# Sur les multiplicateurs des séries orthogonales

par

S. KACZMARZ (Lwów) et J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

**1.** Considérons un système orthogonal et normé de fonctions $\varphi_i(t)$ $(i=1,2,\ldots)$ définies dans l'intervalle $(0,1)$. On dit que la suite numérique $\{\lambda_n\}$ est un *multiplicateur* des classes $L^p$ et $L^q$, en symbole $\{\lambda_n\}\in(L^p, L^q)$, si pour chaque fonction $f(t)\in L^p$ la série

$$(1)\qquad \sum_1^\infty \lambda_i a_i \varphi_i(t), \quad a_i=\int_0^1 f(t)\,\varphi_i(t)\,dt,$$

est le développement d'une fonction $g(t)\in L^q$.

Le but de cette Note est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\{\lambda_i\}\in(L^p, L^q)$.

**2.** Théorème 1. *Si les fonctions $\varphi_i(t)$ sont bornées et la suite $\{\varphi_i(t)\}$ est complète dans $L$, alors la formule*

$$\{\lambda_i\}\in(L^p, L^q) \qquad (1\leqslant p<\infty,\ 1\leqslant q\leqslant\infty)$$

*équivaut aux conditions suivantes:*

a) *la fonction $H(x,t)$, dont le développement est la série $\sum_1^\infty \lambda_i\varphi_i(t)\int_0^x \varphi_i(u)\,du$, appartient pour chaque $x$ à la classe $L^q$,*

b) *pour chaque $n$ et chaque système de nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ tel que $\sum_0^{n-1}|\varepsilon_i|^p=1$ on a*

$$(2)\qquad \left\{\int_0^1\left|\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon_i\left[H\left(\frac{i+1}{n},t\right)-H\left(\frac{i}{n},t\right)\right]\right|^q dt\right\}^{1/q}\leqslant M\,n^{-1/p},$$

*où $M$ est indépendant de $\{\varepsilon_i\}$ et $n$.*

Supposons d'abord que $\{\lambda_i\} \in (L^p, L^q)$. La fonction $f_x(t)$, égale à 1 pour $0 \leqslant t \leqslant x$ et à zéro pour $x < t < 1$, appartient à $L^p$, donc la condition a) est nécessaire d'après la définition de $\{\lambda_i\}$. Soit maintenant

$$f_i = \int_0^1 f(t)\,\varphi_i(t)\,dt, \quad f(t) \in L^p.$$

La suite $\{\varphi_i\}$ étant supposée complète, la relation $g(t) \sim \sum_1^\infty \lambda_i f_i \varphi_i(t)$ définit une opération linéaire [1]) $g(t) = U(f)$ qui transforme toute $f(t) \in L^p$ en une $g(t) \in L^q$. Il existe donc un nombre $M$ de sorte que

$$(3) \qquad \Big(\int_0^1 |U(f)|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant M \Big(\int |f|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Étant donné un système de nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ tel que $\sum_0^{n-1} |\varepsilon_i|^p = 1$, posons $f(t) = \varepsilon_i$ dans $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$. On a

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt = \frac{1}{n}$$

et la relation (3) donne

$$(4) \qquad \Big(\int_0^1 |U(f)|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant M\, n^{-1/p}.$$

Les coefficients du développement de $U(f)$ sont

$$\int_0^1 U(f)\,\varphi_k(t)\,dt = \lambda_k \int_0^1 f(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \lambda_k \sum_0^{n-1} \varepsilon_i \int_{i/n}^{(i+1)/n} \varphi_k(t)\,dt.$$

D'autre part, les coefficients de la fonction

$$F(t) = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i \left[H\Big(\frac{i+1}{n}, t\Big) - H\Big(\frac{i}{n}, t\Big)\right]$$

[1]) Voir S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932 p. 41, cf. aussi S. Kaczmarz — H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa 1935, p. 19, [145].



sont $\int_0^1 F(t)\,\varphi_k(t)\,dt = \sum_0^{n-1} \varepsilon_i \Big[\lambda_k \int_{i/n}^{(i+1)/n} \varphi_k(u)\,du\Big]$, on a donc

$$U(f) = F(t).$$

En substituant ce résultat dans (4), on obtient la condition (2) et la nécessité est démontrée.

