetzungen (1)–(4) in 2.2 verifizieren. Diese folgen jedoch sofort aus (a)–(d), wobei zu (4) zu beachten ist, daß wegen $2^i \leq n(i,j,k)$ und (b)

$$\sum_i \frac{a_{i,j,k;m}}{a_{i,j,k;s(m)}} \leq \sum_\nu \frac{a_{2^\nu,m}}{a_{2^\nu,s(m)}} < +\infty$$

für alle j, k.

Wir wenden nun 2.3 auf Potenzreihenräume an und erhalten unter unseren Generalvoraussetzungen an α:

2.4. SATZ. *Für jedes* $0 < r \leq +\infty$ *existiert eine exakte Sequenz*

$$0 \to \Lambda_r(\alpha) \to \Lambda_r(\alpha) \to \Lambda_r(\alpha)^N \to 0.$$

Beweis. Für $a_{n,m} = \varrho_m^{\alpha_n}$, $\varrho_m \nearrow r$ verifiziert man leicht (a), (b), (c) in 2.3. Auf Grund unserer Voraussetzung an α existiert ein $q > 0$, so daß $\log n \leq q\alpha_n$ für alle n. Daher ist für jedes t mit $0 < t < 1$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} t^{\alpha_{2^\nu}} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} t^{\frac{\log 2}{q}\cdot\nu} < +\infty.$$

Hieraus leitet man leicht (d) ab.

Da α als stabil vorausgesetzt war, existiert ein $p > 0$, so daß $\alpha_{2n} \leq p\alpha_n$ für alle n.

Für $r = +\infty$ wählen wir z.B. $\varrho_m = 2^m$ und erhalten (e_1) mit $C_m = 1$, $r(m) = pm$. Für $r = 1$ wählen wir z.B. $\varrho_m = 2^{-1/m}$ und erhalten (e_2) mit $C_m = 1$, $r(m) = pm$. Für beliebige $0 < r < +\infty$ folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $\Lambda_r(\alpha) \cong \Lambda_1(\alpha)$.

3. Wir haben nun die Mittel bereitgestellt um die angestrebten Charakterisierungssätze zu beweisen. α soll wieder eine Exponentenfolge sein, die den zu Beginn des §1 genannten Voraussetzungen genügt, insbesondere ist also α stabil und $\Lambda_\infty(\alpha)$ nuklear.

Wir beginnen mit einem Lemma, in das der 1.4 zitierte Universalitätssatz und 2.4 eingehen.

3.1. Lemma. *Ist E ein $\Lambda_N(\alpha)$-nuklearer (F)-Raum, so existiert ein abgeschlossener Unterraum $\tilde{E} \subset \Lambda_\infty(\alpha)$, sowie eine exakte Sequenz*

$$0 \to \Lambda_\infty(\alpha) \to \tilde{E} \to E \to 0.$$

Beweis. Nach 2.4 existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to \Lambda_\infty(\alpha) \to \Lambda_\infty(\alpha) \xrightarrow{q} \Lambda_\infty(\alpha)^N \to 0.$$

Wegen 1.4. und der $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität von E können wir uns E als abgeschlossenen Unterraum nach $\Lambda_\infty(\alpha)^N$ eingebettet denken. Wir setzen dann $\tilde{E} = q^{-1}E$ und erhalten die geforderte Sequenz

$$0 \to \Lambda_\infty(\alpha) \to \tilde{E} \xrightarrow{q} E \to 0.$$

Der folgende Satz enthält die Charakterisierung der Unterräume von $\Lambda_\infty(\alpha)$.

3.2. Satz. *Ein (F)-Raum E ist genau dann isomorph einem Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$, wenn er $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaft* (DN) *besitzt.*

Beweis. Auf Grund von 1.3 und 1.2 ist jeder Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$ $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear, auf Grund von 1.8 und 1.7 besitzt er die Eigenschaft (DN).

