Sur les suites d'opérations linéaires

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

1. Dans tout ce qui suit nous désignerons par L^p la classe de fonctions définies et intégrables avec la p-ième puissance dans l'intervalle (0,1), et par $|f|_p$ l'expression

$$\left\{\int_0^1 |f|^p\,dt\right\}^{1/p}.$$

Nous dirons qu'une opération linéaire [1])

$$g = U(f)$$

est de classe $L_{p,q}$, ou bien tout court $L_{p,q}$, si elle transforme chaque fonction $f \in L^p$ en une fonction $g \in L^q$; si elle est en outre totalement continue, nous la désignerons par $L^*_{p,q}$. Le but du présent travail est de démontrer certains théorèmes sur les suites d'opérations $L^*_{p,q}$. Le résultat principal est contenu dans le

Théorème 3. *Si les normes* [2]) *des opérations* U_ν *de classe* $L^*_{p,q}(p,q>1)$ *sont uniformément bornées, on peut choisir une suite* n_ν *de sorte que l'expression*

$$\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu} U_{n_\mu}(f)$$

converge presque partout pour chaque fonction $f \in L^p$.

Pour la démonstration du théorème énoncé nous utilisons la forme générale de $L^*_{p,q}$ établie dans le théorème 1 et certaines

[1]) Sur les notions des opérations linéaires, des opérations totalement continues etc. voir Banach [1], particulièrement p. 20—25 et 96 sqq.

[2]) Voir Banach [1], p. 54.

propriétés des suites d'opérations $L^*_{p,q}$ faiblement [3]) convergentes, contenues dans le théorème 2.

En ajoutant quelques conditions supplémentaires, on obtient les théorèmes 4 et 6. En appliquant ces théorèmes à la théorie des séries orthogonales, on trouve les théorèmes 7—9.

2. Nos considérations ont pour base certaines propriétés du système orthogonal et normé de M. J. L. Walsh. Il nous semble commode de les formuler dans un lemme.

Lemme 1. *Désignons par* $\{\omega_\nu(t)\}$ *le système orthogonal et normé de M. Walsh. Soit*

$$f = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu, \quad f \in L^p \quad (p>1), \tag{2.1}$$

$$S_\nu(f,t) = S_\nu(f) = S_\nu(t) = \sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu \omega_\mu(t), \tag{2.2}$$

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots; \quad n_{\nu+1} < 2n_\nu, \tag{2.3}$$

$$\Delta_\nu = \sum_{\mu=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} a_\mu \omega_\mu(t), \tag{2.4}$$

$$S^*(t) = \sup_\nu |S_{n_\nu}(t)|. \tag{2.5}$$

En désignant par $A_p, B_p, C_p, \ldots$ *des constantes positives convenables, on a*

$$\int_0^1 |S_\nu|^p\,dt \leqslant A_p \int_0^1 |f|^p\,dt, \tag{2.6}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 |f-S_\nu|^p\,dt = 0, \tag{2.7}$$

$$B_p \int_0^1 \Big(\sum_\nu \Delta_\nu^2\Big)^{p/2} dt \leqslant \int_0^1 |f|^p\,dt \leqslant C_p \int_0^1 \Big(\sum_\nu \Delta_\nu^2\Big)^{p/2} dt, \tag{2.8}$$

$$\int_0^1 |S^*|^p\,dt \leqslant D_p \int_0^1 |f|^p\,dt, \tag{2.9}$$

[3]) Voir Banach [1], p. 115 sqq.

(2.10) $$\sum_\nu \int_0^1 |\Delta_\nu|^p\, dt \leqslant M_p \int_0^1 |f|^p\, dt \quad (p > 2).$$

Ces formules importantes sont dues à R. Paley [4]).

3. Théorème 1. *Pour qu'une opération* $L_{p,q}$ $(p, q > 1)$ [5])

$$g = U(f)$$

soit $L^*_{p,q}$, *il faut et il suffit que l'on ait*

(3.1) $$g = \sum_\nu \int_0^1 L_\nu(x, t) f(t)\, dt,$$

(3.2) $$\sum_\nu \| L_\nu(x, t) \| < \infty,$$

où les $L_\nu(x, t)$ *sont de la forme*

$$\sum_{i,j=1}^{\lambda_\nu} a_{i,j}^{(\nu)} \omega_i(x)\, \omega_j(t)$$

et $\|L_\nu\|$ *désigne la norme de l'opération* $L_{p,q}$,

$$\int_0^1 L_\nu(x, t) f(t)\, dt.$$

Démonstration. Il est presque évident que la condition est suffisante. En effet, quel que soit l'ensemble borné [6]) de fonctions f, l'ensemble $S_\nu(f)$ est compact; il en résulte que l'ensemble transformé par la formule

$$\int_0^1 L_\nu(x, t) f(t)\, dt$$

l'est aussi et cela montre que cette transformation est totalement continue. Envisageons un ensemble borné dans L^p. Il est facile d'en extraire (par exemple par la méthode de la diagonale) une suite infinie $f_1, f_2, \ldots$, de sorte que les suites

$$\left\{ \sum_{\mu=1}^{\nu} \int_0^1 L_\mu(x, t) f_n(t)\, dt \right\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

