STUDIA MATHEMATICA, T. LXX. (1982)

Über die μ-Stetigkeit von Matrizen

von

JOHANN BOOS (Hagen)

Abstract. The paper deals with a problem of Wilansky [8] about the μ-continuity of conservative matrices. The author proves the μ-continuity for a large class of matrices.

1. Einleitung und Bezeichnungen. Wir betrachten *Matrixverfahren*, d.h. (unendliche) Matrizen $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ und die für Folgen $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ (formal) definierte Matrixtransformation $Ax := \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right)_{n=1}^{\infty}$. Da keine Verwechslungen zu befürchten sind, verwenden wir für Matrix und Matrixverfahren denselben Buchstaben A. Ist ω bzw. c der Raum aller (komplexwertigen) Folgen bzw. der konvergenten Folgen, so bezeichnen wir mit

$$\omega_A := \left\{x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \omega \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ existiert für jedes } n \in N\right\}$$

den *Anwendungsbereich von* A und mit

$$c_A := \left\{x \in \omega_A \,\middle|\, Ax \in c, \text{ d.h. } \lim_A x := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ existiert}\right\}$$

das *Wirkfeld von* A. Ein Matrixverfahren A heißt *konvergenztreu*, wenn $c \leqslant c_A$ gilt.

Das Wirkfeld c_A von A können wir mit einer (eindeutig bestimmten) FK-Topologie versehen (vgl. [9], S. 38 ff, und [6]). Bezeichnet c_A' den Dualraum des FK-Raumes c_A, so kann nach Satz 5.2 von Zeller [9] jedes $f \in c_A'$ bei geeigneter Wahl von

$$\mu = \mu_A(f) \in C, \qquad t \in l := \left\{y \in \omega \,\middle|\, \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| < \infty\right\}$$

und

$$\alpha \in c_A^{\beta} := \left\{y \in \omega \,\middle|\, yx := \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k \text{ konvergiert für jedes } x \in c_A\right\}$$

durch

(1) $$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + ax \qquad (x \in c_A)$$

dargestellt werden. Ist A *reversibel*, d.h. zu jedem $y \in c$ existiert genau ein $x \in c_A$ mit $y = Ax$, so kann $a = 0$ in (1) gewählt werden.

Weiter verwenden wir die Bezeichnungen $e := (1, 1, \ldots)$, $e^k := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ mit „1" an der k-ten Stelle,

$$L_A := \Big\{x \in c_A \Big| \sup_{p,n \in N} \Big|\sum_{k=1}^{p} a_{nk} x_k\Big| < \infty\Big\}$$

(*abschnittsbeschränkte Folgen*),

$$F_A := \Big\{x \in c_A \Big| \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k) \text{ existiert für jedes } f \in c_A'\Big\}$$

(*Folgen mit funktionaler Abschnittskonvergenz*),

$$W_A := \Big\{x \in F_A \Big| f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k) \text{ für jedes } f \in c_A'\Big\}$$

(*Folgen mit schwacher Abschnittskonvergenz*),

$$I_A := \Big\{x \in c_A \Big| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_A e^k \text{ existiert}\Big\}.$$

Diese Bezeichnungen gehen auf Zeller [10] zurück, und es gelten für konvergenztreue Matrixverfahren die Beziehungen (vgl. [7])

(2) $$c_0 \leqslant W_A \leqslant F_A \quad \text{und} \quad c_0 \leqslant c \leqslant m \cap c_A \leqslant F_A = L_A \cap I_A,$$

wobei c_0 bzw. m für die Menge der Nullfolgen bzw. der beschränkten Folgen steht. Ist $f \in c_A'$, so gilt nach Lemma 5.3 von Wilansky [7]

(3) $$f(x) = \mu\Big(\lim_A x - \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_A e^k\Big) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(e^k)$$

für jedes $x \in F_A$; dabei sei μ wie in (1) gewählt. Ein konvergenztreues Matrixverfahren A heißt *konullär*, falls

$$\chi(A) := \lim_A e - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_A e^k = 0,$$

koregulär, falls

$$\chi(A) \neq 0,$$

fast-koregulär (nach einer Definition von Wilansky), wenn

$$F_A \neq W_A$$

gilt, und *ersetzbar*, wenn ein Matrixverfahren B mit $c_B = c_A$ und $\lim_B e^k = 0$ für jedes $k \in N$ existiert.