Zu zeigen bleibt die Umkehrung. Da (z.B. wegen 1.4) die $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität von E die Nuklearität impliziert, da weiter wegen 1.8 $\Lambda_\infty(\alpha)$ die Eigenschaft (Ω) besitzt, zerfällt auf Grund von 1.9 (angewandt auf $\varphi = \mathrm{id}_E$) die nach 3.1 existierende Sequenz

$$0 \to \Lambda_\infty(\alpha) \to \tilde{E} \to E \to 0.$$

E ist also isomorph einem (projizierten) Teilraum von $\tilde{E} \subset \Lambda_\infty(\alpha)$.

Wir werden die folgende, der linearen Algebra angehörige, Bemerkung verwenden, die man etwa im Beweis von [21], Lemma 1.5 bewiesen findet.

Bemerkung. Ist das folgende ein kommutatives Diagramm linearer Räume und linearer Abbildungen, bei dem die Zeile und die

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & & F_2 \arrow[u] \arrow[ul] & \\
 & & & F_1 \arrow[u] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Spalte exakt ist dann existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to F_1 \to E_1 \oplus F_2 \to E_2 \to 0.$$

Zum Beweis der Charakterisierungssätze für die Quotienten und projizierten Teilräume von $\Lambda_\infty(\alpha)$ benutzen wir hier eine Variante des Beweises in [21].

3.3. Lemma. *Ist E ein $\Lambda_N(\alpha)$-nuklearer (F)-Raum und besitzt E die Eigenschaft* (Ω), *so existiert ein Unterraum $\tilde{E}$ von $\Lambda_\infty(\alpha)$ und eine exakte Sequenz*

$$0 \to \Lambda_\infty(\alpha) \to \Lambda_\infty(\alpha) \to E \oplus \tilde{E} \to 0.$$

Beweis. Wir wenden zweimal obige Bemerkung an. Im folgenden ersten Diagramm ist i die nach 1.4 existierende Einbettung, q die Quotientenabbildung auf $Q := \Lambda_\infty(\alpha)^N/iE$. Die Spalte rührt von 3.1 her, $\tilde{E} \subset \Lambda_\infty(\alpha)$. ψ_1 existiert nach 1.9, denn $\tilde{E}$ hat die Eigenschaft (DN) nach 3.2 und ist nuklear. E ist $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear, daher nuklear, und hat die Eigenschaft (Ω) nach Voraussetzung.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "i"] & \Lambda_\infty(\alpha)^N \arrow[r, "q"] & Q \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & & \tilde{E} \arrow[u] \arrow[ul, "\psi_1"] & \\
 & & & \Lambda_\infty(\alpha) \arrow[u] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Aus der Bemerkung resultiert die Zeile im nun folgenden zweiten Diagramm. Die Spalte existiert nach 2.4, ψ_2 auf Grund von 1.9.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & \Lambda_\infty(\alpha) \arrow[r] & E \oplus \tilde{E} \arrow[r] & \Lambda_\infty(\alpha)^N \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & & \Lambda_\infty(\alpha) \arrow[u] \arrow[ul, dashed, "\psi_2"'] & \\
 & & & \Lambda_\infty(\alpha) \arrow[u] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Die Existenz der in der Behauptung geforderten Sequenz folgt nun wieder aus der Bemerkung, wenn man beachtet, daß auf Grund der Stabilität von $\Lambda_\infty(\alpha)$ gilt $\Lambda_\infty(\alpha) \oplus \Lambda_\infty(\alpha) \cong \Lambda_\infty(\alpha)$.

Die folgenden beiden Sätze geben nun die Charakterisierung der Quotientenräume und projizierten Unterräume von $\Lambda_\infty(\alpha)$.

3.4. Satz. *Ein (F)-Raum E ist genau dann isomorph einem Quotientenraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$, wenn er $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaft (Ω) hat.*

Beweis. Daß jeder Quotient von $\Lambda_\infty(\alpha)$ $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaft (Ω) besitzt, folgt wieder aus 1.3, 1.8 und den entsprechenden Vererbungssätzen 1.2 und 1.7. Die Umkehrung ist in 3.3 enthalten.

3.5. Satz. *Ein (F)-Raum E ist genau dann isomorph einem projizierten Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$, wenn er $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaften* (DN) *und* (Ω) *hat.*

Beweis. Die eine Richtung folgt wieder aus 1.3, 1.2, 1.8, 1.7. Um die Umkehrung zu zeigen, betrachten wir die nach 3.3 existierende exakte Sequenz

$$0 \to \Lambda_\infty(\alpha) \to \Lambda_\infty(\alpha) \to E \oplus \tilde{E} \to 0,$$

wo $\tilde{E} \subset \Lambda_\infty(\alpha)$.