convergent dans L^q. Le même subsiste alors aussi pour la suite

$$\{U(f_\nu)\}$$

Montrons maintenant la nécessité. Dans ce but posons pour chaque $f \in L^p$

$$U_\nu(f) = U(f) - U(S_\nu(f))$$

et désignons par

$$\| U_\nu \|$$

la norme de l'opération ainsi définie. D'après (2.6) on conclut que

$$\| U_\nu \| = O(1);$$

nous allons démontrer que

$$\| U_\nu \| = o(1).$$

En admettant l'hypothèse contraire, on pourrait choisir un $\varepsilon > 0$ et une suite infinie $\{W_\nu\}$ de la forme

$$\sum_\nu^{\lambda_\nu} a_{\nu,\mu}\, \omega_\mu(t),$$

satisfaisant aux inégalités

(3.3) $$|U(W_\nu)|_q \geqslant \varepsilon, \quad |W_\nu|_p \leqslant 1.$$

L'opération U étant $L^*_{p,q}$, nous pouvons admettre que la suite $\{U(W_\nu)\}$ converge vers une fonction $W \in L^q$. La première des inégalités (3.3) entraîne nécessairement

(3.4) $$|W|_q \geqslant \varepsilon.$$

Choisissons une suite $\{n_\nu\}$ de manière à satisfaire aux inégalités

$$n_{\nu+1} \geqslant 2\lambda_{n_\nu}, \quad \lambda_{n_\nu} \geqslant 2 n_\nu,$$

et considérons les fonctions

$$W_{n,i} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} W_{n_\nu + i}.$$

[4]) Paley [1]; des formules analogues subsistent aussi pour le système trigonométrique.

[5]) Le théorème subsiste aussi pour $q = 1$, au contraire nous ne savons rien sur le cas $p = 1$.

[6]) On appelle un ensemble E contenu dans L^p *borné*, s'il existe une constante M telle que l'on ait $|f|_p \leqslant M$ pour chaque fonction $f \in E$.

En appliquant (2.8), on obtient [7])

$$|W_{n,i}|_p \leqslant A,$$

où A désigne une constante absolue. D'autre part, il est évident que

$$|U(W_{n,i})|_q \longrightarrow \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} |W|_q,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} |W|_q \leqslant AM,$$

M désignant la norme de l'opération U. Or, comme n est arbitraire, il en résulte

$$|W|_q = 0,$$

contrairement à l'inégalité (3.4). Ce résultat établi, choisissons d'abord un entier n_1 tel que

$$\|U_{n_1}\| \leqslant \varepsilon_1/2,$$

posons

$$g_\nu = U(\omega_\nu), \quad g_\nu = \sum_\mu a_{\nu,\mu}\,\omega_\mu,$$

choisissons ensuite un entier m_1 tel que

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} \Big| \sum_{\mu=m_1+1}^{\infty} a_{\nu,\mu}\,\omega_\mu \Big|_q \leqslant \varepsilon_1/2$$

et posons

$$L_1(x,t) = \sum_{\nu=1}^{n_1} \omega_\nu(t) \sum_{\mu=1}^{m_1} a_{\nu,\mu}\,\omega_\mu(x), \tag{3.5}$$

$$U_1 = \int_0^1 L_1(x,t) f(t)\,dt,$$

$$U_1' = U - U_1;$$

on voit que

$$\|U_1'\| \leqslant \varepsilon_1.$$

L'opération U_1' étant encore $L^*_{p,q}$, nous pouvons la décomposer de sorte que l'on ait

$$U_1' = U_2 + U_2'; \quad U_2 = \int_0^1 L_2(x,t) f(t)\,dt,$$

$$\|U_2'\| \leqslant \varepsilon_2,$$

[7]) C'est le point où la démonstration tombe en défaut pour $p=1$.

où L_2 est de la forme (3.5). En supposant

$$\sum_\nu \varepsilon_\nu < \infty,$$

on démontre par une induction facile la formule (3.2).

Remarquons que l'on peut remplacer dans l'énoncé du théorème les expressions L_ν par des polynomes ordinaires en x et t; il suffit d'approcher convenablement les noyaux L_ν par des polynomes ordinaires pour passer de la forme établie du théorème à la forme demandée.

4. Théorème 2. *Supposons que la suite $\{U_\nu\}$ d'opérations $L^*_{p,q}$ $(p, q > 1)$ converge faiblement vers zéro. Il existe alors une suite $\{n_\nu\}$ satisfaisant à la condition suivante:*

$$\Big|\frac{1}{\nu}\sum_{1}^{\nu} U_{n_\mu}(f)\Big|_q = O(\nu^{-\lambda}), \quad \lambda = \min\Big(\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, 1-\frac{1}{q}\Big). \tag{4.1}$$

Démonstration. En vertu du théorème 1, il suffit de s'occuper des opérations de la forme

$$U_\nu(f) = \int_0^1 L_\nu(x,t) f(t)\,dt,$$

$$L_\nu(x,t) = \sum_{1}^{\lambda_\nu} a_{i,j}^{(\nu)}\,\omega_i(x)\,\omega_j(t).$$

La suite $\{U_\nu\}$ étant faiblement convergente, on a d'une part

$$\|U_\nu\| \leqslant M$$

et d'autre part

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{i,j}^{(\nu)} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots).$$

En changeant les notations, nous pouvons admettre que

$$\sum_{i,j=1}^{u(\nu)} |a_{i,j}^{(\nu)}| \leqslant 2^{-\nu}; \quad u(\nu+1) \geqslant 2\lambda_\nu, \quad \lambda_\nu \geqslant 2u(\nu). \tag{4.2}$$