2. μ-Eindeutigkeit. Wie schon Wilansky [7] feststellte, ist die Darstellung (1) von stetigen linearen Funktionalen auf c_A nicht eindeutig. Man macht sich leicht klar, daß t und a in (1) für keine Matrix A und kein $f \in c_A'$ eindeutig bestimmt sind. Dagegen folgt aus (3) unmittelbar $(x := e)$, daß μ in (1) sicher dann eindeutig bestimmt ist, wenn A koregulär ist (vgl. [7], S. 329).

Da μ in (1) genau dann für jedes $f \in c_A'$ eindeutig bestimmt ist, wenn dies für mindestens ein $f \in c_A'$ gilt, ist die folgende Definition sinnvoll: Die Matrix A heiße *μ-eindeutig*, wenn $\mu = 0$ in jeder Darstellung (1) des Nullfunktionals $f \equiv 0$ gilt (vgl. [1], S. 150).

Mit der μ-Eindeutigkeit haben sich Wilansky [7], [8], Macphail–Wilansky [4], Beekmann [1] und Kuan [3] beschäftigt. Wir wollen es hier bei einem Beispiel zu folgendem Theorem von Wilansky (vgl. [7], Theorem 8.1, und [4], Theorem 2.2) bewenden lassen.

THEOREM 1. *Ist A konvergenztreu, so hat $L_A \neq W_A$ die μ-Eindeutigkeit (von A) zur Folge.*

Das folgende Beispiel, das in der Literatur schon vielfach betrachtet wurde, zeigt, daß die Bedingung $L_A \neq W_A$ nicht notwendig für die μ-Eindeutigkeit ist.

BEISPIEL. Sei

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}.$$

Laut Beispiel 5 von Wilansky [7] definiert A ein konulläres Matrixverfahren mit $m \cap c_A = W_A = F_A = L_A \neq c_A$ $(= I_A)$. *Wir zeigen, daß A μ-eindeutig ist.*

Beweis. Wäre A nicht μ-eindeutig, so gäbe es laut Definition ein $t \in l$ und ein $a \in c_A^\beta$ derart, daß

$$\lim_A x = t(Ax) + ax \qquad \text{für jedes } x \in c_A$$

erfüllt ist. Setzen wir $x_0 := 0$, so erhalten wir hieraus auf Grund der speziellen Gestalt von A durch Einsetzen von $\mathbf{x} := e^k$ die Beziehung

$$a_k = t_{k+1} - t_k \qquad \text{für jedes } k \in N$$

und damit für jedes $x \in c_A$

$$\lim_A x = \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} t_n (x_n - x_{n-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n (t_{n+1} - t_n) = \lim_{n\to\infty} x_n t_{n+1}.$$

Die Existenz des letzten Grenzwertes und die letzte Gleichung folgen mit Hilfe Abelscher partieller Summation und aus $\alpha \in c_A^\beta$. Insbesondere erhalten wir für $x := (n)_{n=1}^\infty$ die Aussage

$$\lim_A x = 1 = \lim_{n\to\infty} n t_{n+1}.$$

Dies hat aber $t \notin l$ im Widerspruch zur Wahl von t zur Folge.

3. μ-Stetigkeit. Aus den obigen Überlegungen folgt, daß

$$\mu_A: c_A' \to C: f \to \begin{cases} \mu = \mu_A(f), & \text{falls } A\ \mu\text{-eindeutig (vgl. (1))}, \\ 0, & \text{falls } A \text{ nicht } \mu\text{-eindeutig} \end{cases}$$

ein wohldefiniertes lineares Funktional auf c_A' ist. Wilansky [8] wirft die aus limitierungstheoretischer Sicht interessante Frage nach der Stetigkeit von μ_A auf und definiert: A heiße *μ-stetig*, wenn μ_A auf c_A' bezüglich der starken Topologie $\beta(c_A', c_A)$ stetig ist. Ist A nicht μ-eindeutig, so ist A trivialerweise μ-stetig. Im Zusammenhang mit der μ-Stetigkeit betrachtet Wilansky [8]

$$G_1 := \{f \in c_A' \mid f(x) = t(Ax) \text{ für mindestens ein } t \in l\},$$
$$G_2 := \{f \in c_A' \mid f(x) = \alpha x \text{ für mindestens ein } \alpha \in c_A^\beta\}$$

und $G := G_1 + G_2$. Laut Definition gilt:

(4) A ist genau dann μ-eindeutig, wenn $\lim_A \notin G$ erfüllt ist.