E und $\tilde{E}$ haben die Eigenschaft (DN), damit trivialerweise auch $E \oplus \tilde{E}$. Da $\Lambda_\infty(\alpha)$ nach 1.8 die Eigenschaft (Ω) hat, und alle beteiligten Räume nuklear sind, zerfällt die Sequenz nach 1.9 $E \oplus \tilde{E}$ und damit auch E ist also projizierter Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$.

Man kann das Ergebnis von 3.5 auch in der folgenden, auf Grund von 3.2 und 3.4 äquivalenten Weise formulieren.

3.6. Satz. *Ein (F)-Raum E ist genau dann isomorph einem projizierten Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$, wenn er isomorph einem Unterraum und isomorph einem Quotienten von $\Lambda_\infty(\alpha)$ ist.*

Es sei darauf hingewiesen, daß 3.6 keinesfalls bedeutet, daß ein Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$, der isomorph einem Quotienten von $\Lambda_\infty(\alpha)$ ist (d.h. Bild eines stetigen Homomorphismus von $\Lambda_\infty(\alpha)$) notwendigerweise projiziert in $\Lambda_\infty(\alpha)$ liegt. Ein Gegenbeispiel dazu wird jeweils durch den Kern der nach 2.4 existierenden exakten Sequenz gegeben. Er liegt nicht projiziert in $\Lambda_\infty(\alpha)$, da $\Lambda_\infty(\alpha)^N$ keine stetige Norm besitzt, also nicht Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$ sein kann. Zu diesen Fragestellungen s. [9].

4. Wir wollen nun zeigen, daß wir in den Sätzen 3.2 und 3.5 die $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität durch erheblich schwächere Bedingungen ersetzen können. Insbesondere kann ein im allgemeinen Fall schwächerer Nuklearitätsbegriff, nämlich die $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität (d.h. λ-Nuklearität im Sinne von [6] mit $\lambda = \Lambda_1(\alpha)$, ausführlich behandelt in [17]) den Charakterisierungen zugrunde gelegt werden. Wir beginnen damit, einleitend einige Begriffe zu erklären.

Ist E ein lokalkonvexer Raum, $U \in \mathfrak{U}$, dann soll E_U der zu U gehörige normierte Raum, $\hat{E}_U$ die vollständige Hülle von E_U, d.h. der zu U gehörige Banachraum sein. Setzen wir

$$E'_{U^0} = \{y \in E' \colon \sup_{x \in U} |y(x)| < +\infty\},$$

dann ist E'_{U^0} ein Banachraum mit der Einheitskugel U^0, und in kanonischer Weise gilt $(\hat{E}_U)' = E'_{U^0}$. Für $U, V \in \mathfrak{U}$, $V \subset U$ soll $A_{V,U}\colon \hat{E}_V \to \hat{E}_U$ die kanonische Abbildung sein, $A_{U^0,V^0} := A^{\tau}_{V,U}$ ist dann die natürliche Einbettung $E'_{U^0} \to E'_{V^0}$.

Eine stetige lineare Abbildung T von einem Banachraum E in einen Banachraum F nennen wir $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear, wenn beschränkte Folgen $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ in E', $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ in F, eine Folge $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \Lambda_1(\alpha)$ und $R > 1$ existieren, so daß

$$Tx = \sum_n \xi_n R^{-\alpha_n} \langle x, a_n \rangle b_n$$

für alle $x \in E$. Diese Definition stimmt wegen [17], Lemma 1.2 mit der in [6], S. 10 gegebenen Definition überein. Entsprechend ist dann der im folgenden definierte Begriff der $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität gerade die λ-Nuklearität im Sinne von [6] für $\lambda = \Lambda_1(\alpha)$. Diese wurde in [17] für nukleare $\Lambda_1(\alpha)$ eingehend behandelt. Wir bleiben hier bei unserer Generalvoraussetzung über α (s. §1), die nur die Nuklearität von $\Lambda_\infty(\alpha)$ nicht notwendig die von $\Lambda_1(\alpha)$ impliziert.

