Sur les fonctions indépendantes (V)

par

M. KAC (Lwów).

Cette Note contient une application des théorèmes établis dans les Notes précédentes[1]) aux suites des fonctions que l'on obtient en multipliant l'argument d'une fonction arbitraire par les termes d'une suite numérique à croissance rapide.

Théorème 1. *Si la fonction $\varphi(x)$ définie dans $\langle 0,1\rangle$ remplit les conditions*

$$\varphi(x+1)=\varphi(x) \qquad (x), \tag{1}$$

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<h|x'-x''|^{\alpha} \quad (0<\alpha,\ x'\neq x''), \tag{2}$$

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx=0, \tag{3}$$

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx=1, \tag{4}$$

alors la relation

$$\lim_{n\to\infty}\left|\underset{x}{E}\left(a<\frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\varphi(2^{k(k-1)/2}x)<b\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-y^2}dy \tag{5}$$

a lieu pour tous les a, b réels.

[1]) Il s'agit ici de deux Notes: M. Kac, Sur les fonctions indépendantes (I), Stud. Math. 6 (1936) p. 46—58 et M. Kac et H. Steinhaus, Sur les fonctions indépendantes (II), Stud. Math. 6 (1936) p. 59—66, que nous citons comme „Note I" et „Note II".

Démonstration. Divisons l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ en 2^k parties égales et choisissons les nombres x_j dans ces intervalles de manière que

$$\frac{j}{2^k}\leqslant x_j<\frac{j+1}{2^k} \qquad (j=0,1,\dots,2^k-1).$$

Posons

$$g_k(x)=\varphi(x_j),\ \text{pour}\ \frac{j}{2^k}\leqslant x<\frac{j+1}{2^k} \qquad (j=0,1,\dots,2^k-1)$$

$$g_k(x+1)=g_k(x),\ \text{pour tous les}\ x;$$

nous aurons évidemment d'après (2)

$$|g_k(x)-\varphi(x)|<\frac{h}{2^{k\alpha}}, \tag{6}$$

et d'après (3) et (4)

$$\left|\int_0^1 g_k(x)\,dx\right|<\frac{h}{2^{k\alpha}}, \tag{7}$$

$$\left|\int_0^1 g_k^2(x)\,dx-1\right|<\frac{2hM}{2^{k\alpha}}, \tag{8}$$

M désignant le maximum de $|\varphi(x)|$ dans $\langle 0,1\rangle$. Si, par hasard, il y aurait des nombres égaux parmi les constantes $\varphi(x_j)$ $(j=0,1,\dots,2^k-1)$ qui servent à définir $g_k(x)$, on les remplacerait par des constantes assez proches pour maintenir (6), (7) et (8), mais toutes différentes.

Or, il est facile à vérifier que les fonctions

$$f_k(x)=g_k(2^{k(k-1)/2}x) \qquad (k=1,2,\dots)$$

constituent un système de fonctions indépendantes et que (6), (7) et (8) impliquent

$$|f_k(x)-\varphi(2^{k(k-1)/2}x)|<\frac{h}{2^{k\alpha}}, \tag{9}$$

$$\left|\int_0^1 f_k(x)\,dx\right|<\frac{h}{2^{k\alpha}}, \tag{10}$$

$$\left|\int_0^1 f_k^2(x)\,dx-1\right|<\frac{2hM}{2^{k\alpha}}. \tag{11}$$

Posons pour abréger

(12) $$e_k(x) = f_k(x) - \varphi(2^{k(k-1)/2}x),$$

(13) $$l_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx,$$

(14) $$m_k = \int_0^1 f_k^2(x)\,dx,$$

(15) $$\psi_k(x) = f_k(x) - l_k\,;$$

nous en tirons, en tenant compte de (10) et (11),

$$\int_0^1 \psi_k(x)\,dx = 0,$$

(16) $$\int_0^1 \psi_k^2(x)\,dx = m_k + l_k^2 - 2l_k = 1 + O\left(\frac{hM}{2^{k\alpha}}\right),$$

ce qui conduit à

(17) $$\int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\,\psi_k(x)\right)dx = 1 - \frac{v^2}{2n} + \frac{c(n,k,v)\,v^3}{n^{3/2}},$$

où les $|c(n,k,v)|$ sont bornées par une constante C; cela résulte de (16) et de ce que les $|\psi_k(x)|$ sont uniformément bornées. L'indépendance donne

(18) $$\int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)\right)dx = \prod_{k=1}^{n}\int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\,\psi_k(x)\right)dx,$$

et (17) et (18) engendrent

(19) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)\right)dx = e^{-v^2/4},$$

la convergence étant uniforme en v dans chaque intervalle fini $\langle v_1, v_2\rangle$.

Remarquons maintenant que, uniformément en v dans $\langle v_1, v_2\rangle$,

(20) $$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\varphi(2^{k(k-1)/2}x)\right)dx - \int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x)\right)dx\right| = 0.$$

En effet, l'égalité évidente

$$|e^{i\xi} - e^{i\eta}| = |e^{i(\xi-\eta)} - 1|$$

et les formules (12) et (15) impliquent que la différence absolue des intégrales (20) ne surpasse pas

$$\left|\int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}(e_k(x) - l_k)\right)dx - 1\right|;$$

d'autre part (9), (10), (12) et (13) montrent que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}(e_k(x) - l_k) = 0$$

uniformément en x, ce qui suffit pour établir (20). En comparant (19) et (20) on est conduit à la formule

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\varphi(2^{k(k-1)/2}x)\right)dx = e^{-v^2/4},$$

la convergence étant uniforme dans tout intervalle fini $\langle v_1, v_2\rangle$. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 1 de la Note II en y posant

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{k=1}^{n}\varphi(2^{k(k-1)/2}x), \quad f(v) = e^{-v^2/4},$$

pour obtenir le théorème 1.

Remarque. Le lecteur n'aura aucune peine à généraliser notre théorème en diverses directions. Nous avons choisi des hypothèses bien simples pour faire mieux ressortir la méthode de la démonstration. On pourrait p. e. remplacer la suite $2^{k(k-1)/2}$ par $p^{k(k-1)/2}$, p étant un nombre naturel quelconque. La méthode, qui est celle de l'approximation par des fonctions indépendantes, fournit aussi ce théorème, moyennant les mêmes hypothèses sur $\varphi(x)$.

Théorème 2. *La série*

(21) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\varphi(2^{k(k-1)/2}x)$$

est convergente ou divergente presque partout dans $\langle 0,1\rangle$ suivant que la somme

(22) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

est finie ou infinie

Démonstration. En tirant parti de (12) et (15), on écrit

$$\varphi(2^{k(k-1)/2}x) = \psi_k(x) + l_k - e_k(x)$$

et on applique à la série des fonctions indépendantes

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x)$$

le théorème 3 de la Note I et le théorème 2 de la Note II; les relations

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k l_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k e_k(x)| < \infty,$$

qui valent pour $\lim\limits_{k \to \infty} c_k = 0$ à cause de (9), (10), (12) et (13), permettent de passer de cette série à la série de la thèse; quand la somme (21) est infinie sans que la condition $\lim\limits_{k \to \infty} c_k = 0$ soit remplie, la divergence presque partout de (21) devient évidente à cause de

$$\overline{\lim_{k \to \infty}}\, c_k \varphi(2^{k(k-1)/2}x) \neq 0$$

presque partout.

(Reçu par la Rédaction le 3. 7. 1937).