Wir werden bei unseren Betrachtungen auf die folgenden zwei Theoreme von Wilansky [8] zurückgreifen.

THEOREM 2. *Für konvergenztreue Matrizen ist G_2 stark dicht in G, d.h. es gilt $G \subseteq \bar{G}_2^{\beta(c_A', c_A)} \subseteq c_A'$.*

THEOREM 3. *Sei A konvergenztreu. Ist A koregulär oder gilt $G_2 \subseteq G_1$, so ist A μ-stetig.*

Aus dem nachstehenden Satz erhalten wir die μ-Stetigkeit für eine große Klasse von konvergenztreuen Matrizen.

SATZ. *Ist A konvergenztreu und $\lim_A \in \bar{G}_2^{\beta(c_A', c_A)}$, so gilt $L_A = W_A$.*

Beweis. Laut Voraussetzung existiert in G_2 ein Netz $(f_\nu)_{\nu\in I}$ mit $f_\nu \to \lim_A (\beta(c_A', c_A))$, d.h. für jede beschränkte Menge M im FK-Raum

c_A gilt

(5) $$\sup_{x\in M} |f_\nu(x) - \lim_A x| \to 0 \quad (\nu \to);$$

insbesondere konvergiert das Netz $(f_\nu)_{\nu\in I}$ punktweise. Wählen wir zu jedem $\nu \in I$ eine Folge $\alpha^{(\nu)} \in c_A^\beta$ derart, daß

$$f_\nu(x) = \alpha^{(\nu)} x \quad \text{für jedes } x \in c_A$$

gilt, so erhalten wir für $x := e^k$ die Beziehung

$$a_k := \lim_A e^k = \lim_{\nu\to} \alpha_k^{(\nu)}$$

für jedes $k \in \boldsymbol{N}$.

Sei nun $x \in L_A$ vorgegeben. Wegen $F_A = L_A \cap I_A$ (vgl. (2)) und (3) gilt $x \in W_A$, falls

$$x \in I_A \quad \text{und} \quad \lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

erfüllt ist. Es genügt also

(6) $$\lim_A x - \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \to 0 \quad (n \to \infty)$$

zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da genau dann $x \in L_A$ gilt, wenn

$$\left\{x^{[n]} := \sum_{k=1}^{n} x_k e^k \mid n \in \boldsymbol{N}\right\}$$

im FK-Raum c_A beschränkt ist (vgl. [5]), können wir nach (5) ein $\nu_0 \in \boldsymbol{I}$ derart wählen, daß

(7) $$|f_\nu(x^{[n]}) - \lim_A x^{[n]}| = \left|\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^{(\nu)} - a_k) x_k\right| < \varepsilon/3$$

für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ und $\nu \in I$ mit $\nu \geqslant \nu_0$ und

(8) $$|f_\nu(x) - \lim_A x| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(\nu)} x_k - \lim_A x\right| < \varepsilon/3$$

für jedes $\nu \in I$ mit $\nu \geqslant \nu_0$ erfüllt ist. Wählen wir $n_0 \in \boldsymbol{N}$ mit

(9) $$|f_{\nu_0}(x) - f_{\nu_0}(x^{[n]})| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^{(\nu_0)} x_k\right| < \varepsilon/3$$

für jedes $n \geqslant n_0$, so erhalten wir aus (7), (8) und (9) für jedes $n \geqslant n_0$ die Abschätzung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k - \lim_A x\right| = |\lim_A x^{[n]} - \lim_A x| < \varepsilon.$$

Damit ist (6) und nach den obigen Überlegungen $x \in W_A$ nachgewiesen. Es gilt also $L_A = W_A$ (vgl. auch (2)).

FOLGERUNG 1. *Ist A konvergenztreu und gilt $L_A \neq W_A$, so ist A μ-stetig.*

Die Beziehung $L_A \neq W_A$ ist z.B. erfüllt, wenn A fastkoregulär ($F_A \neq W_A$) oder nicht ersetzbar ($L_A \neq F_A$; vgl. Korollar 2 von Bennett [2]) ist.

Beweis. Die Aussage ist trivial, falls A nicht μ-eindeutig ist. Ist A μ-eindeutig, so ist A genau dann μ-stetig, wenn $G = G_1 + G_2$, der Kern von μ_A, $\beta(c_A^{\dagger}, c_A)$-abgeschlossen ist. Letzteres folgt aber unter der Voraussetzung $L_A \neq W_A$ aus Theorem 2 und dem obigen Satz.