4.1. Definition. Ein lokalkonvexer Raum E heißt *$\Lambda_1(\alpha)$-nuklear*, wenn zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein $V \in \mathfrak{U}$ existiert, so daß $A_{V,U}$ $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear ist.

Um diesen Nuklearitätsbegriff in geeigneter Weise mit der Eigenschaft (DN) in Verbindung bringen zu können, übernehmen wir aus [20] die folgende duale Formulierung von (DN).

Sei also E wieder ein (F)-Raum, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ eine Nullumgebungsbasis abgeschlossener absolutkonvexer Mengen, $B_k := U_k^0 \subset E'$. Dann gilt (s. [20], Lemma 1.4):

4.2. Lemma. *E hat die Eigenschaft* (DN) *genau dann, wenn eine schwach beschränkte* (= *gleichstetige*), *absolutkonvexe Menge $B \subset E'$ existiert, so daß es zu jedem $k \in N$ ein $p \in N$ und $C > 0$ gibt mit*

$$B_k \subset rB + \frac{C}{r} B_{k+p}$$

für alle $r > 0$.

Das folgende Lemma enthält eine der wesentlichen Aussagen dieses Paragraphen. Es gibt die exakte Bedingung, unter der wir bei Hinzutreten der Eigenschaft (DN) die $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität sichern können. Diese Bedingung charakterisiert dann also wegen 3.2 (bzw. 3.5) zusammen mit der Eigenschaft (DN) (bzw. den Eigenschaften (DN) und (Ω)) die Unterräume (bzw. projizierten Teilräume) von $\Lambda_\infty(\alpha)$.

4.3. Lemma. *Ist B eine beschränkte Menge in E' gemäß 4.2 und existieren ein $R_0 > 1$ sowie eine schwach beschränkte, absolutkonvexe Menge $B' \subset E'$, $B \subset B'$, so daß $\sup_n R_0^{\alpha_n} \delta_n(B, B') < +\infty$, dann ist E $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear.*

Beweis. Durch Übergang zu einer Teilfolge der Folge B_k (siehe oben) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$B = B_0 \subset B' = B_1 \subset B_2 \subset \ldots$$

Dann existiert also nach Voraussetzung eine Konstante $M > 0$ sowie zu jedem n ein höchstens n-dimensionaler Teilraum $F_n \subset E'$, so daß

$$(*) \qquad B_0 \subset M R_0^{-\alpha_n} B_1 + F_n$$

für alle n.

Wir können weiter ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$(**) \qquad B_k \subset rB_0 + \frac{1}{r} B_{k+1}$$

für alle k und $r > 0$. Setzen wir in $(**)$ $r = S^{\alpha_n}$, wo $S = \sqrt{R_0} > 1$, dann erhalten wir mit Hilfe von $(*)$

$$B_k \subset MS^{-\alpha_n} B_1 + F_n + S^{-\alpha_n} B_{k+1} \subset (M+1) S^{-\alpha_n} B_{k+1} + F_n$$

für alle n. Hieraus wieder ergibt sich durch m-faches Zusammensetzen

$$B_k \subset (M+1)^m S^{-m\alpha_n} B_{k+m} + F_n$$

für alle k, m, n. Wir haben damit gezeigt, daß

$$(***) \qquad \sup_n S^{m\alpha_n} \delta_n(B_k, B_{k+m}) < +\infty$$

für alle k und m.

Auf Grund unserer Voraussetzungen über α existiert ein m_0, so daß $S^{-m_0\alpha_n} \leqslant n^{-1}$ für alle $n \in N$. Da weiter $\delta_n(U_{k+m}, U_k) \leqslant (n+1)\,\delta_n(B_k, B_{k+m})$ (siehe [19], S. 72) erhalten wir aus $(***)$

$$\sup_n S^{(m-m_0)\alpha_n} \delta_n(U_{k+m}, U_k) \leqslant 2 \sup_n S^{m\alpha_n} \delta_n(B_k, B_{k+m}) < +\infty$$

für alle k und m. Da $S > 1$ impliziert dies die Behauptung.