Supposons à présent que les conditions a) et b) sont remplies. L'ensemble des fonctions $h(t) = c\,\varepsilon_i$ dans $\left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$, où $c$ est une constante arbitraire, est dense dans $L^p$. Il résulte de la condition b) que la fonction $U(h) = c \sum_0^{n-1} \varepsilon_i \left[H\Big(\frac{i+1}{n}, t\Big) - H\Big(\frac{i}{n}, t\Big)\right]$ appartient à $L^q$ et que, pour $h = h_1$ et $h = h_2$,

$$\Big(\int |U(h_1) - U(h_2)|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant M \Big(\int |h_1 - h_2|^p dt\Big)^{1/p}.$$

On a donc, pour $f(t) \in L^p$ et une suite $\{h_n(t)\}$ telle que $\int_0^1 |f(t) - h_n(t)|^p dt \to 0$, la relation

$$\lim_{m, n \to \infty} \int |U(h_m) - U(h_n)|^q dt = 0.$$

Il existe alors $\lim_{n \to \infty} U(h_n) = U(f)$, $U(f) \in L^q$ dont les coefficients sont $\lambda_i \int_0^1 f(t)\,\varphi_i(t)\,dt$, ce qui prouve que $\{\lambda_i\} \in (L^p, L^q)$.

Remarque. Dans le cas $q = \infty$, $L^\infty$ signifie la classe des fonctions bornées et la condition (2) devient

$$(5) \qquad \operatorname{vrai\,max} \left|\sum_0^{n-1} \varepsilon_i \left[H\Big(\frac{i+1}{n}, t\Big) - H\Big(\frac{i}{n}, t\Big)\right]\right| \leqslant M n^{-1/p}.$$

Supposons maintenant que $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q < \infty$. Dans ce cas $(L^p, L^q) = (L^{q'}, L^{p'})$ [2]), donc du théorème 1 on déduit le

Théorème 2. *Sous les hypothèses du théorème 1 la formule*

$$\{\lambda_i\} \in (L^p, L^q) \quad (1 \leqslant p < \infty,\ 1 < q < \infty)$$

*équivaut aux conditions suivantes:*

[2]) v. S. Kaczmarz — H. Steinhaus, l. c. p 224, [654]; $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$.

a) *la fonction $H(x, t)$, dont le développement est la série*

$$\sum_{1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(t) \int_0^x \varphi_i(u)\, du,$$

*appartient pour chaque $x$ à la classe $L^{p'}$;*

b) *pour chaque $n$ et chaque système de nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ tel que $\sum_0^{n-1} |\varepsilon_i|^{q'} = 1$, on a*

$$\left\{\int_0^1 \left| \sum_0^{n-1} \varepsilon_i \left[H\left(\frac{i+1}{n}, t\right) - H\left(\frac{i}{n}, t\right)\right]\right|^{p'} dt\right\}^{1/p'} \leqslant M n^{-1/q'}. \tag{6}$$

**3.** Pour $p = 1$ la relation (6) prend la forme

$$\text{vrai max} \left| \sum_0^{n-1} \varepsilon_i \left[H\left(\frac{i+1}{n}, t\right) - H\left(\frac{i}{n}, t\right)\right]\right| \leqslant M n^{-1/q'}. \tag{7}$$

Dans ce cas on peut obtenir une autre condition en se servant du lemme suivant:

*La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $F(t)$ soit l'intégrale indéfinie d'une fonction $f(t) \in L^q$ $(1 < q \leqslant \infty)$, est que l'on ait, pour chaque $n$ et chaque système de nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ tel que $\sum_0^{n-1} |\varepsilon_i|^{q'} = 1$, la relation*

$$\left| \sum_0^{n-1} \varepsilon_i \left[F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)\right]\right| \leqslant M n^{-1/q'}. \tag{8}$$

Ce lemme est connu, nous allons en reproduire la démonstration pour la commodité du lecteur. Supposons que $F(t)$ soit absolument continue et que sa dérivée $f(t)$ appartienne à $L^q$; alors

$$\left|F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)\right| \leqslant \left(\int_{i/n}^{(i+1)/n} |f(t)|^q dt\right)^{1/q} \cdot n^{-1/q'},$$

donc

$$\sum_0^{n-1} \left|F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)\right|^q \leqslant M^q n^{1-q}, \quad M^q = \int_0^1 |f|^q dt,$$

ce qui fournit la condition (8).



D'autre part, si cette condition est remplie, il s'ensuit que

$$\sum_0^{n-1} \left|F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)\right|^q \leqslant M^q n^{1-q},$$

ce qui prouve que $F(t)$ est absolument continue. Donc, en posant

$$f(t) = F'(t), \quad f_n(t) = n\left|F\left(\frac{i+1}{n}\right) - F\left(\frac{i}{n}\right)\right| \text{ pour } \frac{i}{n} \leqslant t < \frac{i+1}{n},$$

on a

$$\int_0^1 |f_n(t)|^q dt \leqslant M^q,$$

et comme $|f_n(t)|^q \to |f(t)|^q$, $f_n \geqslant 0$, on en obtient

$$\int_0^1 |f(t)|^q dt \leqslant \liminf \int_0^1 |f_n(t)|^q dt \leqslant M^q.$$

Le lemme et la formule (7) prouvent le

Théorème 3. *Sous les hypothèses du théorème 1, la relation*

$$\{\lambda_i\} \in (L, L^q) \qquad (1 < q \leqslant \infty)$$

*équivaut à l'inégalité*

$$\int_0^1 \left|\sum_1^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(t)\right|^q dt \leqslant M$$

*pour presque tout $x$, où $\sum \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(t)$ désigne la fonction $g_x(t)$ dont le développement est la série*

$$\sum_1^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x) \varphi_k(t).$$

Remarque. On peut aussi obtenir ce théorème en utilisant le théorème de M. F. Riesz sur les moments [3]). Dans le cas particulier $q = 2$ ce théorème est connu [4]).