FOLGERUNG 2. *Ist A konvergenztreu und abschnittsbeschränkt (d.h. $L_A = c_A$), so ist A μ-stetig.*

Beweis. Wäre A nicht μ-stetig, so erhielten wir $L_A = W_A$ und damit $\lim_A \in G_2$. Dies hätte aber wegen (4) die Nicht-μ-Eindeutigkeit und damit die μ-Stetigkeit von A zur Folge.

Das Ergebnis in Folgerung 2 wurde von Wilansky [8] für den Fall „c_A ist BK-Raum" bewiesen.

Zum Abschluß sei noch auf das obige Beispiel hingewiesen: A ist μ-eindeutig, und es gilt $L_A = W_A$; weiter ist A auch μ-stetig, da A reversibel ist (vgl. Theorem 3 und die Bemerkung zu (1)).

Literatur

[1] W. Beekmann, *Über einige limitierungstheoretische Invarianten*, Math. Z. 150 (1976), pp. 195–199.

[2] G. Bennett, *Distinguished subsets and summability invariants*, Studia Math. 40 (1971), pp. 225–234.

[3] Shen-Yue Kuan, *Some invariant properties on summability domains*, Proc. Amer. Math. Soc. 64 (1977), pp. 248–250.

[4] M. S. Macphail, A. Wilansky, *Linear functionals and summability invariants*, Canad. Math. Bull. 17 (1974), pp. 233–242.

[5] J. J. Sember, *The associative part of a convergence domain is invariant*, ibid. 13 (1970), pp. 157–148.

[6] A. Wilansky, *Functional analysis*, Blaisdell, New York, 1964.

[7] — *Distinguished subsets and summability invariants*, J. Analyse Math. 12 (1964), pp. 327–350.

[8] — *On the μ property of FK spaces*, Comment. Math. (special volume dedicated to W. Orlicz on the occasion of his 75th birthday) 21 (1978), pp. 371–380.

[9] K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Z. 53 (1951), pp. 463–487.

[10] — *Abschnittskonvergenz in FK-Räumen*, ibid. 55 (1951), pp. 55–70.

Received June 29, 1978 (1445)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXX: (1982)

Operators which respect norm intervals

by

EHRHARD BEHRENDS (Berlin)

Abstract. Let X, Y be real normed linear spaces. For $x_1, x_2 \in X$ let $[x_1; x_2]$ be the intersection of all closed balls containing x_1 and x_2. $[x_1; x_2]$ is called the norm interval between x_1 and x_2. A continuous linear operator $T: X \to Y$ is said to respect norm intervals if $T([x_1; x_2]) \subset [Tx_1; Tx_2]$ for $x_1, x_2 \in X$. We investigate the collection of these operators. For example, every extreme functional on X respects norm intervals and, conversely, the set of norm interval respecting functionals can be obtained from the extreme functionals by means of a Krein–Milman type theorem.

Norm interval respecting operators on function modules are investigated in more detail. As corollaries we obtain a result of Cunningham and Roy which characterizes the extreme functionals on function modules, theorems of the Banach–Stone type and characterizations for extreme operators between spaces of continuous function.

0. Introduction. Let X be a real normed linear space. If x_1, x_2 are elements of X, $[x_1, x_2]$ (the *norm interval* between x_1 and x_2) denotes the intersection of all closed balls which contain x_1 and x_2. Some basic properties and examples are considered in Section 1. In particular, we characterize the norm intervals in function modules by means of the norm intervals of the components.

The aim of this paper is the investigation of continuous linear operators T: $X \to Y$ between real normed linear spaces X, Y which respect norm intervals, i.e. operators for which $T([x_1; x_2]) \subset [Tx_1; Tx_2]$ for $x_1, x_2 \in X$. We prove that this class contains, for example, extreme functionals, isometries with dense range, and M-bounded operators. Some general properties of norm interval respecting operators are established in Section 2. Section 3 contains a theorem by which the norm interval respecting functionals on X can be obtained from the extreme functionals. We apply this theorem to investigate the norm interval respecting functionals on some classes of Banach spaces.

Finally, in Section 4, we consider norm interval respecting operators between function modules. The main theorems (Theorem 4.3, Theorem 4.7) admit a number of corollaries; for example we obtain a characterization of extreme functionals on function modules (a result which is due to Cunningham and Roy) and Banach–Stone type theorems as well as