Der folgende Satz ist nun eine unmittelbare Folgerung aus 4.3.

4.4. Satz. *Ist E ein $\Lambda_1(\alpha)$-nuklearer (F)-Raum mit Eigenschaft* (DN), *so ist E $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear.*

Beweis. Sei $B = U^0$, $U \in \mathfrak{U}$ eine beschränkte Menge gemäß 4.2. Nach Definition der $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität (s. 4.1) existiert ein $V \in \mathfrak{U}$, $V \subset U$, so daß $A_{V,U}$ eine Darstellung hat der Form

$$A_{V,U} x = \sum_n \xi_n R^{-\alpha_n} \langle x, a_n \rangle b_n .$$

Dabei soll $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in \Lambda_1(\alpha)$, $R > 1$, $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine beschränkte Folge in E'_{V^0}, $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine beschränkte Folge in $\hat{E}_U$ sein.

Setzen wir $B' = V^0$, so ist $B \subset B'$ und $A_{B,B'}$ hat die Darstellung

$$A_{B,B'} y = \sum_n \xi_n R^{-\alpha_n} \langle b_n, y \rangle a_n .$$

Ist C eine obere Schranke für die Normen der a_n und b_n und ist $1 < R_0 < R$, so erhalten wir

$$\delta_n(B, B') \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j R^{-\alpha_j} C^2 \leqslant R_0^{-\alpha_n} C^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| (R_0/R)^{\alpha_j} .$$

Die Behauptung folgt dann aus 4.3.

Mit Hilfe von 4.4 und der Tatsache, daß $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität die $\Lambda_1(\alpha)$-Nuklearität impliziert (s. [15]), läßt sich 3.2 dann auch in der folgenden Weise formulieren.

4.5. Satz. *Ein (F)-Raum E ist genau dann isomorph einem Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$, wenn er $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaft* (DN) *besitzt.*

Entsprechend nimmt 3.5 die Gestalt an:

4.6. Satz. *Ein (F)-Raum E ist genau dann isomorph einem projizierten Unterraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$, wenn er $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear ist und die Eigenschaften* (DN) *und* (Ω) *hat.*

5. Wir wollen mit einigen Bemerkungen und Beispielen schließen. Dabei wollen wir auf die Charakterisierung der Unterräume, Quotienten und projizierten Teilräume von $\Lambda_\infty(\alpha)$, die Köthesche Folgenräume (s. [10]) sind, durch konkrete Bedingungen an die definierenden Matrizen hier nicht systematisch eingehen. Dieser Fall ist, wie bereits in der Einleitung erwähnt, in [1], [3], [22] mit anderen Methoden vollständig gelöst. Die Bedeutung der Eigenschaften (DN) und (Ω) für Köthesche Folgenräume ist außerdem in [20] und [21] ausführlich diskutiert. Die Bedeutung der $\Lambda_N(\alpha)$-Nuklearität für diese Räume kann [15] entnommen werden, wobei auch in diesem Fall die dort gemachte schärfere Wachstumsvoraussetzung an α unwesentlich ist (vgl. §1).

Es ist jedoch nicht ohne Interesse, zur Veranschaulichung die Bedingungen im Fall eines Potenzreihenraumes konkret hinzuschreiben. Das folgende Schema gibt jeweils die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\Lambda_r(\beta)$ $(r = 1, +\infty)$ isomorph einem Unterraum, Quotienten bzw. projizierten Teilraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$ ist.

	Unterraum	Quotient	proj. Teilraum
$\Lambda_\infty(\beta)$	$\sup\limits_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} < +\infty$	$\sup\limits_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} < +\infty$	$\sup\limits_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} < +\infty$
$\Lambda_1(\beta)$	nie	$\lim\limits_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$	nie

Die in diesem Schama enthaltenen Ergebnisse sind zum Teil wohlbekannt. Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt aus [15], Prop. 2.12, bzw. im Fall der „nie"-Positionen aus [23]. Daß die in der ersten Zeile genannte Bedingung unter unseren Voraussetzungen hinreichend dafür ist, daß $\Lambda_\infty(\beta)$ isomorph einem projizierten Teilraum von $\Lambda_\infty(\alpha)$ ist, ist in [3] enthalten. Der Rest der ersten Zeile folgt daraus. Im Rahmen unserer Theorie folgen die angegebenen Bedingungen aus 3.2, 3.4, 3.5 in Verbindung mit [20], 2.4, [21], 2.6 sowie [15], 2.12. Analog lassen sie sich auf [22] und teilweise auf [1] zurückführen.