Posons

$$L_\nu^{(1)} = \sum_{i,j=1}^{u(\nu)} a_{i,j}^{(\nu)}\,\omega_i(x)\,\omega_j(t), \tag{4.3}$$

$$L_\nu^{(2)} = \sum_{i=u(\nu)+1}^{\lambda_\nu} \sum_{j=1}^{u(\nu)} a_{i,j}^{(\nu)}\,\omega_i(x)\,\omega_j(t), \tag{4.4}$$

$$L_\nu^{(3)} = \sum_{\nu=1}^{\lambda_\nu} \sum_{j=u(\nu)+1}^{\lambda_\nu} a_{i,j}^{(\nu)}\, \omega_i(x)\, \omega_j(t), \tag{4.5}$$

$$U_\nu^{(1)} = \int_0^1 L_\nu^{(1)} f(t)\, dt, \quad U_\nu^{(2)} = \int_0^1 L_\nu^{(2)} f(t)\, dt, \quad U_\nu^{(3)} = \int_0^1 L_\nu^{(3)} f(t)\, dt. \tag{4.6}$$

Nous allons démontrer l'inégalité (4.1) séparément pour $U_\nu^{(1)}$, $U_\nu^{(2)}$ et $U_\nu^{(3)}$.

D'une façon évidente (4.2) entraîne (4.1) pour $U_\nu^{(1)}$. On obtient, d'après (4.2) et (2.8),

$$\int_0^1 \Big|\sum_1^n U_\nu^{(2)}(f)\Big|^q dx \leqslant C_q \int_0^1 \Big(\sum_1^n U_\nu^{(2)\,2}\Big)^{q/2} dx. \tag{4.7}$$

En supposant $1 < q \leqslant 2$, on a

$$\int_0^1 \Big|\sum_1^n U_\nu^{(2)}\Big|^q dx \leqslant C_q \sum_1^n \int_0^1 |U_\nu^{(2)}|^q dx = O(n). \tag{4.8}$$

Pour $q > 2$, une application de l'inégalité de Hölder donne

$$\int_0^1 \Big(\sum_{\nu=1}^n U_\nu^{(2)\,2}\Big)^{q/2} dx \leqslant n^{(q-2)/2} \sum_{\nu=1}^n \int_0^1 |U_\nu^{(2)}|^q dx = O(n^{q/2}). \tag{4.9}$$

Maintenant tout revient à évaluer l'expression

$$\Big|\sum_{\nu=1}^n U_\nu^{(3)}\Big|_q,$$

ou bien l'expression majorante

$$\sum_1^n |U_\nu^{(3)}|_q. \tag{4.10}$$

En désignant par $\varDelta_\nu$ l'expression

$$\sum_{u(\nu)}^{\lambda_\nu} a_i\, \omega_i(t), \quad \Big(f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, \omega_i(t')\Big)$$

et en appliquant l'inégalité (2.8), on obtient pour $1 < p < 2$

$$\begin{aligned} \sum_1^n |U_\nu^{(3)}|_q &= O\Big(\sum_1^n \int_0^1 |\varDelta_\nu|_p dt\Big) = O\Big(n^{(p-2)/p} \Big(\int_0^1 \sum_1^n |\varDelta_\nu|^p dt\Big)^{1/p}\Big) \\ &= O\Big(n^{(p-1)/p}\, n^{(2-p)/2p} \Big(\int_0^1 \Big(\sum_1^n \varDelta_\nu^2\Big)^{p/2} dt\Big)^{1/p}\Big) = O(n^{1/2}). \end{aligned} \tag{4.11}$$

D'une façon analogue, l'inégalité (2.10) donne pour $p \geqslant 2$

$$\sum_1^n |U_\nu^{(3)}|_q = O\Big(\sum_1^n \Big(\int_0^1 |\varDelta_\nu|^p dt\Big)^{1/p}\Big) = O(n^{(p-1)/p})\ ^{8)}. \tag{4.12}$$

5. Nous allons démontrer le théorème 3 d'abord dans le cas particulier où la suite $\{U_\nu\}$ converge faiblement vers zéro. Il suffit évidement de s'occuper des opérations U_ν de la forme

$$\begin{aligned} U_\nu(f) &= \int_0^1 L_\nu(x, t) f(t)\, dt, \\ L_\nu(x, t) &= \sum_{i,j=1}^{\lambda_\nu} a_{i,j}^{(\nu)}\, \omega_i(x)\, \omega_j(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

En effet, chaque opération $U_\nu \in L_{p,q}^*$ peut être représentée comme une somme $U_\nu' + U_\nu''$, où U_ν' est de la forme (5.1) et la norme de l'opération U_ν'' ne surpasse pas $2^{-\nu}$. D'après l'inégalité de Minkowski, on obtient

$$\sum_\nu \int_0^1 |U_\nu''(f)|\, dx < \infty,$$

la série

$$\sum_\nu |U_\nu''(f)|$$

converge donc presque partout, on a donc presque partout

$$U_\nu''(f) = O(1).$$

Considérons la décomposition

$$L_\nu = L_\nu^{(1)} + L_\nu^{(2)} + L_\nu^{(3)}, \quad U_\nu = U_\nu^{(1)} + U_\nu^{(2)} + U_\nu^{(3)},$$

utilisée déjà dans la démonstration du théorème 1 (formules (4.2)—(4.6)). Il est évident que la suite $\{U_\nu^{(1)}(f)\}$ tend uniformément vers zéro. D'autre part, une simple application de la transformation d'Abel montre, en vertu des évaluations (4.7)—(4.9), que la série

$$\sum_\nu \frac{U_\nu^{(2)}}{\nu} \tag{5.2}$$

---

[8]) Ce théorème est une généralisation d'un théorème connu dû à MM. S. Banach et S. Saks, voir Banach et Saks [1].