Une démonstration analogue à celle du théorème 3 fournit, à l'aide du théorème 1, le théorème suivant:

---

[3]) Cf. Banach, l. c., p. 74—75, Kaczmarz—Steinhaus, l. c., p. 31—32.

[4]) W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (IV), Studia math. 4 (1934) p. 5; Kaczmarz—Steinhaus, l. c., p. 228, [665].

Théorème 4. *Sous les mêmes hypothèses, la relation*

$$\{\lambda_i\} \in (L^p, L^\infty) \qquad (1 < p < \infty)$$

*équivaut à l'inégalité*

$$\int_0^1 \Big| \sum_1^\infty \lambda_k \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \Big|^p dt < M$$

*pour presque tout* $x$.

**4.** Le théorème 3 conduit à la question suivante: Peut-on remplacer dans le théorème 1 la condition (2) par

$$\left\{ \int_0^1 \Big| \int_0^1 \Big| \sum_1^\infty \lambda_k \varphi_k(x)\, \varphi_k(t) \Big|^{p'} dt \Big|^q dx \right\}^{1/q} \leqslant M\,?$$

La réponse est négative. En effet, prenons $p = q = 2$. On obtiendrait

$$\int \Big| \sum \lambda_i^2 \varphi_i^2(x) \Big|^2 dx \leqslant M^2,$$

donc

$$\int_0^1 \Big| \sum \lambda_i^2 \varphi_i^2(x) \Big|\, dx < \infty,$$

c'est-à-dire $\sum \lambda_i^2 < \infty$, ce qui est en contradiction avec le fait que la condition $\lambda_i = O(1)$ est déjà suffisante pour qu'on ait

$$\{\lambda_i\} \in (L^2, L^2).$$

**5.** Remarquons enfin que la relation $\{\lambda_i\} \in (L^p, L^q)$ n'entraîne pas en général $\lambda_i = O(1)$. On le voit en prenant la suite $\{\varphi_n(t)\}$ définie comme il suit:

$$\varphi_n(t) = \delta_n^{-1}, \quad \text{pour } t \in I_n, \quad |I_n| = \delta_n^2,$$
$$\varphi_n(t) = 0 \quad \text{ailleurs},$$

où $I_n$ désigne une suite d'intervalles disjoints, choisis de sorte que l'on ait

$$\sum^\infty \delta_i^\varepsilon < \infty$$

pour chaque $\varepsilon > 0$.

Soit $p \geqslant 2$, $q < 2$ et $f(t) \in L^p$. Posons

$$\lambda_k = \delta_k^{-\alpha} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{2}{q} - 1\right).$$



La suite $\{\lambda_k\}$ appartient à $(L^p, L^q)$. En effet, on a

$$|a_k| = \Big| \int_{I_k} f(t)\, \varphi_k(t)\, dt \Big| \leqslant \left\{ \int_0^1 |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \cdot \delta^{2/p'-1}$$
$$\leqslant \left\{ \int_0^1 |f(t)|^p dt \right\}^{1/p} \leqslant M.$$

Par conséquent le module de la somme $\sum_1^\infty \lambda_n a_n \varphi_n(t)$ ne surpasse pas dans l'intervalle $I_k$ la valeur $M\delta_k^{-(1+\alpha)}$ et on a

$$\int_{I_k} \Big| \sum \lambda_n a_n \varphi_n(t) \Big|^q dt \leqslant M\, \delta_k^{2-q-\alpha q},$$

ce qui prouve que $\sum \lambda_n a_n \varphi_n(t) \in L^q$, la série $\sum \delta_k^{2-q-\alpha q}$ étant convergente. Nous avons ainsi démontré que la formule $\lambda_n = O(1)$ n'est pas vraie pour $p \geqslant 2$, $q < 2$.