Wir betrachten nun als weitere Beispiele Räume holomorpher Funktionen (vgl. hierzu [2], [13], [18]). Wir wählen dazu bei festem $N \in \boldsymbol{N}$ die Folge $\alpha_n = n^{1/N}$. Dann ist $\Lambda_\infty(\alpha) = \mathscr{H}(\boldsymbol{C}^N)$, der Raum der ganzen Funktionen auf $\boldsymbol{C}^N$, während $\Lambda_1(\alpha) = \mathscr{H}(D^N)$, der Raum der auf dem Einheitspolyzylinder $D^N = \{z = (z_1, \ldots, z_N): \max\limits_i |z_i| < 1\}$ holomorphen Funktionen ist.

$\mathscr{H}(\boldsymbol{C}^M)$ ist also isomorph einem Unterraum, bzw. einem Quotienten, bzw. einem projizierten Teilraum von $\mathscr{H}(\boldsymbol{C}^N)$ genau dann, wenn $M \leqslant N$. $\mathscr{H}(D^M)$ ist niemals isomorph einem Unterraum von $\mathscr{H}(\boldsymbol{C}^N)$, jedoch Quotient genau dann, wenn $M < N$.

Betrachten wir allgemeiner eine N-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit V, so läßt diese sich mittels lokaler Potenzreihenentwicklungen in ein Produkt von Räumen, die isomorph zu $\Lambda_1(\alpha)$ mit $\alpha_n = n^{1/N}$ sind einbetten und ist daher, wie man zeigt, stets $\Lambda_1(\alpha)$-nuklear. Ist V darüber hinaus Steinsch, so ist $\mathscr{H}(V)$ Quotient von $\mathscr{H}(\boldsymbol{C}^{2N+2})$ und hat damit die Eigenschaft (Ω) (vgl. [11]).

Für eine N-dimensionale Steinsche Mannigfaltigkeit erhalten wir also aus 4.5, 4.6 bzw. 3.4:

(1) $\mathscr{H}(V)$ ist genau dann isomorph einem Unterraum, bzw. einem projizierten Teilraum von $\mathscr{H}(\boldsymbol{C}^N)$, wenn es die Eigenschaft (DN) hat.

(2) $\mathscr{H}(V)$ ist genau dann isomorph einem Quotienten von $\mathscr{H}(\boldsymbol{C}^N)$, wenn es $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear ist mit $\alpha_n = n^{1/N}$.

Die Bedingung (DN) an $\mathscr{H}(V)$ ist recht einschneidend, wie [20], 2.6 zeigt. $\mathscr{H}(V)$ braucht im allgemeinen weder die Eigenschaft (DN) zu besitzen, noch $\Lambda_N(\alpha)$-nuklear mit $\alpha_n = n^{1/N}$ zu sein, wie das Beispiel $V = D^N$ (siehe oben) zeigt.