réprésente une fonction de classe L^q. Les inégalités (4.2) étant vérifiées, il en résulte d'après (2.9) la convergence presque partout de la série (5.2), donc, à plus forte raison, la relation

$$\sum_1^n U_\nu^{(2)}(f) = o(n) \quad \text{p. p.}$$

En partant de la série

$$(5.3) \qquad \sum_\nu \frac{|U_\nu^{(3)}|}{\nu}$$

et en appliquant les évaluations (4.11), (4.12), on voit qu'elle converge aussi presque partout, d'où l'on conclut que

$$\sum_{\nu=1}^n |U_\nu^{(3)}(f)| = o(n) \quad \text{p. p.}$$

6. Les normes des opérations U_ν étant uniformément bornées, nous pouvons admettre que la suite $\{U_\nu\}$ converge faiblement — cela veut dire que, pour tout f, la suite $\{U_\nu(f)\}$ est faiblement convergente. En effet, tout ensemble borné dans L^p étant faiblement compact d'après un théorème connu de M. F. Riesz [9]), nous pouvons supposer que chaque suite $\{U_\nu(\omega_k)\}$ $(k=1,2,\dots)$ converge faiblement, ce qui entraîne la convergence faible de chaque suite

$$\{U_\nu(f)\}.$$

Désignons par g_k les limites faibles des suites

$$\{U_\nu(\omega_k)\} \qquad (k=1,2,\dots).$$

Quel que soit le polynome de M. Walsh

$$W = \sum_{\nu=1}^n a_\nu \omega_\nu(t),$$

la suite $\{U_\nu(W)\}$ converge faiblement vers

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu g_\nu.$$

En désignant par M la borne supérieure des normes des opérations U_ν, on a

$$|U_\nu(W)|_q \leqslant M |W|_p;$$

[9]) Riesz [1].

or, comme pour chaque fonction $g \in L^{q'}$ $(1/_q + 1/_{q'} = 1)$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 g\, U_\nu(W)\, dx = \int_0^1 g \sum_1^n a_\nu g_\nu\, dx,$$

on conclut que

$$|\sum_1^n a_\nu g_\nu|_q \leqslant M \qquad (n=1,2,\dots).$$

Il est facile de généraliser le dernier résultat. En effet, soit

$$f = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu(t), \quad f \in L^p;$$

la série

$$\sum_\nu a_\nu g_\nu$$

converge fortement dans le champ L^q [10]) $(q>1)$. Il en résulte que l'opération

$$U'_\nu(f) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu g_\nu, \quad f = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu, \quad f \in L^p$$

est totalement continue et que sa norme ne surpasse pas M. La suite $\{U_\nu - U'_\nu\}$ d'opérations totalement continues converge faiblement vers zéro. En tenant compte du résultat obtenu dans le paragraphe précédent, on voit qu'il suffit de démontrer le théorème pour la suite $\{U'_\nu\}$.

Nous allons établir sur ce point une proposition beaucoup plus forte.

7. Lemme 2. *Soit donnée une suite de fonctions $g_\nu \in L^q$ $(\nu=1,2,\dots)$ telle que la série*

$$\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu g_\nu \qquad (f = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu,\ f \in L^p,\ p>1)$$

converge fortement dans le champ L^q $(q>1)$. Il existe une suite $\{n_\nu\}$, contenue dans n'importe quelle suite $\{m_\nu\}$ donnée d'avance, telle que l'expression

$$\sum_1^{n_\nu} a_i g_i$$

converge presque partout pour chaque fonction $f \in L^p$.

[10]) On dit que la suite $\{f_\nu\}$ converge fortement dans L^p, si $\lim_{n,m\to\infty} |f_n - f_m|_p = 0$.

Sans restreindre la généralité, nous pouvons admettre que les fonctions g_ν sont de la forme

$$g_\nu = \sum_{i=1}^{\lambda_\nu} a_{\nu,i}\,\omega_i(t),$$

car dans le cas contraire il suffirait de les approcher par des expressions g_ν^* de la forme demandée, de sorte que l'on ait

$$\sum_\nu |g_\nu - g_\nu^*|_q < \infty.$$

Il est évident que la suite des intégrales

$$\int_0^1 \omega_n(x)\,S_\nu(x)\,dx \quad (S_\nu = \sum_1^\nu a_i g_i)$$

tend vers une limite finie pour chaque n fixé. La série

$$\sum_\nu a_\nu a_{\nu,n} \qquad (n=1,2,\dots)$$

étant convergente dès que

$$f = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu, \quad f \in L^p,$$

on conclut facilement d'après (2.7) que la série

$$\sum_\nu a_{\nu,n}\,\omega_\nu \qquad (n=1,2,\dots)$$

représente une fonction de classe $L^{p'}$ $({}^1/_p + {}^1/_{p'} = 1)$. Désignons par n'_ν un index tel que

$$|\sum_{\geq s} a_{i,\nu}\,\omega_i|_{p'} \leqslant 2^{-\nu} \quad (s \geqslant n'_\nu;\ \nu = 1,2,\dots)$$