**6.** En désignant par $L^{q-0}$ la classe des fonctions $f(t)$ telles que

$$\int_0^1 |f(t)|^{q-\varepsilon} dt < \infty$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on peut démontrer, par un raisonnement un peu différent, le théorème:

*Si les fonctions* $\varphi_n(x)$ *sont bornées et si la suite* $\{\varphi_n\}$ *est complète dans* $L$, *alors la relation*

$$\{\lambda_i\} \in (L^p, L^{q-0}) \qquad (q > 2)$$

*équivaut aux conditions suivantes:*

a) *la série* $\sum_1^\infty \lambda_i a_i \int_0^x \varphi_i(t)\, dt$ *converge uniformément pour chaque* $f(t) \in L^p$,

b) $$\left\{ \int_0^1 \Big| \sum \Big[ H(\beta_i, t - H(a_i, t) \Big] \Big|^{p'} dt \right\}^{1/p'} \leqslant M_\varepsilon \Big| \sum (\beta_i - \alpha_i) \Big|^{1/q'+\varepsilon},$$

*où* $H(x, t) \sim \sum_1^\infty \lambda_i \varphi_i(t) \int_0^x \varphi_i(t)\, dt$, $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$ *est un système quelconque de segments disjoints,* $\varepsilon$ *un nombre positif arbitraire et* $M_\varepsilon$ *une constante qui ne dépend que de* $\varepsilon$.

La démonstration s'appuie sur le lemme suivant:

*La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction* $F(t)$ *soit l'intégrale indéfinie d'une fonction* $f(t) \in L^{p-0}$ $(p>1)$, *est que pour chaque* $\varepsilon > 0$ *et chaque système de segments disjoints* $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$, *l'inégalité*

$$|\sum [F(\beta_i) - F(\alpha_i)] \leqslant M_\varepsilon |\sum (\beta_i - \alpha_\varepsilon)|^{1/p'+\varepsilon}$$

*soit remplie.*

La condition est nécessaire, car, si $F'(t) = f(t) \in L^{p-0}$, alors on a pour chaque système $\{(a_i, \beta_i)\}$ de segments disjoints

$$\Big|\int\limits_{\sum(\alpha_i, \beta_i)} f(t)\,dt\Big| \leqslant \Big\{\int\limits_0^1 |f(t)|^{p-\varepsilon} dt\Big\}^{1/(p-\varepsilon)} \cdot |\sum (\beta_i - \alpha_i)|^{1-\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$\leqslant M_\varepsilon |\sum (\beta_i - \alpha_i)|^{1/p'+\varepsilon'}, \text{ avec } \varepsilon' = 1 - p' + \frac{1}{p-\varepsilon-1}.$$

D'autre part, la condition exige que la fonction $F(t)$ soit absolument continue. Soit $f(t) = F'(t)$, $E_n = E_t(2^n \leqslant f(t) < 2^{n+1})$, $\{(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})\}$ une suite de systèmes de segments disjoints, telle que

$$\int\limits_{\alpha_i^{(k)}}^{\beta_i^{(k)}} f(t)\,dt \geqslant 0, \quad i, k \text{ arbitraire,} \tag{9}$$

$$\max_{(i)} \{\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}\} \leqslant 1/k, \tag{10}$$

$$|\sum (\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})| \geqslant |E_n| - 1/2^k, \tag{11}$$

$$|E_n - \sum (\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})| = 0. \tag{12}$$

Posons enfin $f_k(t) = \dfrac{F(\beta_i^{(k)}) - F(\alpha_i^{(k)})}{\beta_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)}}$ pour $\alpha_i^{(k)} \leqslant t \leqslant \beta_i^{(k)}$,

et $f_k(t) = 0$ ailleurs. Alors les formules (9), (10) et (12) prouvent que $f_k(t) \to f(t)$ dans $E_n$ et la formule (11) donne $f_k(t) \to 0$ presque partout dans $CE_n$. Donc

$$\liminf_{k\to\infty} \int\limits_0^1 f_k(t)\,dt \geqslant \int\limits_{E_n} f(t)\,dt;$$

il en résulte d'après (11) et notre condition que



$$\int\limits_{E_n} f(t)\,dt \leqslant M_\varepsilon |E_n|^{1/p'+\varepsilon'},$$

ou encore

$$|E_n| \leqslant M_\varepsilon 2^{-n} |E_n|^{1/p'+\varepsilon'},$$

$$|E_n| \leqslant \bar{M}_\varepsilon 2^{-n(p'+\varepsilon')/(p'+\varepsilon'-1)},$$

$$\int\limits_{E_n} |f(t)|^{p-\eta} dt \leqslant \bar{M}_\varepsilon 2^{-n[(p'+\varepsilon')/(p'+\varepsilon'-1)-(p-\eta)]}.$$

En supposant $\eta > p - 1 - \dfrac{1}{p'+\varepsilon'-1}$, on a

$$(p'+\varepsilon')/(p'+\varepsilon'-1) - (p-\eta) = \xi > 0,$$

et par là

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{E_n} |f(t)|^{p-\eta} dt \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{M}_\varepsilon 2^{-|n|\xi} < \infty.$$

*(Reçu par la Rédaction le 17. 6. 1937).*