Literatur

[1] M. Alpseymen, Thesis, Univ. Michigan (1977).
[2] C. Bessaga, *Some remarks on Dragilev's theorem*, Studia Math. 31 (1968), 307–318.
[3] E. Dubinsky, *Infinite type power series subspaces of infinite type power series spaces*, Israel J. Math. 20 (1975), 359–368.
[4] — *Basic sequences in (s)*, Studia Math. 59 (1977), 283–293.
[5] — *Basic sequences in a stable finite type power series space*, Studia Math. 68 (1979), 117–130.
[6] E. Dubinsky and M. S. Ramanujan, *On λ-nuclearity*, Mem. Am. Math. Soc. 128 (1972).
[7] E. Dubinsky and W. Robinson, *Quotient spaces of (s) with basis*, Studia Math. 63 (1978), 267–281.
[8] T. und Y. Komura, *Über die Einbettung der nuklearen Räume nach $(s)^A$*, Math. Ann. 162 (1966), 284–288.
[9] G. Köthe, *Probleme der linearen Algebra in topologischen Vektorräumen*, Proc. Intern. Symp. Linear Spaces Jerusalem 1960, 290–298.
[10] — *Topologische lineare Räume*, Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960.
[11] A. Martineau, *Sur une propriété universelle de l'espace des distribution de M. Schwartz*, C. R. Acad. Sci. Paris 253 (1964), 3162–3164.
[12] B. S. Mityagin, *Equivalence of bases in Hilbert scales*, Studia Math. 37 (1971), 111–137 (russisch).
[13] B. S. Mityagin and C. M. Henkin, *Linear problem of complex analysis*, Russian Math. Surveys 26 (1971), 99–164 (engl. Übersetzung).
[14] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Akademie-Verlag, Berlin 1969.
[15] M. S. Ramanujan and T. Terzioğlu, *Power series spaces $\Lambda_k(\alpha)$ of finite type and related nuclearities*, ibid. 53 (1975), 1–13. 299–312.
[16] —, — *Subspaces of smoth sequence spaces*, ibid. 65 (1979), 299–312.
[17] W. Robinson, *On $\Lambda_1(\alpha)$-nuclearity*, Duke Math. J. 40 (1973), 541–546.
[18] S. Rolewicz, *On spaces of holomorphic functions*, Studia Math. 21 (1962), 135–160.
[19] T. Terzioğlu, *Die diametrale Dimension von lokalkonvexen Räumen*, Collect. Math. 20 (1969), 49–99.
[20] D. Vogt, *Charakterisierung der Unterräume von s*, Math. Z. 155 (1977), 109–117.

[21] D. Vogt und M. J. Wagner, *Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Matrineau*, Studia Math. 67 (1979), 225–240.
[22] M. J. Wagner, *Unterräume und Quotienten von Potenzreihenräumen*, Dissertation, Wuppertal 1977.
[22a] — *Quotientenräume von stabilen Potenzreihenräumen endlichen Typs*, Manuscripta Math. 31 (1980), 97–109.
[23] V. P. Zahariuta, *On the isomorphism of cartesian products of locally convex spaces*, Studia Math. 46 (1973), 201–221.

GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL
FACHBEREICH MATHEMATIK

Received September 9, 1978
Revised version December 12, 1978 (1463)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXX. (1981)

Spectral extension and power independence in measure algebras

by

GAVIN BROWN (Sydney)

Abstract. Suppose that $\mu_1, \ldots, \mu_n$ are measures in some subalgebra N of the convolution algebra $M(G)$, where G is a locally compact abelian group. When is the joint spectrum of $\mu_1, \ldots, \mu_n$ in N the same as their joint spectrum in the whole Banach algebra? It is shown that the independent power hypotheses which are effective in the case $n = 1$ can be adapted to give positive results, but that there are serious obstructions to multidimensional spectral extension theorems.

1. Introduction. The underlying problem is the practical one of determining spectral properties of those bounded linear operators on L^1 which commute with translations. In view of Wendel's representation of these L^1-multipliers as convolution operators, one may, of course, regard much of the difficulty as that of spectral extension in $M(G)$, the commutative Banach algebra of all regular bounded Borel measures on a locally compact group G.

Joseph Taylor's cohomological investigations (summarized in [12]) have led, in particular, to a deep but simply stated criterion for extension of spectral *values*; while a much shallower result of W. Moran and the present author, [4], gives a condition for extension of individual *homomorphisms* (generalized characters) which has proved to be a powerful tool in applications. Abstract convolution measure algebra results of these two types from part of a methodology which has been developed over the years by many authors, notably Wiener and Pitt, Williamson, Šreider, Hewitt and Kakutani, Varopoulos. A characteristic technique has been to use measure theoretic singularity to deny the existence of algebraic relations, then to use the resulting "algebraic independence" to demonstrate that there is no obstruction to extension. In this regard we feel that Williamson's analysis of the Wiener–Pitt phenomenon in terms of "independent power" elements which need not themselves be based on independent subsets of the line, [14], has been particularly influential.

Here we show that existing notions of (polynomial) power independence fail completely to give joint spectral extension results. We substitute a stronger concept of "full polynomial independence" which avoids the