et par $u(\nu)$ la fonction n'admettant que des valeurs entières, définie par les formules

$$u(\nu) = k \quad \text{pour} \quad n'_k \leqslant \nu < n'_{k+1}.$$

Nous pouvons admettre qu'elle est non décroissante. Posons

$$g'_\nu = \sum_{u(\nu)+1}^{\lambda_\nu} a_{\nu,i}\,\omega_i, \quad g''_\nu = g_\nu - g'_\nu$$

et considérons une série quelconque de la forme

$$\sum_\nu a_\nu g''_\nu,$$

où les a_ν sont des coefficients d'une fonction $f \in L^p$ dans le système de M. Walsh. Une telle série converge uniformément. En effet

$$|\sum_1^n a_\nu g''_\nu| = |\sum_{\nu=1}^n a_\nu \sum_{i=1}^{u(\nu)} a_{\nu,i}\,\omega_i|$$
$$= \sum_{i=1}^{u(n)} |\sum_{u(\nu)\geq i}^{n} a_{\nu,i}\,a_\nu| = O(1);$$

en écrivant la fonction f sous la forme d'une somme d'un polynome de M. Walsh et d'une fonction $|f'| < \varepsilon$, on en conclut la convergence uniforme. Il suffit donc, pour établir le lemme, de démontrer que chaque suite $\{n_\nu\}$, qui croit assez rapidement, jouit de la propriété que l'expression

$$\sum_1^{n_\nu} a_i g'_i, \quad (f = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu, \quad f \in L^p)$$

converge presque partout; à cet effet choisissons la suite $\{n_\nu\}$ de manière à satisfaire seulement à la condition

$$u(n_\nu) \geqslant 2 \max_{1 \leq i \leq n_{\nu-1}} \lambda_i, \quad \lambda_{n_{\nu+1}-1} > 2u(n_\nu).$$

Posons

$$f_1 = \sum_\nu \varDelta_{2\nu}, \quad f_2 = \sum_\nu \varDelta_{2\nu-1}, \quad \varDelta_\nu = \sum_{i=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} a_i\,\omega_i,$$
$$f = \sum a_\nu\,\omega_\nu, \quad f \in L^p \quad (p > 1).$$

D'après les formules (2.8) on conclut facilement que $f_1 \in L^p$, $f^2 \in L^p$. La série

$$\sum_\nu \sum_{i=n_{2\nu}}^{n_{2\nu+1}-1} a_i g'_i,$$

écrite en termes de fonctions de M. Walsh, représente une fonction de classe L^q, donc, d'après la formule (2.9), la suite

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \Big(\sum_{i=n_{2\nu}}^{n_{2\nu+1}-1} a_i g'_i\Big)\right\}$$

converge presque partout. Un résultat analogue subsiste aussi pour la fonction f_2; on en tire la convergence presque partout de la suite

$$\{\sum_1^{n_\nu} a_i g'_i\}.$$

8. Dans quelques cas on peut établir des résultats plus précis. Ces cas particuliers paraissent présenter un certain intérêt à cause de leurs applications à la théorie des séries orthogonales. Nous nous bornerons à envisager deux cas les plus simples, quoiqu'il soit très probable que la méthode puisse être utilisée pour des problèmes beaucoup plus généraux.

Théorème 4. *Dans l'hypothèse que la suite* $\{U_\nu\}$ *des opérations* $L^*_{q,q}$ $(q \geqslant 2)$ *converge fortement* [11]) *dans le champ* L^q, *on peut choisir une suite* $\{n_\nu\}$ *de sorte que la suite*

$$\{U_{n_\nu}(f)\}$$

converge presque partout dès que $f \in L^q$.

Démonstration. Comme auparavant, nous nous occuperons seulement des opérations de la forme

$$U_\nu(f) = \int_0^1 L_\nu(x, t) f(t)\, dt,$$

L_ν étant des polynomes de M. Walsh en x et t.

En écrivant L_ν sous la forme

$$\sum_{i=1}^{\lambda_\nu} \omega_i(t)\, g_{\nu,i}(x),$$

on conclut facilement que la suite $\{g_{\nu,i}\}$ converge fortement dans le champ L^q, pour chaque i fixé, vers une fonction $g_i \in L^q$. En changeant les notations, nous pouvons supposer que

$$\sum_{i=1}^{\nu} |g_{\nu,i} - g_i|_q \leqslant 2^{-\nu}.$$

Posons

$$U_\nu = U_\nu^{(1)} + U_\nu^{(2)} + U_\nu^{(3)},$$

$$U_\nu^{(1)} = \sum_1^\nu a_i g_i, \quad U_\nu^{(2)} = \sum_1^\nu a_i (g_{\nu,i} - g_i) \quad \left(f = \sum_i a_i \omega_i, \quad f \in L^q\right);$$

il est évident que la série

$$\sum_\nu |U_\nu^{(2)}(f)| \qquad (f \in L^q)$$

[11]) Cela veut dire que la suite $U_\nu(f)$ converge fortement dans L_q pour chaque fonction $f \in L^q$.

converge presque partout. D'autre part, en tenant compte du lemme 2, on voit que la suite

$$\{U_{n_\nu}^{(1)}(f)\}$$

converge presque partout dès que la suite $\{n_\nu\}$ tend assez rapidement vers l'infini. Il nous reste à nous occuper de la suite $\{U_\nu^{(3)}(f)\}$. Choisissons une suite $\{n_\nu\}$ de manière que l'on ait

$$\lambda_{n_\nu} < n_{\nu+1}, \quad n_{\nu+1} > 2n_\nu,$$

et désignons par M la borne supérieure des normes des opérations $U_\nu^{(3)}$. On a

$$\int_0^1 |U_{n_\nu}^{(3)}(f)|^q dt \leqslant M^q \int_0^1 \Big|\sum_{i=n_\nu}^{\lambda_{n_\nu}} a_i \omega_i\Big|^q dt \leqslant M^q A_q \int_0^1 |\Delta_\nu|^q dt.$$

La formule (2.10) prouve la convergence presque partout de la série

$$\sum_\nu |U_{n_\nu}^{(3)}(f)|,$$

donc aussi celle de la suite

$$\{U_{n_\nu}^{(3)}(f)\}.$$

9. Dans le théorème précédent la restriction $q \geqslant 2$ est nécessaire. Cela résulte du théorème suivant:

Théorème 5. *Le théorème* 4 *tombe en défaut pour* $1 < q < 2$.

Démonstration. Fixons le nombre $q < 2$. Nous allons définir d'abord une suite $\{g_\nu\}$ de fonctions équimesurables, jouissant des deux propriétés suivantes:

$$\text{(i)} \qquad \int_0^1 |g_\nu|^q dt < \infty, \quad \int_0^1 |g_\nu|^{q+\varepsilon} dt = \infty \qquad (\varepsilon > 0),$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned} &|\underset{t}{E}(g_1 > A_1)\, \underset{t}{E}(g_2 > A_2) \,\ldots\, \underset{t}{E}(g_\nu > A_\nu)| \\ &= |\underset{t}{E}(g_1 > A_1)|\, |\underset{t}{E}(g_2 > A_2)| \,\ldots\, |\underset{t}{E}(g_\nu > A_\nu)| \end{aligned} \text{ [12])}$$

[12]) On appelle, d'après MM. M. Kac et H. Steinhaus, des fonctions vérifiant la condition (ii) des fonctions indépendantes; voir Kac [1]. La méthode de la construction est connue; voir p. ex. Zygmund [1].

et cela pour chaque ν et chaque système de nombres $A_1, A_2, \ldots$ A cet effet effectuons la décomposition de l'intervalle (0,1) en segments $\Delta_\nu = ({}^1/_\nu, {}^1/_{\nu+1})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Définissons ensuite la fonction g_1 comme égale à $\nu^{1/q} \lg^{-1}(\nu+1)$ dans le segment Δ_ν. Pour définir la fonction g_2, divisons chaque segment Δ_ν en segments proportionnels aux nombres $|\Delta_\mu|$. Désignons par $\Delta_{\nu,\mu}$ les segments ainsi obtenus. Posons $g_2 = \mu^{1/q} \lg^{-1}(\mu+1)$ pour $x \in \Delta_{\nu,\mu}$. Nous divisons de même chaque segment $\Delta_{\nu,\mu}$ en segments $\Delta_{\nu,\mu,\lambda}$ proportionnels aux nombres $|\Delta_\lambda|$ et nous définissons la fonction g_3 comme ègale à $\lambda^{1/q} \lg^{-1}(\lambda+1)$ dans les segments $\Delta_{\nu,\mu,\lambda}$. Par un procédé analogue on obtient les fonctions $g_4, g_5, \ldots$.

La suite $\{g_\nu\}$ étant ainsi définie, posons

$$L_\nu(x,t) = g_\nu(x)\,\omega_\nu(t),$$

$$U_\nu = \int_0^1 L_\nu(x,t) f(t)\,dt.$$

Cette suite des opérations $U_\nu \in L^*_{q,q}$ tend fortement vers zéro. Nous allons démontrer qu'il n'existe aucune suite $\{n_\nu\}$ telle que la suite

$$\{U_{n_\nu}(f)\}$$

soit presque partout convergente pour chaque fonction $f \in L^q$. En effet, la suite $\{n_\nu\}$ étant choisie, considérons la fonction définie comme la somme forte de la série

$$\sum_\nu \nu^{-\lambda} \omega_{n_\nu} \text{ [13]} \qquad ({}^1/_q > \lambda > {}^1/_2);$$

elle appartient évidemment à L^2. Pour que la suite

$$\{U_{n_\nu}(f)\}$$

converge presque partout, il faut nécessairement que l'on ait presque partout

$$g_{n_\nu}(x) = o(\nu^\lambda),$$

et cela exige, en vertu de (ii), que l'on ait

$$\sum_\nu |\underset{x}{E}(g_{n_\nu}(x) > \nu^\lambda)| < \infty.$$

[13]) Cette somme existe d'après le théorème bien connu de Fischer-Riesz.

Les fonctions g_ν étant équimesurables, la dernière formule entraîne

$$\sum_\nu |\underset{x}{E}(g_1(x) > \nu^\lambda)| < \infty.$$

En décomposant l'intervalle (0,1) en ensembles

$$\underset{\nu}{E} = \underset{x}{E}(\nu \leqslant g_1(x) < \nu+1),$$

on démontre facilement que la dernière inégalité équivaut à la relation $g_1 \in L^{1/\lambda}$, impossible d'après (i).

10. L'opération $U \in L^*_{p,p} (p > 1)$ étant de la forme (3.1), l'opération

$$\bar{U}(g) = \sum_\nu \int_0^1 L_\nu(x,t)\, g(x)\,dx \quad (g \in L^{p'},\ {}^1/_p + {}^1/_{p'} = 1),$$

définie pour $g \in L^{p'}$, est totalement continue et $L^*_{p',p'}$. Il est facile de vérifier que les normes des opérations U et $\bar{U}$ sont égales.

Théorème 6. *Soit $\{U_\nu\}$ une suite des opérations de classe $L^*_{p,p}$ $(1 < p < 2)$. Supposons que non seulement la suite $\{U_\nu\}$ mais aussi la suite $\{\bar{U}_\nu\}$ [14]) converge fortement. Il existe alors une suite $\{n_\nu\}$ telle que l'expression*

$$\frac{1}{n} \sum_1^n U^2_{n_\nu}(f)$$

converge presque partout pour chaque fonction $f \in L^p$.

Démonstration. Nous nous bornerons aux opérations de la forme

$$U_\nu = \int_0^1 L_\nu(x,t) f(t)\,dt,$$

les L_ν étant des polynomes de M. Walsh en t et x.

Désignons par $g_1, g_2, \ldots$ les limites fortes des suites $\{U_\nu(\omega_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. On voit que $g_\nu \in L^p$. Chaque suite

$$\{\sum_1^n a_\nu g_\nu\}$$

converge fortement dès que la suite $\{a_\nu\}$ est la suite des coeffi-

[14]) Nous ne savons pas si cette partie de l'hypothèse est nécessaire.

cients d'une fonction $f \in L^p$ dans le système de M. Walsh. On en conclut facilement que les normes des opérations

$$\bar{U}_\nu^1 = \int_0^1 g(x) \sum_1^\nu \omega_i(t)\, g_i(x)\, dx$$

sont uniformément bornées. Nous allons démontrer que la suite $\{\bar{U}_\nu^1\}$ converge fortement; pour cela il suffit de montrer que chaque suite $\{\bar{U}_\nu^1(\omega_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ converge fortement.

En posant

$$g_\nu = \sum_i a_{\nu, i}\, \omega_i,$$

on obtient

$$\bar{U}_\nu'(\omega_n) = \sum_1^\nu a_{i,n}\, \omega_i\ ^{15)};$$

il en résulte que la série

$$\sum_i a_{i,n}\, \omega_i$$

représente une fonction de classe $L^{p'}$, par conséquent la suite $\{\bar{U}_\nu'(\omega_i)\}$ converge fortement. En changeant les notations, nous pouvons admettre que

$$\sum_{i=1}^{\nu} | g_{\nu,i} - g_i |_p \leqslant 2^{-\nu},$$

où

$$L_\nu = \sum \omega_i(t)\, g_{\nu,i}(x).$$

Posons

$$U_\nu = U_\nu^{(1)} + U_\nu^{(2)} + U_\nu^{(3)},$$
$$f = \sum_\nu \sigma_\nu \omega_\nu, \quad f \in L^p,$$

$$U_\nu^{(1)} = \sum_{i=1}^{\nu} a_i g_i, \quad U_\nu^{(2)} = \sum_1^\nu a_i (g_{\nu,i} - g_i), \quad U_\nu^{(3)} = U_\nu - U_\nu^{(1)} - U_\nu^{(2)}.$$

D'après les considérations précédentes, les suites $\{U_\nu^{(1)}\}$ et $\{\bar{U}_\nu^{(1)}\}$ convergent fortement. Il est évident que les suites $\{U_\nu^{(2)}\}$ et $\{\bar{U}_\nu^{(2)}\}$ sont fortement convergentes, donc il en est de même pour $\{U_\nu^{(3)}\}$ et $\{\bar{U}_\nu^{(3)}\}$; en tenant compte de leurs formes, on conclut facilement que leurs limites fortes sont égales à zéro. D'après le

[15]) C'est une conséquence du théorème suivant: si les sommes partielles d'une série $\sum_\nu a_\nu \omega_\nu$ sont bornées dans $L^p\ (p > 1)$, la série représente une fonction de L^p; la démonstration résulte immédiatement de (2.8).

lemme 2, tout revient à démontrer qu'il existe une suite $\{n_\nu\}$ telle que presque partout

$$\sum_1^n \left[U_{n_\nu}^{(3)}(f) \right]^2 = o(n),$$

dès que $f \in L^p$.

Les opérations $U_\nu^{(3)}$ étant totalement continues, nous pouvons admettre qu'elles sont de la forme

$$U_\nu^{(3)} = \int_0^1 L_\nu(x, t) f(t)\, dt,$$

$$L_\nu(x, t) = \sum_{i=1}^{\lambda_\nu} \sum_{j=\nu}^{\lambda_\nu} a_{i,j}^{(\nu)}\, \omega_i(x)\, \omega_j(t) = \sum_{j=\nu}^{\lambda_\nu} \omega_j(t)\, g_{\nu,j}(x).$$

Posons

$$L_\nu(x, t) = \sum_{i=1}^{\lambda_\nu} \omega_i(x)\, h_{\nu,i}(t).$$

On voit facilement que les suites $\{h_{\nu,i}\}$ [16]) $(i = 1, 2, \ldots)$ tendent fortement vers zéro dans $L^{p'}$. Il est donc possible de définir une fonction non-décroissante $u(\nu) \to \infty$ telle que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{u(\nu)} | h_{\nu,i} |_{p'} \to 0.$$

En changeant les notations, nous pouvons admettre que

$$(10.1) \qquad \sum_1^{u(\nu)} | h_{\nu,i} |_{p'} \leqslant 2^{-\nu}.$$

Posons

$$U_\nu^{(3)} = U_\nu' + U_\nu'',$$

$$U_\nu''(f) = \int_0^1 f(t) \sum_{i=1}^{u(\nu)} \omega_i(x)\, h_{\nu,i}(t)\, dt.$$

La suite d'opérations $\{U_\nu''\}$ converge fortement vers zéro et d'autre part on voit, d'après (10.1), que la suite $\{U_\nu''(f)\}$ converge presque partout vers zéro pour chaque fonction $f \in L^p$. Nous nous occuperons donc seulement des opérations U_ν'. En

[16]) En effet $h_{\nu,i} = \bar{U}_\nu^{(3)}(\omega_i), \quad \omega_i \in L^{p'}$.

changeant encore une fois les notations, nous pouvons admettre que

$$U'_\nu = \int_0^1 L_\nu(x,t) f(t)\,dt,$$

$$L_\nu(x,t) = \sum_{i,j=m_\nu}^{m_{\nu+1}-1} a_{i,j}^{(\nu)}\,\omega_i(x)\,\omega_j(t), \quad m_{\nu+1} > 2m_\nu.$$

Considérons la série formelle

$$S = \sum_\nu \bar{U}'_\nu(g)/\sqrt{\nu},$$

$$g = \sum_\nu a_\nu \omega_\nu, \quad g \in L^{p'}.$$

En appliquant l'inégalité (2.8), on obtient

$$|S|_{p'}^{p'} \leqslant C_{p'} \int_0^1 (\sum_\nu U_\nu'^2/\nu)^{p'/2} dt = O(\sum_\nu \int_0^1 |U'_\nu|^{p'} dt)$$

$$= O(\sum_\nu \int_0^1 |\sum_{n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} a_i \omega_i|^{p'} dt) = O(1).$$

La série considérée représente donc une fonction de classe $L^{p'}$, dès que $g \in L^{p'}$. On en conclut facilement que la série

$$\sum_\nu U'_\nu(f)/\sqrt{\nu} \qquad (f \in L^p)$$

représente une fonction de classe L^p. En appliquant l'inégalité (2.8), on en obtient

$$\int_0^1 (\sum_\nu U_\nu'^2(f)/\nu)^{p/2} dt = O(1).$$

La dérnière formule met en évidence la convergence presque partout de la série

$$\sum_\nu U_\nu'^2/\nu,$$

donc, à plus forte raison, la formule

$$\sum_1^n U_\nu'^2(f) = o(n),$$

et cela achève la démonstration du théorème.

11. Comme applications simples des théorèmes 4, 3 et 6 nous citons les théorèmes suivants:

Théorème 7 [17]. *Quel que soit le système $\{\varphi_\nu\}$ orthogonal et normé dans l'intervalle* (0,1), *on peut choisir une suite $\{n_\nu\}$ de manière que la suite*

$$\{S_{n_\nu}(t)\} \qquad (S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} a_i \varphi_i)$$

converge presque partout, dès que

$$\sum_\nu a_\nu^2 < \infty.$$

Théorème 8. *Soit donné un système orthogonal et normé dans l'intervalle* (0,1), *tel que le développement d'une fonction quelconque $f \in L^p$ $(1 < p < 2)$ converge fortement dans le champ L^q $(q > 1)$. On peut choisir une suite $\{n_\nu\}$ de sorte que la suite*

$$\{\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} S_{n_\nu}\}$$

converge presque partout. (S_ν *désigne la ν-ième somme partielle du développement relatif au système considéré $\{\varphi_\nu\}$ d'une fonction quelconque de classe L^p*).

Théorème 9 [18]. *En admettant l'hypothèse du théorème précédent et $p = q$, on peut choisir une suite $\{n_\nu\}$ de sorte que l'expression*

$$\frac{1}{n} \sum_1^n S_{n_\nu}^2$$

converge presque partout [19]).

[17]) Ce théorème est connu; voir Marcinkiewicz [1].

[18]) Ce théorème est ausi connu; voir Marcinkiewicz [2].

[19]) Il est évident qu'on peut modifier les théorèmes 6—9 en remplaçant la sommation au sens ordinaire par certaines méthodes de sommation de Toeplitz.

Bibliographie.

S. BANACH [1]. Théorie des opérations linéaires, Warszawa-Lwów (1932).

S. BANACH et S. SAKS [1]. Sur la convergence forte dans les champs L^p, Stud. Math. 1 (1930) p. 51—57.

M. KAC [1]. Sur les fonctions indépendantes, Stud. Math. 6 (1936) p. 46—58.

J. MARCINKIEWICZ [1]. Sur la convergence des séries orthogonales, Stud. Math. 6 (1936) p. 39—45.

[2]. Sur la sommabilité de séries orthogonales (en polonais), Wiadomości Matematyczne 44 (1937) p. 5—16.

R. PALEY [1]. A remarkable series of orthogonal functions (I), Proc. Lond. Math. Soc. 2 (34) (1931) p. 241—264.

F. RIESZ [1]. Über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Ann. 69 (1910) p. 449—497.

A. ZYGMUND [1]. Sur quelques séries de fonctions (en polonais), Mathesis Polska 5—6 (1931) p. 241—264.

(Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1937).